Suomalais-virolaiset fysiikkaolympialaiset 2015

1. **ANNIHILAATIO (6 pistettä)** *(L. Franti)* Elektroni, jonka liike-energia on 1 MeV, liikkuu z-akselia pitkin ja törmää levossa olevaan positroniin. Hiukkaset annihiloituvat tuottaen kaksi fotonia, joilla on sama energia.

i) *(1.5 pistettä)* Mikä on elektronin nopeus v_e ennen törmäystä?

ii) *(0.5 pistettä)* Kuinka suuri on fotonin A energia E_γ?

iii) *(1 piste)* Mikä on fotonin A liikemäärä p_γ?

iv) *(2 pistettä)* Kuinka suuri on kulma α z-akselin ja fotonin A liikemäärän välillä?

v) *(1 piste)* Miksi törmäysprosessissa ei ole mahdollista tuottaa ainoastaan yhtä fotonia?

Elektronin lepomassa m_e on $511\,\mathrm{keV}/c^2$. Voit antaa vastauksesi elektronivoltteina ja sen johdannaisyksiköinä.

2. **HOLOGRAFINEN LINSSI (7 pistettä)** *(J. Kalda)* Yksivärinen (monokromaattinen) valo voidaan kohdistaa pisteeseen käyttäen holografista linssiä. Holografinen linssi koostuu ohesta kalvosta, jossa on samankeskisiä läpinäkyviä ja läpinäkymättömiä renkaita. Läpinäkymättömät renkaat pysäyttävät valonsäteet, jotka muuten saapuisivat polttopisteeseen läpinäkyvien osien läpi kulkeneeseen valoon nähden vastakkaisessa vaiheessa. Oletetaan seuraavassa, että linssin läpimitta ja polttoväli ovat molemmat $d = f = 10\,\mathrm{cm}$ ja monokromaattisen valon aallonpituus $\lambda = 5 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

i) *(1.5 pistettä)* Mikä on sisältä lukien järjestyksessä m:nnen renkaan säde eli etäisyys (läpinäkymättömästä) keskipisteestä renkaan keskelle?

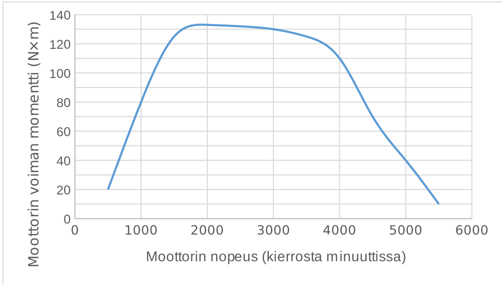
ii) *(1.5 pistettä)* Tarkastellaan saman polttovälin f ja läpimitan d omaavaa lasilinssiä, joka kokoaa yhdensuuntaiset säteet täydellisesti polttopisteeseen. Mikä on tällaisen linssin pienin mahdollinen paksuus, jos lasin taitekerroin on $n = 1{,}5$?

iii) *(2 pistettä)* Lyhyen valopulssin osuessa linssiin, holografinen linssi käyttäytyy hyvin eri tavalla kuin tavallinen lasilinssi. Jos taitekertoimen riippuvuus valon aallonpituudesta (dispersio) jätetään huomiotta lasilinnsin polttopisteessä havaittava pulssi on kestoltaan yhtä pitkä kuin alkuperäinen pulssi. Holografisen linssin tapauksessa lyhyt pulssi ($\tau = 3 \times 10^{-14}\,\mathrm{s}$) havaitaan polttopisteessä selkeästi pidempänä. Hahmottele pulssin intensiteetti holografisen linssin polttopisteessä ajan funktiona. Vaaka-akselilla t tulee olla asteikko, mutta intensiteettiakselilla I sitä ei vaadita. Valon nopeus tyhjiössä on $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$.

iv) *(1 piste)* Vaikka valolähteenä olisi ideaalisen yksivärinen laser, lyhyt pulssi ei ole enää täysin monokromaattinen. Arvioi aallonpituuskaistan leveys, jos pulssin kesto on τ.

v) *(1 piste)* Arvioi tämän pulssin kesto lasilinssin polttopisteessä. Oletetaan, että lasissa valon ryhmänopeus v_g riippuu aallonpituudesta yhtälön $\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\lambda} = 0{,}02 \times \frac{v_g}{\lambda}$ mukaisesti.

3. **VAIHTEENVAIHTO (3 pistettä)** *(K.A. Saar)* Auton moottorin vääntömomentti riippuu sen kierrosluvusta oheisen kuvaajan mukaisesti. (Suurempi versio kuvasta on liitteenä.)



Moottorin tuottama vääntö välitetään pyöriin vaihdelaatikon kautta. Ensimmäisellä vaihteella välityssuhde moottorista pyöriin on 14:1 ja toisella vaihteella 7:1.

i) *(2 pistettä)* Millä nopeudella kannattaa vaihtaa ensimmäiseltä vaihteelta toiselle, jotta auton keskimääräinen kiihtyvyys olisi mahdollisimman suuri?

ii) *(1 piste)* Mikä on auton kiihtyvyys välittömästi ennen vaihteenvaihtoa ja välittömästi sen jälkeen?

Jätä vastusvoimat, kuten ilmanvastus, huomiotta. Auton massa on $m = 1400\,\mathrm{kg}$ ja renkaan läpimitta $d = 60\,\mathrm{cm}$.

4. **TÄHTIEN SOTA (8 pistettä)** *(J. Kalda)* Tässä tehtävässä tutkitaan, mihin osaan avaruutta voidaan osua planeettojen välisellä ballistisella ohjuksella. Ohjuksen laukaisupiste P on paikallaan suhteessa keskustähden inertiaalikoordinaatistoon, missä tähti sijaitsee pisteessä S. Kaikissa tämän tehtävän osissa ohjuksen laukaisunopeus v_0 ja laukaisupisteen etäisyys tähdestä $|SP| = R$ pidetään vakioina. Vakioita ovat myös tähden massa M ja gravitaatiovakio G. *Vinkki:* Tähden ympäri kiertävän ohjuksen mekaaninen energia on $E = -GMm/(2a)$, missä m on ohjuksen massa ja a on radan pitempi puoliakseli.

i) *(2 pistettä)* Ohjus laukaistaan edellä kuvatulla tavalla mielivaltaiseen suuntaan. Mikä on ohjuksen kierrosaika elliptisellä radallaan?

ii) *(2 pistettä)* Keplerin I lain mukaan ohjuksen rata on ellipsi, jonka yksi polttopiste sijaitsee pisteessä S. Toisen polttopisteen F sijainti riippuu ohjuksen laukaisukulmasta. Kun laukaisukulmaa muutetaan, polttopisteen F sijainti muuttuu. Millaisen käyrän polttopisteet muodostavat? Määritä myös kyseisen käyrän geometriset parametrit.

iii) *(1 piste)* Olkoon ohjuksen lentoradalla piste Q, jonka etäisyys tähdestä on $|SQ| = r$. Määritä etäisyys $|QF|$.

iv) *(1 piste)* Edellä mainitun pisteen Q paikka riippuu ohjuksen laukaisukulmasta, kuten riippuu myös etäisyys $|PQ|$. Kuinka suuri on suurimman mahdollisen etäisyyden $|PQ|$ arvo?

v) *(2 pistettä)* Tehtävän osissa iii ja iv oletimme, että etäisyyden r arvo on vakio. Kuitenkin, jos oletamme r:n olevan vapaa parametri, pisteen Q paikka riippuu sekä etäisyydestä r että ohjuksen laukaisukulmasta. Millaiset ovat sen alueen rajat, jolle piste Q voi tällöin sisältyä?

5. LÄMPÖPATTERI (8 pistettä) *(M. Heidelberg)* Mittaa ympäristön ja alumiinilevyn välinen lämmönsiirtovakio h, kun tiedetään, että $h = \frac{p}{T - T_0}$, missä p on lämpövuo alumiinista ilmaan pituusyksikköä kohden, T on alumiinin lämpötila ja T_0 on ilman lämpötila. Minimoi mittauksissa ilman pyörteilyn vaikutukset pitämällä alumiinikappale mittauksissa pöydällä pöytätason suuntaisesti. Alumiinin lämmönjohtavuus on $k = 205\,\mathrm{W/(K \cdot m)}$ ja kappaleen poikkileikkauksen pinta-ala $A = 36\,\mathrm{mm}^2$.

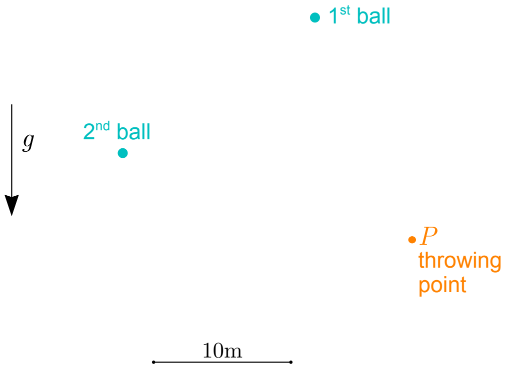
Vinkki: Kappaleen stationaariselle lämpötilajakaumalle voidaan johtaa yksiulotteinen Helmholzin yhtälö $T''(x) = \frac{h(T(x) - T_0)}{kA}$, jonka yleinen ratkaisu on muotoa

$$T(x) = T_0 + C_1 e^{x\sqrt{\frac{h}{kA}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{h}{kA}}}.$$

Tässä C_1 ja C_2 ovat integroimisvakioita.

Välineet: Alumiinikappale, johto (lämmittämistä varten), tasavirtalähde, infrapunalämpömittari, viivain. **Pidä johdon lämpötila alle 150 °C, sillä sekä johdon eriste että pöydän pinta alkavat savuta korkeampia lämpötiloja käytettäessä!**

6. KAKSI PALLOA (5 pistettä) *(J. Kalda)* Oheinen kuva (isompi versio erillisellä paperilla) esittää kahta palloa, jotka on heitetty samanaikaisesti ja samalla lähtönopeudella eri suuntiin pisteestä P. Mikä oli pallojen alkuperäinen nopeus? Käytä gravitaatiokiihtyvyydelle arvoa $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2$.



7. KIMPOAVA PALLO (5 pistettä) *(J. Toots)* Homogeeninen ja elastinen pallo, jonka säde on R, kimpoaa pystysuuntaisesta seinästä takaisin tulosuuntaansa. Pallon nopeus ennen törmäystä on v ja sen tulokulma suhteessa pystytasoon on α. Ennen törmäystä pallon kulmanopeus on ω. Törmäyskohta ei luista, mutta et voi silti olettaa, että $\omega R = v \cos\alpha$. Törmäys on kuitenkin täysin elastinen eli kineettinen energia säilyy törmäyksessä, minkä lisäksi nopeuden vaakasuuntaisen komponentin suuruus säilyy samana ennen törmäystä ja sen jälkeen. Homogeenisen pallon hitausmomentti on $I = \frac{2}{5} m R^2$.

i) *(1 piste)* Määritä pallon kulmanopeus ω_2 törmäyksen jälkeen.

ii) *(2 pistettä)* Määritä alkuperäinen kulmanopeus ω.

iii) *(2 pistettä)* Mikä on pienin kitkakertoimen μ arvo, jolla edellä kuvatun kaltainen kimpoaminen on mahdollista?

8. SÄHKÖKENTTÄ (6 pistettä) *(L. Franti)* Johderenkaassa, jonka säde on R, kulkee suuri virta I. Rengas on paikoillaan xy-tasossa siten, että sen keskipiste on origossa $(0{,}0{,}0)$. Havaitsija lähestyy rengasta z-akselin suuntaisesti nopeudella v ja mittaa sähkökenttää etäisyydellä r akselista. Voit olettaa, että $v \ll c$ ja $r \ll R$.

i) *(2 pistettä)* Määritä magneettikentän suunta ja suuruus $B(z)$ z-akselilla renkaan lepokoordinaatistossa.

ii) *(4 pistettä)* Arvioi havaitsijan mittaaman sähkökentän $E(r,z)$ suuruus ja suunta, kun hän on etäisyydellä z origosta.

9. SOLENOIDIT (8 pistettä) *(S. Ainsaar).* Tiheästi kääritty jäykkä solenoidi eli kela on osittain toisen solenoidin sisällä. Molemmat solenoidit on kytketty tasavirtalähteeseen siten, että molemmissa kulkee yhtä suuri virta I – täten molemmat tuottavat samansuuntaisen magneettikentän. Molemmissa solenoideissa on N kierrosta, niiden pituus on l, niiden pinta-alat ovat A_1 ja A_2. Voit olettaa, että $A_1 \& A_2 \ll l^2$. Sinulle saattaa olla hyötyä siitä tiedosta, että magneettikentän voimakkuus yksittäisen solenoidin keskipisteessä on $B = \mu_0 IN/l$, missä μ_0 on tyhjiön permeabiliteetti.

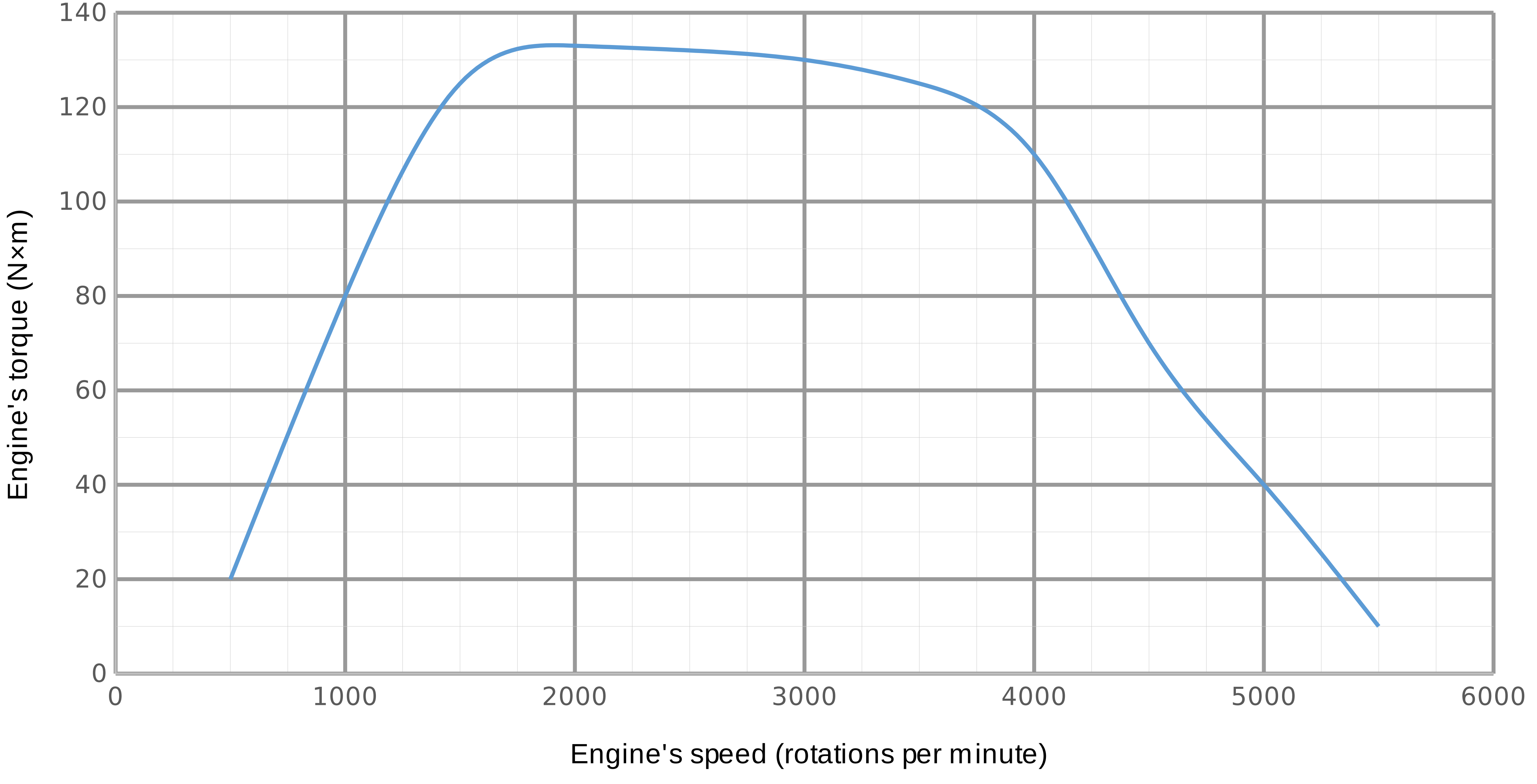
i) *(2 pistettä)* Solenoidien yhteisellä keskiakselilla sijaitsevien keskipisteiden välinen etäisyys on $x < l$ $[A_1, A_2 \ll (x-l)^2, x^2]$. Määritä järjestelmän magneettikentän kokonaisenergia E_m.

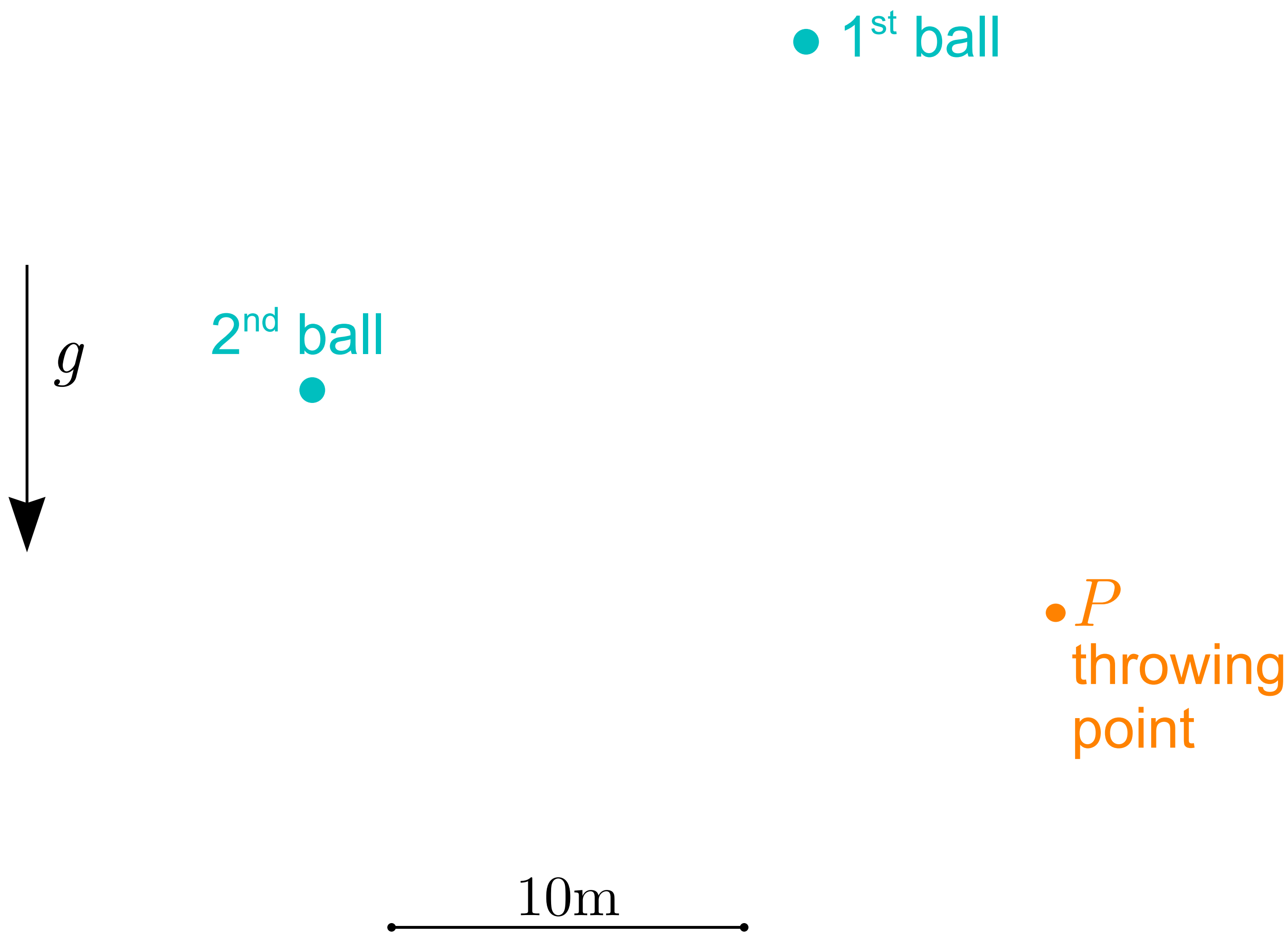
ii) *(4 pistettä)* Määritä solenoideihin indusoituvat jännitteet $\mathscr{E}_1$ ja $\mathscr{E}_2$, kun solenoidit vedetään erilleen nopeudella v.

iii) *(2 pistettä)* Määritä voima F, joka tarvitaan toisen solenoidin vetämiseksi ulospäin.

10. HÖYRYNPAINE (8 pistettä) *(J. Kalda, M. Heidelberg, E. Uustalu)* Määritä lääkeruiskussa olevan tuntemattoman nesteen kylläinen höyrynpaine huoneenlämpötilassa. Pullon tilavuus on $V = 0{,}50\,\ell$ ja muoviletkun halkaisija on $d = 6{,}0\,\mathrm{mm}$. Ilman paine p_0 ja huoneen lämpötila T_0 on kirjoitettu taululle. Koska höyryn poistaminen pullosta on hidasta, onnistunutta mittausta ei tarvitse tehdä uudestaan. Arvioi tuloksen epävarmuutta.

Välineet: Lääkeruiskullinen tuntematonta nestettä, lääkeruiskullinen vettä, pullo, joustava muoviletku, viivain, tulppa, statiivi, teippi.


140
120
100
80
60
40
20
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
Engine's torque (N×m)
Engine's speed (rotations per minute)


1st ball
2nd ball
g
P
throwing point
10m