Eksam ainest Rakendusliku loogika süvakursus 27.5.2004 kl 9.00.
Lahendused

1. Valemi tõestus sekventsiarvutuses:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q, p \to r, p}\ Id \quad \dfrac{}{q, p \to r, q}\ Id}{q, p \to r, p \wedge q}\ \wedge R \quad \dfrac{}{q, r, p \to r}\ Id}{q, p \wedge q \supset r, p \to r}\ \supset L}{q, \neg r, p \wedge q \supset r, p \to}\ \neg L}{q, q \supset \neg r, p \wedge q \supset r, p \to}\ \supset L \quad \dfrac{}{q \supset \neg r, p \wedge q \supset r, p \to p}\ Id}{p \supset q, q \supset \neg r, p \wedge q \supset r, p \to}\ \supset L$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \supset q, q \supset \neg r, p \wedge q \supset r, p \to}{p \supset q, q \supset \neg r, p \wedge q \supset r \to \neg p}\ \neg R}{(p \supset q) \wedge (q \supset \neg r) \wedge (p \wedge q \supset r) \to \neg p}\ \wedge L}{\to (p \supset q) \wedge (q \supset \neg r) \wedge (p \wedge q \supset r) \supset \neg p}\ \supset R$$

2. Valemi teisendus klauselkujule:

$$\begin{aligned}
&(\neg(p \wedge q) \vee r \equiv \neg t) \wedge (p \vee r) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad (\neg(p \wedge q) \vee r \supset \neg t) \wedge (\neg t \supset \neg(p \wedge q) \vee r) \wedge (p \vee r) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad (\neg(\neg(p \wedge q) \vee r) \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee r) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad ((p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee r) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad (p \vee \neg t) \wedge (q \vee \neg t) \wedge (\neg r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee r)
\end{aligned}$$

3. Valemi eituse teisendus klauselkujule:

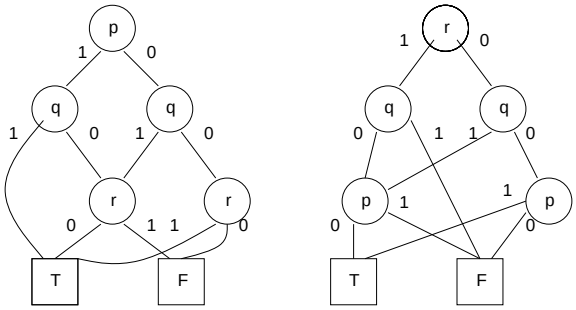
$$\begin{aligned}
&\neg((\neg r \supset ((\neg q \vee r) \supset (p \wedge \neg q \wedge \neg r))) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \neg(\neg r \supset ((\neg q \vee r) \supset (p \wedge \neg q \wedge \neg r))) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \neg r \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \neg r \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)
\end{aligned}$$

Klauslid: $\neg r$, $\neg q \vee r$, $\neg p \vee q \vee r$, $p \vee q \vee r$.

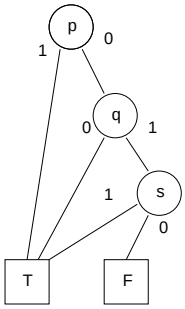
Vastolu tuletus resolutsiooniarvutuses:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vee q \vee r \quad \neg p \vee q \vee r}{q \vee r} \quad \neg q \vee r}{r} \quad \neg r}{\bot}$$

4.



5.



6. (a) Ei ole. (b) Vaja on min kaks elementi, nt võtta a ja b ning võtta $I(p)(a) = I(q)(a) = 1$, $I(p)(b) = I(q)(b) = 0$.

7. Situatsiooni kirjeldus:

   - Vähemalt üks pokemon jäi püsti: $\neg p \vee \neg bu \vee \neg t \vee \neg s \vee \neg v \vee \neg o$
   - Ülimalt üks pokemon jäi püsti: $p \vee bu$, $p \vee t$, $p \vee s$, $p \vee v$, $p \vee o$, $bu \vee t$, $bu \vee s$, $\ldots$
   - Kes mispuhul oleks võitnud: $\neg p \supset a$, $\neg bu \supset a$, $\neg t \supset m$, $\neg s \supset m$, $\neg v \supset br$, $\neg o \supset br$
   - Vihjed: $o \supset s, b$, $p \supset \neg a$, $bu \supset \neg br$, $v \supset t \wedge o$

8. Valemi tõestus sekventsiarvutuses:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(f(c)), \ldots \to \ldots, q(c), p(f(c))}\,Id}{\ldots \to \neg p(f(c)), \ldots, q(c), p(f(c))}\,\neg R}{\ldots \to \exists y \neg p(y), q(c), p(f(c))}\,\exists R \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(g(c)), \ldots \to \ldots, q(c), p(g(c))}\,Id}{\ldots \to \neg p(g(c)), \ldots, q(c), p(g(c))}\,\neg R}{\ldots \to \exists y \neg p(y), q(c), p(g(c))}\,\exists R}{\ldots \to \exists y \neg p(y), q(c), p(f(c)) \wedge p(g(c))}\,\wedge R \quad \dfrac{}{q(c)), \ldots \to \exists y \neg p(y), q(c)}\,Id}{p(f(c)) \wedge p(g(c)) \supset q(c)), \ldots \to \exists y \neg p(y), q(c)}\,\supset L}{\forall x(p(f(x)) \wedge p(g(x)) \supset q(x)) \to \exists y \neg p(y), q(c)}\,\forall L}{\forall x(p(f(x)) \wedge p(g(x)) \supset q(x)), \neg q(c) \to \exists y \neg p(y)}\,\neg L}{\forall x(p(f(x)) \wedge p(g(x)) \supset q(x)) \wedge \neg q(c) \to \exists y \neg p(y)}\,\wedge L}{\to \forall x(p(f(x)) \wedge p(g(x)) \supset q(x)) \wedge \neg q(c) \supset \exists y \neg p(y)}\,\supset R$$

9. Valemi teisendus klauselkujule:

$$\begin{aligned}
&\exists x \mathrm{dragon}(x) \supset \neg \forall y(\mathrm{animal}(y) \supset \neg \mathrm{eats}(y, \mathrm{grizzly})) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \neg \exists x \mathrm{dragon}(x) \vee \neg \forall y(\mathrm{animal}(y) \supset \neg \mathrm{eats}(y, \mathrm{grizzly})) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \neg \mathrm{dragon}(x) \vee \exists y \neg(\mathrm{animal}(y) \supset \neg \mathrm{eats}(y, \mathrm{grizzly})) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \neg \mathrm{dragon}(x) \vee \exists y(\mathrm{animal}(y) \wedge \mathrm{eats}(y, \mathrm{grizzly})) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \exists y[\neg \mathrm{dragon}(x) \vee (\mathrm{animal}(y) \wedge \mathrm{eats}(y, \mathrm{grizzly}))] \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \exists y[(\neg \mathrm{dragon}(x) \vee \mathrm{animal}(y)) \wedge (\neg \mathrm{dragon}(x) \vee \mathrm{eats}(y, \mathrm{grizzly}))] \\
&\overset{\text{sat}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x[(\neg \mathrm{dragon}(x) \vee \mathrm{animal}(f(x))) \wedge (\neg \mathrm{dragon}(x) \vee \mathrm{eats}(f(x), \mathrm{grizzly}))]
\end{aligned}$$

10. Vastuolu tuletus:

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{meep}(y) \vee \mathrm{blat}(y) \qquad \dfrac{\mathrm{woggle}(y) \quad \neg \mathrm{woggle}(x) \vee \mathrm{foo}(x, y) \vee \mathrm{meep}(x)}{\mathrm{foo}(x, y) \vee \mathrm{meep}(x)} \qquad \neg \mathrm{foo}(x, \mathrm{zot}) \vee \neg \mathrm{blat}(x)}{\mathrm{meep}(y) \vee \neg \mathrm{blat}(x)}}{\mathrm{meep}(x)} \qquad \neg \mathrm{meep}(\mathrm{zot})}{\bot}$$

11. (a) Tõestada, et valemist $\forall x \forall y(r(x,y) \supset \neg r(y,x))$ järeldub $\forall x \neg r(x,x)$.

    Klauslid resolutsiooniks: $\neg r(x,y) \vee \neg r(y,x)$, $r(c,c)$.

    Vastuolu tuletus:

$$\dfrac{\dfrac{r(c,c) \quad \neg r(x,y) \vee \neg r(y,x)}{\neg r(c,c)} \qquad r(c,c)}{\bot}$$

    (b) Tõestada, et valemitest $\forall x \neg r(x,x)$ ja $\forall x \forall y \forall z(r(x,y) \wedge r(y,z) \supset r(x,z)$ järeldub valem $\forall x \forall y(r(x,y) \supset \neg r(y,x))$.

    Klauslid resolutsiooniks: $\neg r(x,x)$, $\neg r(x,y) \vee \neg r(y,z) \vee r(x,z)$, $r(c,d)$, $r(d,c)$.

    Vastuolu tuletus:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{r(c,d) \quad \neg r(x,y) \vee \neg r(y,z) \vee r(x,z)}{\neg r(d,z) \vee r(c,z)} \qquad r(d,c)}{r(c,c)} \qquad \neg r(x,x)}{\bot}$$

12. Tõestada, et valemitest $\forall x(t(x) \doteq \text{abbot} \supset g(x))$, $t(\text{john}) \doteq t(\text{mary})$, $t(\text{mary}) \doteq \text{abbot}$, järeldub valem $g(\text{john})$.

    Klauslid resolutsiooniks:

$$\begin{array}{l} \neg t(x) \doteq \text{abbot} \vee g(x) \\ t(\text{john}) \doteq t(\text{mary}) \\ t(\text{mary}) \doteq \text{abbot} \\ \neg g(\text{john}) \end{array}$$

    Vastuolu tuletus:

$$\dfrac{\dfrac{t(\text{mary}) \doteq \text{abbot} \qquad \dfrac{t(\text{john}) \doteq t(\text{mary}) \qquad \dfrac{\neg t(x) \doteq \text{abbot} \vee g(x) \quad \neg g(\text{john})}{\neg t(\text{john}) \doteq \text{abbot}}\ para}{\neg t(\text{mary}) \doteq \text{abbot}}}{\bot}$$