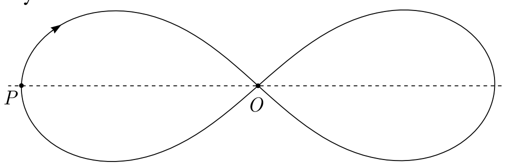
Nordic-Baltic Physics Olympiad 2018

1. GRAVITATIONAL RACING (11 pistettä) — *Maté Vigh and Jaan Kalda.*

Vaikka yleisessä tapauksessa kolmen gravitaation kautta vuorovaikuttavan kappaleen dynamiikka on monimutkaista ja kaoottista, on olemassa erityistapauksia missä dynamiikka on säännöllistä. Erityisesti on tapauksia joissa kappaleiden liike voi olla jaksollista. Jaksollisen liikkeen yksinkertaisin tapaus saadaan, kun kaikki kolme kappaletta, sijoitettuna tasasivuisen kolmion kärkiin, pyörivät jäykän kappaleen tapaisesti. Seuraavassa tarkastelemme monimutkaisempaa jaksollista liikettä.

Suhteellisen vastikään [1] havaittiin, että kolme samanlaista pistemäistä massaa voi liikkua jaksollisesti yhteistä 8-muotoista liikerataa pitkin, jota on havainnollistettu kuvassa (nuoli merkitsee liikkeen suunnan). Tämä kuvio perustuu tietokonesimulaatioon ja sillä on oikeanlainen muoto. Tarvittaessa voit mitata etäisyyksiä kuvan suurennetusta versiosta (erillisellä paperilla) käyttämällä viivoitinta.



Numeroidaan näitä kolmea kappaletta numeroin 1, 2, ja 3 sen perusteella, missä järjestyksessä ne ohittavat vasemmanpuolimmaisimman pisteen P, joka on merkitty kuvaan. Olkoon O_2 ja O_3 kappaleiden 2 ja 3 paikat, vastaavasti, hetkellä jolloin kappale 1 ohittaa keskipisteen O. Samoin, olkoon P_2 ja P_3 kappaleiden 2 ja 3 paikat hetkellä jolloin kappale 1 ohittaa vasemmanpuolimmaisimman pisteen P. Olkoon T jokaisen kappaleen liikkeen täysi jakso tällä 8-muotoisella liikeradalla.

i) *(2 pistettä)* Ilmaise seuraavat kulkemisajat yhdelle kappaleista: (a) Pisteestä O_2 pisteeseen O; (b) pisteestä O_3 pisteeseen P_2.

ii) *(1 piste)* Olkoon $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ja $\vec{v}_3$ kolmen kappaleen nopeudet eräällä ajan hetkellä. Muotoile yhtälö, joka liittää nämä kolme vektoria toisiinsa.

iii) *(2 pistettä)* Osoita, että systeemin kokonaispyörimismäärä on nolla.

iv) *(2 pistettä)* Määritä pisteiden O_2 ja O_3 paikat (käytä erilliseltä paperilta löytyvää kuvaa). Perustele ratkaisusi.

v) *(2 pistettä)* Määritä pisteiden P_2 ja P_3 paikat (käytä erilliseltä paperilta löytyvää kuvaa). Tee tämä määritys kahdella eri tapaa ja perustele ratkaisusi.

vi) *(2 pistettä)* Laske kappaleiden vauhtien suhde pisteissä O ja P.

[1] Cristopher Moore, Phys. Rev. Lett. 70, 3675 (1993)

2. SPEED CAMERA (6 pistettä) — *Mihkel Kree.*

Tässä tehtävässä analysoimme nopeuskameran toimintaperiaatetta. Nopeuskameran lähetin lähettää sähkömagneettisen aallon, jonka taajuus on $f_0 = 24\,\mathrm{GHz}$ ja aaltomuoto $\cos(2\pi f_0 t)$. Aalto heijastuu lähestyvästä autosta, jonka nopeus on v. Nopeuskameran vastaanotin tallentaa heijastuneen aallon.

i) *(2 pistettä)* Ilmaise heijastuneen aallon taajuus f_1

ii) *(2 pistettä)* Nopeuskamerassa vastaanotettu aaltomuoto kerrotaan alkuperäisellä lähetetyllä aaltomuodolla. Ilmaise kaikki kerrotussa signaalissa olevat taajuuden komponentit.

iii) *(2 pistettä)* Kerrotun signaalin matalimman taajuuskomponentin ollessa $f_{\mathrm{low}} = 4{,}8\,\mathrm{kHz}$, laske auton nopeus v. *Huom:* valonnopeus $c = 3{,}0\times10^8\,\mathrm{m/s}$ ja seuraava trigonometrinen yhtälö voi olla hyödyksi:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right].$$

3. WEATHER FORECAST (7 pistettä) — *Johan Runeson.*

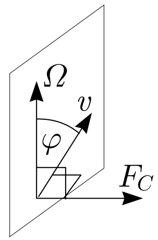
Erillisellä paperilla olevassa kuvassa näkyy isobaareja vakio korkeudella lähellä meren pinnan tasoa. Voit olettaa, että isobaarien muodostama kuvio on ajan suhteen muuttumaton (muuttuu hyvin hitaasti).

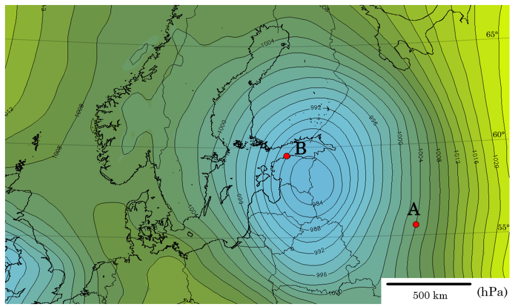
i) *(2 pistettä)* Hahmottele tuulen nopeuden suunta pisteissä A ja B.

ii) *(2,5 pistettä)* Arvioi tuulen nopeuden suuruus pisteessä A. Käytä avuksesi tietoa siitä, että pisteessä A vakio paineiden viivat ovat melkein suorat. Ilmantiheys lähellä maata on $\rho = 1.29\mathrm{kg}/m^3$.

iii) *(2,5 pistettä)* Arvioi tuulen nopeuden suuruus pisteessä B.

Vinkki Kun kappale, jonka massa on m (esimerkiksi jokin ilmamassa), liikkuu pyörivässä koordinaatistossa, jonka kulmanopeus on Ω, kokee tämä kappale fiktiivisen voiman jonka nimi on *Coriolis voima*, jolle $F_C/m = 2v\Omega\sin\phi$, missä kulma ϕ ja vektoreiden suunnat on näytetty viereissä kuvassa.





4. FRESNEL PRISM (12 pistettä) — *Eero Uustalu and Jaan Kalda.*

Laitteisto: Fresnel-prismalevy, paperiarkki jossa on syaanin ja magentan värisiä viivoja(kts. erillinen paperi), pala pahvia (voidaan käyttää varjostimena), viivoitin, mitta, jalusta ja vihreä laser (λ_0 =532nm. HUOM! Älä osoita laserilla silmään taikka katso suoraan laserin heijastusta; se voi vahingoittaa silmiäsi! Sironneen valon intensiteetti maksimi magenta viivoista on λ_m =630nm ja syaani (sinivihreä) viivoista on λ_c =495nm.)

Fresnel-prisma on läpinäkyvä levy jossa on periodinen rivi raitoja; tälläisen levyn poikkileikkauksen näet tehtävän kuvassa. Tälläisen levyn materiaalin taitekerroin on $n = 1.47$.

i) *(4 pistettä)* Määritä etäisyys d Fresnel prismassa (katso kuvasta d:n määritelmä)

ii) *(4 pistettä)* Määritä prisman kulman α suuruus.

iii) *(4 pistettä)* Oletetaan, että näkyvän valon alueella, Fresnel prisman materiaalin taitekerroin $n = n(\lambda)$ on aallonpituudesta λ lineaarinen funktio. Määritä kromaattinen dispersio $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$.

5. MAGNEETTINEN BILJARDI (9 pistettä) — *Jaan Kalda.*

Tarkastele kahta täysin elastista dielektristä (eristävää) palloa, joiden säde on r ja massa m, joista toinen kantaa isotrooppisesti jakautuneen varauksen $-q$, ja toinen vastaavasti varauksen $+q$. z-akselin suuntainen homogeeninen magneettikenttä B on niin vahva, että näiden kahden varauksen välinen sähköstaattinen voima voidaan jättää huomioimatta; jätä huomiotta myös gravitaatio sekä kitkavoimat. Ensimmäinen pallo (negatiivisesti varattu) liikkuu nopeudella v ja törmää toisen pallon kanssa, joka oli levossa origossa. Törmäys on keskeinen, ja juuri ennen törmäystä, ensimmäisen pallon nopeus on yhdensuuntainen x-akselin kanssa.

i) *(1 piste)*Mikä on toisen pallon nopeus heti törmäyksen jälkeen?

ii) *(2 pistettä)* Hahmottele molempien pallojen keskikohtien liikeradat törmäyksen jälkeisessä liikkeessä.

iii) *(3 pistettä)*Mikä on pallojen törmäyksen jälkeisen liikkeen keskinopeus (suuruus ja suunta)?

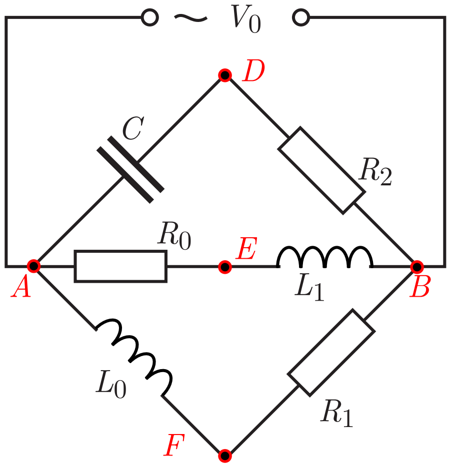
iv) *(3 pistettä)* Tarkastele samaa tilannetta kuin aiemmin, mutta tälle kertaa on kolme eri oletusta: molemmilla palloilla on sama positiivinen varaus $+q$; et voi enää jättää huomiotta pallojen välistä sähköstaattista repulsiota (hylkimistä); törmäys ei ole välttämättä keskeinen (mutta pallot liikkuvat samalla z:n arvolla siten, että törmäykset ei aiheuta liikettä z-akselin suunnalla). Olkoon P_i piste, jossa kahden pallon pinnat ovat kosketuksissa i:nnen törmäyksen aikana. Mikä on suurin etäisyys pisteiden P_i ja P_j välillä (maksimoi yli kaikkien arvojen $i,j = 1,\ldots\infty$, ja yli kaikkien törmäysparametrien kun B, m ja q ovat kiinnitettyjä)?

6. KUUTIO (5 pistettä) — *Taavet Kalda.* Tehon P omaava laserosoitin suunnataan lasikuutioon. Kuution taitekerroin on n. Kuution pinnalla on anti-reflektoiva (ei heijastava) pinnoite siten, että valon kulkiessa yhdestä väliaineesta toiseen *osittaista* heijastumista ei tapahdu. Valon nopeus on c.

i) *(3 pistettä)* (3 pistettä) Mikä on suurin voima, jolla laserosoitin voi työntää kuutiota, jos laser täytyy pitää yhdensuuntaisena yhden kuution tahkon kanssa (tämä tarkoittaa, että lasersäde voi liikkua vain kaksi ulotteisella tasolla)?

ii) *(2 pistettä)*(2 pistettä) Mikä on suurin voima, jolla laserosoitin voi työntää kuutiota, jos laserin suunta voi olla mielivaltainen?

7. LCR-PIIRI (5 pistettä) — *Jaan Kalda.* Tarkastele alla olevassa kuvassa olevaa virtapiiriä.



i) *(2 pistettä)2 pistettä* Piirrä piirin vaihediagrammi, jossa on jännitevektorit seuraavien eri pisteiden välillä: V_{AD}, V_{DB}, V_{AB}, V_{AE}, V_{EB}, V_{AF}, ja V_{FB}.

ii) *(3 pistettä) 3 pistettä* Jännitteet pisteiden D, E ja F välillä tiedetään olevan seuraavat: $V_{DE} = 7V$, $V_{DF} = 15V$ ja $V_{EF} = 20V$; mikä on syöttöjännitteen V_0 arvo?

8. ILMAA SUKELLUSVENEESSÄ (6 pistettä) — *Johan Runeson, Jaan Kalda.*

Tuntemattoman valtion sukellusvene kulkee lähellä Baltian meren pohjaa, syvyydellä $h = 300\,\mathrm{m}$. Sen sisäosa on yksi iso tilavuudeltaan $V = 10\,\mathrm{m}^3$ oleva huone, joka on täytetty ilmalla ($M = 29\,\mathrm{g/mol}$), jonka paine $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$ ja lämpötila $t_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Yhtäkkiä sukellusvene osuu kiveen, ja suuri pinta-alaltaan $A = 20\,\mathrm{cm}^2$ oleva aukko muodostuu sukellusveneen pohjaan. Tuloksena sukellusvene uppoaa pohjaan ja suurin osa sukellusveneestä täyttyy nopeasti vedellä jättäen ilmakuplan suurempaan paineeseen (yhtään ilmaa ei karkaa sukellusveneestä). Veden tiheys $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$ ja vapaan pudotuksen kiihtyvyys $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$. Veden molaarinen lämpökapasiteetti tilavuusyksikköä kohden $c_V = \frac{5}{2}R$, missä $R = 8{,}31\,\mathrm{J/K\,mol}$ on kaasuvakio.

i) *(2 pistettä)*Mikä on tilavuusnopeus (m^3/s), jolla vesi virtaa sukellusveneen sisään heti aukon muodostumisen jälkeen?

ii) *(2 pistettä)* Virtausnopeus on niin suuri, että sukellusvene täyttyy vedellä niin nopeasti, että lämmön siirtyminen kaasun ja veden välillä voidaan jättää huomioimatta (tämä pätee myös seuraavaan kysymykseen). Mikä on ilmakuplan tilavuus sen jälkeen, kun veden virtaaminen loppuu?

iii) *(2 pistettä)* Vesi joka syöksyy sukellusveneen sisälle jää liikkumaan turbulenttisesti sukellusveneen sisälle; mikä on tämän vesiturbulenssin kineettinen energia (joka myöhemmin häviää lämpönä), silloin kun veden sisääntulo on pysähtynyt paine-eron tasaannuttua?

9. MUSTA LAATIKKO (?? 1piste) — *Jaan Kalda, Mihkel Heidelberg.* Mustassa laatikossa on kolme kytkentäjohtoa: ”sininen”, ”musta” ja ”valkoinen” ja sisältää tähdenmuotoisessa asetelmassa: pariston, kondensaattorin ja kelan, joka on kytketty sarjaan diodin kanssa. Voit olettaa, että diodi on ”ideaalinen- johtaa virtaa täydellisesti yhteen suuntaan ja toiseen suuntaan ei ollenkaan. Voit jättää pariston ja kondensaattorin sisäisen resistanssin huomioimatta, mutta kelalla on huomattava sisäinen resistanssi. Yleismittarin sisäinen resistanssi jännitteitä mitatessa on $R_m = 10\,\mathrm{M\Omega}$ ja näyttää uuden lukeman jokaisella $t = 0{,}4\,\mathrm{s}$.

i) *(3 pistettä)*Piirrä mustan laatikon sisällä oleva virtapiiri. Perustele vastauksesi mittauksilla.

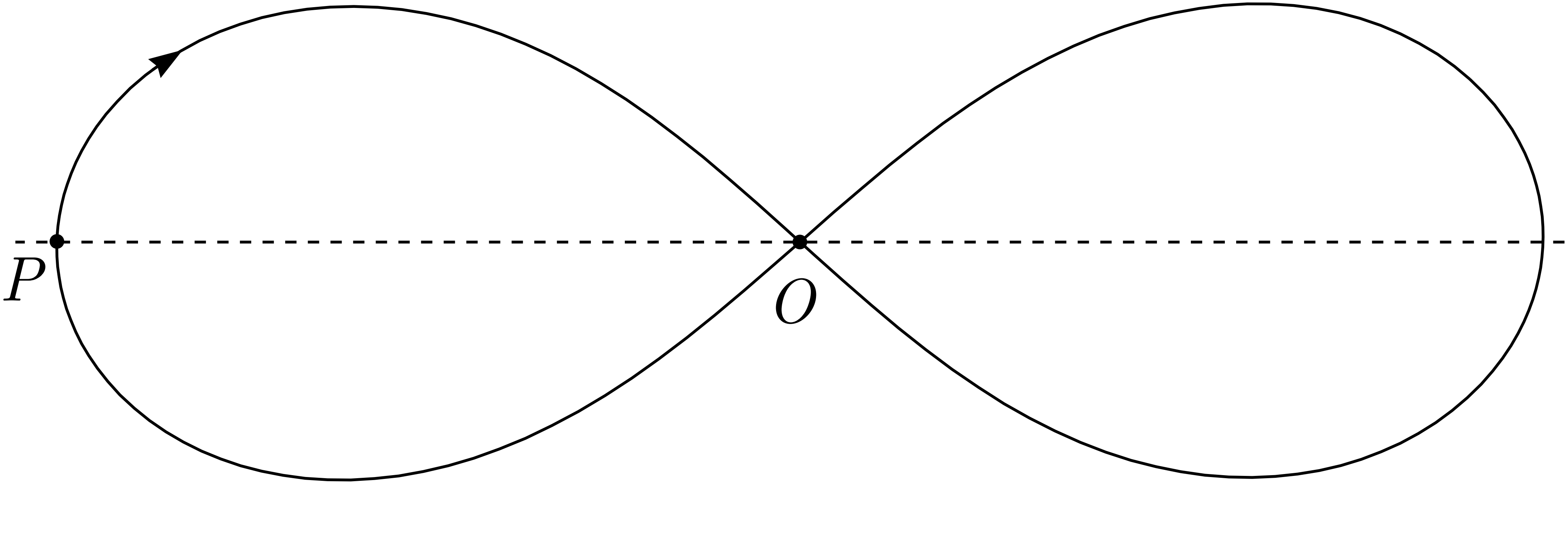
ii) *(1 piste)* Määritä pariston sähkömotorinen voima.

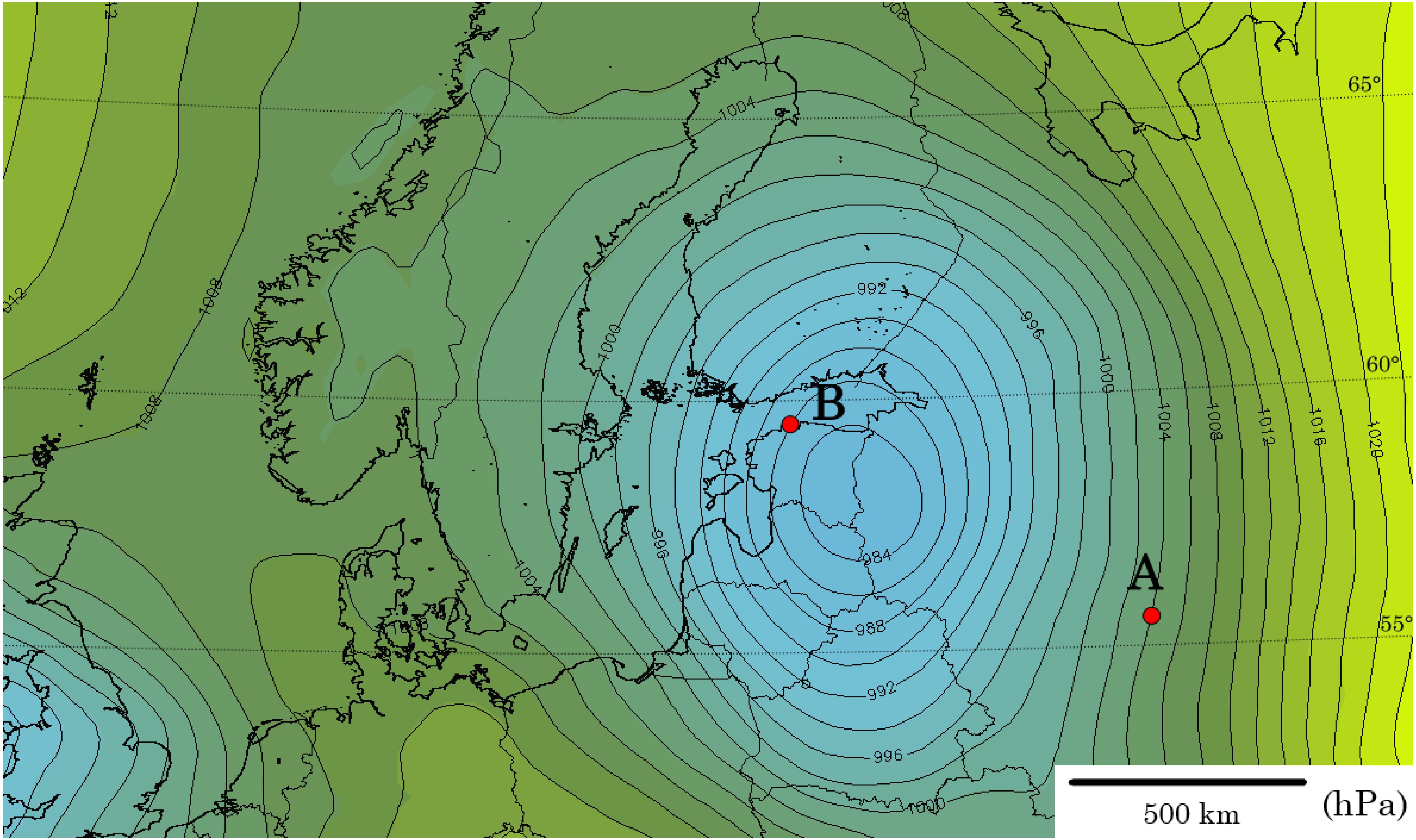
iii) *(1 piste)*Määritä kelan sisäinen resistanssi.

iv) *(3 pistettä)*Arvioi kapasitanssin C arvo.

v) *(3 pistettä)*Arvioi induktanssin L arvo.

Laitteisto Musta laatikko, yleismittari, sekuntikello.


P
O



65°
60°
55°
1004
992
996
1000
1004
1008
1012
1016
1020
B
A
984
988
992
996
1000
1008
1012
500 km
(hPa)