Tallinna 2003

Kunkin viiden tehtävän jokaisen osatehtävän täydellinen ratkaisu tuottaa kaksi pistettä. Aikaa on viisi tuntia.

1. Lentopallo (8 pistettä)

Tarkastellaan yksinkertaista lentopallon mallia: ohut ilmalla täytetty pallokuori. Kuorimateriaali on venymätöntä mutta helposti laskostettavaa. Pallon sisällä oleva ylipaine $\Delta p = 20\,\text{kPa}$, pallon säde $R = 10\,\text{cm}$ ja massa $m = 400\,\text{g}$ (pallon sisällä olevan ilman massa on siis mitätön). Tässä tapauksessa ei tarvitse tarkastella myöskään ylipaineen riippuvuutta pallomaisen muodon muuttumisesta.

1) Palloa puristetaan kahden yhdensuuntaisen jäykän levyn välissä, joiden etäisyys on $2R - 2h$ (niin että deformoituneen segmentin korkeus on $h = 1\,\text{cm}$). Mikä on pallon ja levyn välinen voima N?

2) Pallo liikkuu nopeudella $v_0 = 2\,\text{m/s}$ ja osuu jäykkään seinään. Mikä on deformoituneen segmentin suurin korkeus $h_m \ldots$

3) ja törmäykseen kuluva aika τ?

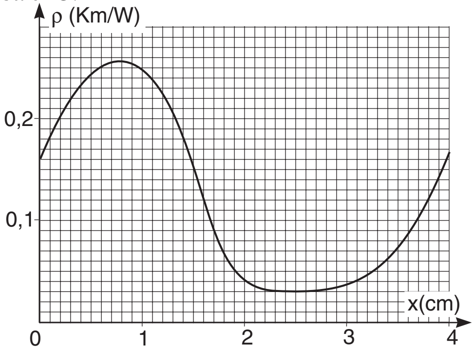
4) Pienillä ylipaineilla lentopallo voi menettää pallomuotonsa myös sellaisissa kohdissa, jotka eivät kosketa seinää. Mikä ehto pitää suureiden Δp, R, m ja h toteuttaa, jotta voidaan olla varmoja, että pallomuodon häviäminen on mitätöntä?

2. Lämpövuo (4 pistettä)

Tarkastellaan poikkipinta-alaltaan ja pituudeltaan yksikkömittaista johdinta. Lämpöresistiivisyys määritellään tämän johtimen päiden välisen lämpötilaeron ja johtimen läpi kulkevan lämpövuon (yksikkö W) suhteena.

1) Mikroprosessoria, jonka teho on $P = 90\,\text{W}$ jäähdytetään vedellä. Mikrosirun (chip) ja virtaavan veden välissä on kuparilevy, jonka paksuus on $d = 5\,\text{mm}$ ja poikkipinta-ala $s = 100\,\text{mm}^2$. Kuinka suuri on mikroprosessorin ja veden välinen lämpötilaero? Kuparin lämpöresistiivisyys on $\rho = 2{,}6\,\text{mm}\cdot\text{K/W}$.

2) Eri metalliseoksista valmistetun johtimen lämpöresistiivisyys ρ johdinta pitkin asetetun koordinaatin funktiona on annettu oheisessa kuvassa. Johtimen poikkipinta-ala on $S = 1\,\text{mm}^2$ ja sen pituus on $l = 4\,\text{cm}$. Mikä on johtimen läpi kulkeva lämpövuo, kun johtimen toinen pää on lämpötilassa 100°C ja toinen pää lämpötilassa 0°C?



3. Gravitaatio (6 pistettä)

1) Mikä on putoamiskiihtyvyys g_0 palloplaneetan pinnalla, kun planeetan massa on M ja tiheys ρ. Jatkossa tiheys oletetaan vakioksi.

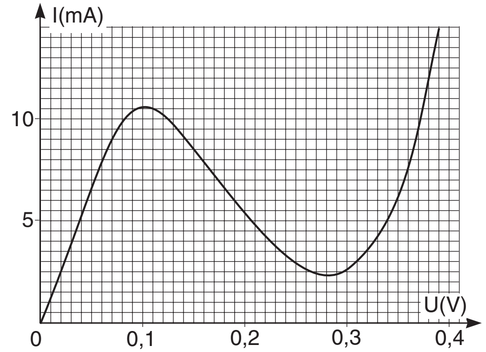
2) Onko mahdollista, että ei-pallonmuotoisen planeetan pinnalla olisi piste, jossa putoamiskiihtyvyys olisi ? Perustele vastauksesi.

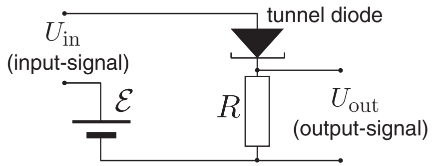
3) Millaisella planeetan muodolla on suurin putoamiskiihtyvyys? Voit antaa vastauksen napakoordinaateissa, lauseke saa sisältää yhden määrittelemättömän vakion.

4. Tunnelidiodi (8 pistettä)

Tunnelidiodi on tavallisen diodin kaltainen puolijohdelaite. Sen jännite-virta ominaiskäyrä on annettu oheisessa kuvassa. Allaoleva piiri kuvaa yksinkertaista vahvistinta.

Lähdejännite: $R = 10\,\Omega$, $\mathcal{E} = 0{,}25\,\text{V}$.



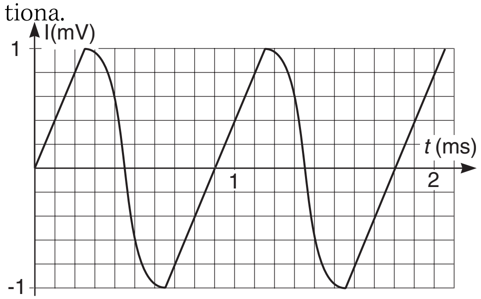


1) Mikä on piirissä kulkeva virta, kun $U_{\text{in}} + \mathcal{E} = 0{,}08\,\text{V}$?

2) Mikä on ulostulojännite $U_{\text{out}\,0}$, kun $U_{\text{in}} = 0\,\text{V}$?

3) Mikä on ulostulosignaali $U_{\text{out}} - U_{\text{out}\,0}$, kun $U_{\text{in}} = 1\,\text{mV}$?

4) Sisääntulosignaali on annettu alla olevassa kuvassa. Piirrä ulostulosignaalikäyrä ajan funktiona.



5. Värähtely (10 pistettä)

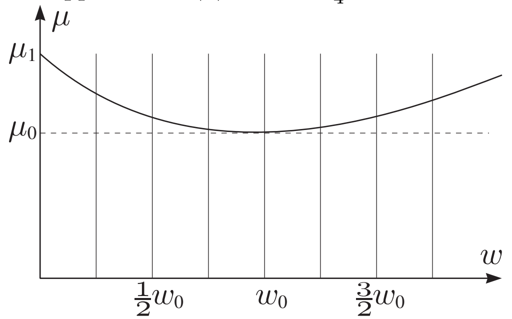
Tarkastellaan sileätä vaakasuoraa pinata, joka liikkuu jaksollisesti edestakaisin pitkin vaakasuoraa x-akselia. Ensimmäisen puolijakson τ aikana pintanopeus on u, toisen puolijakson aikana $-u$. Tiili, jonka massa on m, asetetaan pinnalle. Tiilen ja pinnan välinen kitkakerroin on μ, putoamiskiihtyvyys on g.

1) Tiilen alkunopeus suuntaan x on v. Mikä ehto on oltava voimassa suureiden g, μ, v ja τ välillä, jotta tiilen nopeuden muutos puolijakson aikana on mitättömän pieni? jatkossa oletetaan, että tämä ehto on voimassa.

2) Voima F_x pitää tiilen liikkeessä pitkin x-akselia niin, että tiilen keskinopeus on v. Hahmottele graafisesti (piirrä) riippuvuus $F_x(v)$.

3) Voima F_y pitää tiilen liikkeessä pitkin (vaakasuoraa) y-akselia niin, että tiilen keskinopeus on v. Määritä riippuvuus $F_y(v)$.

4) Tähän asti kitkakertoimen riippuvuus liukumisnopeudesta w on jätetty ottamatta huomioon. Nyt oletetaan, että tämä riippuvuus on allaolevan kuvan mukainen. Voima F_x pitää tiilen liikkeessä pitkin x-akselia siten, että tiilen keskinopeus on v. Hahmottele graafisesti (piirrä) riippuvuus $F_x(v)$ kun $u = \frac{3}{4}w_0$.



5) Tiili asetetaan pinnalle, ei ole mitään ulkoisia voimia. Mikä on tiilen rajanopeus v? Anna vastaus suureen u funktiona.

6. Varauksellinen hiukkanen (12 pistettä)

Hiukkanen, jonka massa on m ja varaus q on homogeenisessa magneettikentässä, jonka magneettivuon tiheys on B (z-akselin suuntainen vektori). Systeemiä karakterisoiva (luonteenomainen) aika on hiukkasen syklotronijakso $T_B = 2\pi m/Bq$. Systeemi on kahden yhdensuuntaisen elektrodin välissä, joiden avulla voidaan luoda homogeeninen x-akselin suuntainen sähkökenttä E.

1) Hiukkanen on levossa. Ajanhetkellä $t = 0$ kytketään sähkökenttä E päälle; lyhyen hetken t päästä ($t \ll T_B$) se kytketään pois päältä. Määritä hiukkasen rata?

2) Merkitään hiukkasen liikemäärän x- ja y-komponentteja p_x ja p_y. Luonnostele hiukkasen rata (p_x, p_y)-tasossa ja kuvaile liikemäärävektoreita ajanhetkillä $t_n = nT_B/4$ ($n = 1, 2, 3$ ja 4).

3) Tarkastele tilannetta, kun sähkökenttää kytketään jaksollisesti päälle ja pois yhtä suurin aikavälein $\Delta t = T_B/4$ alkaen hetkestä $t = 0$. Luonnostele hiukkasen radat (p_x, p_y)- ja (x, y)-tasoissa.

4) Olkoon jakso lyhyt, $\Delta t \ll T_B$ (mutta vielä paljon pitempi kuin pulssin kesto, $\Delta t \gg \tau$). Osoita, että n:nnen pulssin jälkeen (ajanhetkellä $t_n = n\Delta t$), hiukkasen liikemäärä voidaan esittää n:n vektorin $\vec{p}_i$ summana, missä kaikkien komponenttivektorien itseisarvot ovat yhtä suuria (itseisarvo ei riipu n:stä) ja vierekkäisten vektoreitten ($\vec{p}_i$ ja $\vec{p}_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$)väliset kulmat ovat yhtä suuret.

5) Tarkastele rajatapausta $\Delta t \to 0$, $E\tau/\Delta t \to E_k$. E_k on sähkökentän aikakeskiarvo.Luonnostele hiukkasten rata (p_x, p_y)-tasossa ja hiukkasten keskinopeus (vektoriaalisesti: keskiarvo otettu syklotronijakson yli) suureiden E_k ja B avulla.

6) Palataan nollasta eroaviin (mutta kuitenkin pieniin $\Delta t \ll T_B$) aikaväleihin. Tarkastellaan tapausta, kun pulssien polaarisuus vaihtelee: pulssilla $2n$ sähkökenttä on $+E$ ja pulssilla $2n+1$ sähkökenttä on $-E$. Määritä hiukkasten keskinopeus, (vektoriaalinen) keskiarvo otetaan syklotronijakson yli.

7. Teleskooppi (12 pistettä)

Kuten tiedetään teleskoopilla voidaan katsella tähtiä päivänvalossa. Tutkitaan tätä ongelmaa vähän tarkemmin. Tarkastele yksinkertaistettua silmän mallia.: yksi linssi, jonka polttoväli $f = 4\,\mathrm{cm}$ ja halkaisija $d = 3\,\mathrm{mm}$, muodostaa kuvan varjostimelle (verkkokalvolle). Teleskoopin malli on samanlainen: linssi, jonka polttoväli $F = 2\,\mathrm{m}$ ja halkaisija $D = 20\,\mathrm{cm}$ muodostaa kuvan polttotasoon (johon laitetaan esimerkiksi filmi). Laskuissa voit käyttää seuraavia suureita: Auringosta pinta-alayksiköltä aikayksikössä säteilevän valoenergian tiheys wo (valotehon pintatiheys): tähden ja Auringon etäisyyksien suhde $q = 4 \cdot 10^6$ (oletetaan tähden olevan identtisen Auringon kanssa): Auringon "kulmahalkaisija" $\phi \approx 9\,\mathrm{mrad}$. Huom. Jos vastaus sisältää w_0, ei tarvita numeerista vastausta.

1) Tarkastele paperiarkkia, jonka normaali suuntautuu Aurinkoon. Mikä on Auringosta arkille tulevan valotehon w_1 pintatiheys?

2) Mikä on teleskoopin tähden kuvaan fokusoiman valon nettoteho P_2?

3) Oletetaan, että sininen taivas on yhtä kirkas kuin Auringon valaisema harmaa paperi. Voit olettaa, että kohtisuorassa suunnassa paperiarkkia vastaan paperin yhden steradiaanin avaruuskulmaan sirottaman valotehon suhde arkille saapuvaan nettovalotehoon on $\alpha \approx 0{,}1$ (tämä vastaa sitä, että noin 70% valoenergiasta häviää harmaassa paperissa). Mikä on sinisen taivaan aiheuttaman valotehon pintatiheys w_3 teleskoopin polttotasossa?

4) Tähden kuvaa tutkittaessa jätetään huomiotta muut vaikutukset paitsi diffraktio. Arvioi tähdestä saapuvan valon aiheuttaman valotehon pintatiheys w_2 tähden kuvan keskellä (teleskoopin polttotasossa).

5) Johda lauseke valotehojen pintatiheyksien suhteelle k tähden kuvan keskellä ja siitä kaukana olevassa pisteessä.

6) Onko mahdollista nähdä tähti teleskoopilla päivänvalossa? Paljaalla silmällä? Perustele.

8. Kokeellinen tehtävä (12 pistettä)

Määritä rautalevyn ja kestomagneetin välinen vetovoima etäisyyden funktiona. Välineet: rautalevy, puukappale, viivotin, dynamometri (voimamittari), paperisuikaleita. Varoitus! Kestomagneetit ovat hyvin voimakkaita, joten pidä ne kaukana luottokorteistasi ym. Älä myöskään päästä niitä iskeytymään toisiinsa tai rautalevyyn, koska ne ovat hauraita ja särkyvät helposti.

1) Määritä rautakappaleen ja paperisuikaleen välinen lepo- ja liikekitkakerroin. Piirrä kaavio koeasetelmastasi.

2) (4 pistettä) Määritä rautalevyn ja magneetin välinen vetovoima etäisyyksillä, joissa voit suoraan käyttää dynamometriä. Piirrä kaavio koeasetelmastasi.

3) (4 pistettä) Määritä rautalevyn ja magneetin välinen vetovoima edellistä kohtaa pienemmillä etäisyyksillä. Tässä voit käyttää puukappaletta, jonka annat liukua alas kaltevaa tasoa ja törmätä magneettiin. Sinun ei tarvitse tutkia nollaetäisyystapausta (kun magneetti ja rautalevy ovat kiinni toisissaan). Piirrä kaavio koeasetelmastasi. Esitä kaikki mittaustuloksesi graafisesti.

4) Yhdistä kaksi kestomagneettia rautasillalla (a) kuvan mukaisesti. Aseta ensin paperisuikale (b) rautalevyn (c) päälle ja sitten magneettisysteemi sen päälle. Määritä magneettisysteemin ja rautalevyn välinen vetovoima.