Funktsioonide taastamine Shannoni üldistatud valimridadega

Andi Kivinukk

Tallinna Ülikool

EMS, Tartu, 16.04.2008

Shannoni valimridade konstruktsioon põhineb sinc-funktsioonil:

$$\text{sinc}(x) := \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

Whittaker-Kotelnikov-Shannon'i valimrida on defineeritud kujul

$$(S_W^{\text{sinc}} f)(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\frac{k}{W}) \,\text{sinc}(Wt - k) \quad (W > 0)$$

See klassikaline valimrida on defineeritud üldiselt ainult nn eksponentsiaalse kasvuga lõpliku kandjaga Fourier' teisendusega funktsioonide (signaalianalüüsis nimetatakse piiratud ribaga signaalideks) jaoks. Valimread ei ole matemaatilise statistika mõiste, aga idee sama, sest osalise info $f(\frac{k}{W}), (k \in \mathbb{Z}, W > 0)$ põhjal tahetakse taastada kogu funktsiooni f. Ing.k. on *sampling series*, varem kasutati terminit "kardinaalread" (*cardinal series*).

P.L.Butzer ja tema koolkond (Aacheni Tehnikaülikool) käsitlesid üldisemaid valimridu pidevate funktsioonide $f \in C(\mathbb{R})$ jaoks kujul ($t \in \mathbb{R}$; $W > 0$)

$$(S_W f)(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\frac{k}{W}) s(Wt - k)$$

Ettekandjate panus siia on, et me uurisime erinevate tuumafunktsioonidega $s = s(t)$ defineeritud valimridu, kusjuures need tuumafunktsioonid on defineeritud nn aknafunktsioonide Fourier' teisendustega.

Def. *Aknafunktsioon:* $\lambda \in C(\mathbb{R})$, *$\lambda$-paarisfunktsioon,* $\lambda(u) = 0$, *(*$|u| \geqslant 1$*),* $\lambda(0) = 1$. Tuumafunktsioon s on defineeritud aknafunktsiooni λ abil:

$$s(t) := \int_0^1 \lambda(u)\cos(\pi u t)du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda^\wedge(\pi t).$$

Paljud tuumafunktsioonid on defineeritud signaalianalüüsis või pildinduses tuntud aknafunktsioonide kaudu :
① $\lambda(u) = 1$ defineerib sinc-funktsiooni,
② $\lambda_j(u) = \cos\pi(j + 1/2)u$, $j = 0, 1, \ldots$ defineerib Rogosinski-tüüpi tuuma,
③ $\lambda_{H,m}(u) = \cos^m \frac{\pi u}{2}$ defineerib Hann-tüüpi tuuma
④ $\lambda_{B,\mathbf{a}}(u) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos(k\pi u)$ defineerib Blackman-Harris'e e. üldise koosinus-tuuma . Valimoperaator $S_W : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ on interpoleeriv, kui

$$(S_W f)(\frac{k}{W}) = f(\frac{k}{W}) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Shannoni klassikaline valimoperaator on interpoleeriv, kuna sinc(k) = 0 ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) ja sinc(0) = 1, aga sinc-funktsioon ei sobi kõikide pidevate funktsioonide jaoks ruumist $C(\mathbb{R})$. Seepärast üldine funktsiooni taastamise ülesanne uurib koonduvuse

$$\|f - S_W f\|_C \to 0 \quad (W \to \infty)$$

kiirust, mida sagedasti iseloomustatakse pidevus(siledus)mooduli abil. Tüüpiline näide on järgmine väide Blackmann-Harrise valimoperaatorite $B_{W,a}f$ kohta.

Teoreem. *Leidub konstant* $M_a > 0$ ($a \in \mathbb{R}$)*, et iga* $f \in C(\mathbb{R})$ *ja* $W > 0$ *korral*

$$\|f - B_{W,a}f\|_C \leqslant M_a \omega_2(f, \frac{1}{W}).$$

Ettekandes puudutatakse ka valimridade rakendusi pildinduses ja tomograafias. Shannoni valimridade üldine teooria on näiteks (TÜ raamatukogus leiduvas) monograafias J. R. Higgins, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1996.