KURSUSE PRAKTILINE KORRALDUS

- Tunniplaan: neljapäevad 9.00–11.30 loeng 2 h + harjutus/praktikum 1 h.
- Teadmiste kontroll: kodutööd ja kirjalik eksam.
- Õppematerjal: Otsene õpik puudub, peamiselt õppejõu slaidid. Täiendavat lugemist olemas nii eesti kui ka inglise, vene k.

  Loengutel/harjutustel/praktikumidel osalemine vajalik!
- Õppejõud: dots T Uustalu, `tarmo@cs.ioc.ee`, 620 4250.

  Konsultatsioonid semestri vältel eelneval kokkuleppel emailitsi.
- Veebilk info ja materjalidega tekib aadressile `www.cs.ioc.ee/~tarmo/aal04/`.

KURSUSE SISU

- Loogika rakendustega tehisintellektis ja arvutiteaduses, rõhuasetusega automatiseeritavate protseduuride, s.o teoreemitõestamise, mudeliehitamise, mudelikontrolli, algoritmidel ja andmestruktuuridel.
- Lauseloogika, predikaatloogika, võrdusega predikaatloogika, sekventsiarvutused, tabeli- ja resolutsioonimeetodid.
- Modaalloogikatest: kirjeldusloogikad ning müü-arvutus.

LAUSELOOGIKA

- Lauseloogika on lihtsaim loogiline süsteem. Keeles on ainult üks süntaktiline kategooria: laused. Need on moodustatud kindla tähenduseta lausesümbolitest lihtsate loogiliste tehete, nn. konnektiivide (vrd. loomuliku keele sidesõnad) abil.

LAUSELOOGIKA: SÜNTAKS

- Lauseloogika (propositional logic) *signatuur* on mingi tähestik $\mathrm{PC} = \{p, q, \ldots\}$, mille sümboleid nimetatakse lausesümboliteks (proposition symbols).
- Lauseloogilised *valemid* (formulae) (üle selle signatuuri) on hulk väljendeid ehk keel Fma, mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
  - kõik lausesümbolid on valemid (nn atomaarvalemid, atomic formulae);
  - $\top$ (verum, tõde), $\bot$ (falsum, väärus) on valemid;
  - kui A on valem, siis $\neg A$ (mitte-A) on samuti valem;
  - kui A, B on valemid, siis $A \wedge B$ (A ja B), $A \vee B$ (A või B), $A \supset B$ (kui A, siis B e A implitseerib B) on ka valemid.
- Sümboleid $\top$, $\bot$, $\neg$ (eitus, negation), $\wedge$ (konjunktsioon), $\vee$ (disjunktsioon), $\supset$ (implikatsioon) kutsutakse loogilisteks konnektiivideks.

  ($\top$, $\bot$ on 0-kohalised, $\neg$ 1-kohaline, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ 2-kohalised.)

- Näiteid:
  - $p \vee \neg p$, $p \supset q \wedge \neg r$ on valemid
    (kokkuleppeliselt seob $\supset$ nõrgemini kui $\wedge$, $\vee$ ja need omakorda nõrgemini kui $\neg$, st viimane valem on konkreetsüntaks valemile $p \supset (q \wedge \neg r)$);
  - kui A, B on valem ja p on lausesümbol, siis $A[B/p]$ (väljend, mis saadakse p kõigi A-s esinemiste (occurrences) asendamisel B-ga) on ka valem.
- Tähelepanek: Valemite hulk üle signatuuri on defineeritud induktiivselt.

  Järeldus: kui kõigil lausesümbolitel kui valemitel on mingi omadus P ning kui iga konnektiivi rakendamisel omadust P evivatele valemitele saadakse valem, millel taas on omadus P, siis on kõigil valemitel omadus P.

  Iga valem on kas atomaarne või mingi konnektiivi rakendus teistele valemitele (veel enam, selline analüüs on alati unikaalne).

  Ühtegi valemit ei saa dekomponeerida lõputult (tema moodustamispuu on fundeeritud).

- Valemi *alamvalem* (subformula) on temas alamväljendina esinev valem. (Kuidas defineerida see mõiste matemaatiliselt?)
- Näide: Valemi $p \supset q \vee (\neg q \wedge r)$ alamvalemid on tema ise, p, $q \vee (\neg q \wedge r)$, $\neg q \wedge r$, $\neg q$, q ja r, kusjuures kõik peale q esinevad 1 kord, q aga 2 korda.
- Igas valemis on nii palju alamvalemite esinemisi kui temas on lausesümbolite ja loogiliste konnektiivide esinemisi. (Miks?)

LAUSELOOGIKA: SEMANTIKA

- Olgu $\mathrm{PC} = \{p, q, \ldots\}$ fikseeritud lauseloogiline signatuur, st lausesümbolite tähestik.
- *Interpretatsioon* on siis suvaline funktsioon $I : \mathrm{PC} \to \{1, 0\}$ ehk tõeväärtuse (truth value) 1 (tõene, true) või 0 (väär, false) omistus igale lausesümbolile.
- Lausearvutuse valemite *väärtustus* (valuation) interpretatsioonis I on funktsioon $[\![\cdot]\!]^I : \mathrm{Fma} \to \{1, 0\}$, mis on defineeritud induktsiooniga järgmiselt:
  - $[\![p]\!]^I = I(p)$, kui p on lausesümbol;
  - $[\![\top]\!]^I = 1$, $[\![\bot]\!]^I = 0$;
  - $[\![\neg A]\!]^I = 1 - [\![A]\!]^I$;
  - $[\![A \wedge B]\!]^I = \min([\![A]\!]^I, [\![B]\!]^I)$;
  - $[\![A \vee B]\!]^I = \max([\![A]\!]^I, [\![B]\!]^I)$;
  - $[\![A \supset B]\!]^I = \max(1 - [\![A]\!]^I, [\![B]\!]^I)$.

- Öeldakse, et I *kehtestab* (satisfies) A, A *kehtib* (holds) I-s, A on I-s tõene ehk I on A *mudel* (tähistus $I \models A$), kui $[\![A]\!]^I = 1$;

  I *väärab* (falsifies) A, A on I-s väär ehk I on A *kontramudel* (countermodel) (tähistus $I \not\models A$), kui $[\![A]\!]^I = 0$.

- Näeme, et iga I korral
  - $I \models p$ parajasti siis, kui $I(p) = 1$, kui p on lausesümbol;
  - $I \models \top$ alati; $I \models \bot$ mitte kunagi;
  - $I \models \neg A$ parajasti siis, kui $I \not\models A$;
  - $I \models A \wedge B$ parajasti siis, kui $I \models A$ ja $I \models B$;
  - $I \models A \vee B$ parajasti siis, kui $I \models A$ või $I \models B$;
  - $I \models A \supset B$ parajasti siis, kui $I \not\models A$ või $I \models B$.

- Öeldakse, et A on *üldkehtiv* (valid), *tautoloogiline* ehk *loogiliselt tõene* (tähistus $\models A$), kui A kehtib igas interpretatsioonis;

  A on *kehtestamatu* (unsatisfiable), *vastuoluline* (contradictory) ehk *loogiliselt väär*, kui ta ei kehti üheski interpretatsioonis.

  A on *kehtestatav* (satisfiable), kui A kehtib mõnes interpretatsioonis;

  A on *vääratav* (falsifiable) (tähistus $\not\models A$), kui ta mõnes interpretatsioonis ei kehti.

- A on tautoloogia parajasti siis, kui $\neg A$ on vastuolu; A on vastuolu parajasti siis, kui $\neg A$ on tautoloogia;

  A on kehtestatav parajasti siis, kui $\neg A$ on vääratav; A on vääratav parajasti siis, kui $\neg A$ on kehtestatav.

- Valemite hulga Γ kohta öeldakse, et ta *tingib* (entails) valemi B või et B on Γ *loogiline järeldus* (logical consequence) (tähistus $\Gamma \models B$), kui iga interpretatsiooni I korral, $I \models A$ ($A \in \Gamma$) implitseerib $I \models B$.
- $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$ parajasti siis, kui $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$.
- $\emptyset \models B$ parajasti siis, kui $\models B$ (ehk loogiline järelduvus tühjast valemite hulgast on sama, mis loogiline tõesus).

- Valemid A, B on *loogiliselt ekvivalentsed* (tähistus $A \Leftrightarrow B$), kui iga interpretatsiooni I korral $I \models A$ parajasti siis, kui $I \models B$.
- $A \Leftrightarrow B$ parajasti siis, kui $\models A \equiv B$ (ehk loogiline ekvivalents on sama, mis ekvivalentsi loogiline tõesus).

  [Siin $A \equiv B$ (A parajasti siis, kui B, A B-ga samaväärne) pole ametlik süntaks, vaid lühendab valemit $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$.]
- Loogiline ekvivalents on ekvivalentsiseos: ta on refleksiivne ($A \Leftrightarrow A$), sümmeetriline (kui $A \Leftrightarrow B$, siis $B \Leftrightarrow A$) ning transitiivne (kui $A \Leftrightarrow B$ ja $B \Leftrightarrow C$, siis $A \Leftrightarrow C$).

- Olulisi tautoloogiaid lauseloogikas:

$$\top$$

$$\bot \supset A$$

$$A \vee \neg A$$

$$A \supset A$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \equiv A \vee A$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$A \equiv \neg\neg A$$

$$A \supset (B \supset A)$$

$$A \supset A \vee B$$

$$A \wedge B \supset C \equiv A \supset (B \supset C)$$

$$((A \supset B) \supset A) \supset A$$

- Ekvivalentsete asendamise omadus: Kui $B \Leftrightarrow C$, siis $A[B/p] \Leftrightarrow A[C/p]$.
- Näide: Kuna $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, siis $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow (B \wedge A) \wedge C$. Et pealegi $(B \wedge A) \wedge C \Leftrightarrow B \wedge (A \wedge C)$, siis transitiivsuse põhjal $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow B \wedge (A \wedge C)$.
- Instantsieerimise omadus: Kui $\models A$, siis $A[B/p]$.

- Probleemi teha kindlaks, kas etteantud valem on üldkehtiv või kehtestatav nimetatakse *üldkehtivus*- resp. *kehtestatavuskontrolliks* (validity checking, satisfiability checking) (tähistused TAUT, SAT).

- Meenutagem, et jah/ei probleemi nimetatakse *lahenduvaks*, kui leidub algoritm, mis iga sisendi korral peatub ja vastab korrektselt kas jah või ei.

  Jah/ei probleemi nimetatakse *poollahenduvaks* (semidecidable), kui leidub algoritm, mis jah-vastust vääriva sisendi korral peatub ja vastab jah, ei-vastust vääriva sisendi korral peatub ja vastab ei või ei peatu.

- Lauseloogika puhul on lihtne näha, et TAUT ja SAT on lahenduvad. Valemi A väärtustust interpretatsioonis I mõjutavad I väärtused ainult nende lausesümbolitel, mis A-s vähemalt 1 kord esinevad. Neid ei saa olla rohkem kui sümbolite koguarv A-s. Järelikult piisab max 2^n juhu läbivaatamisest, kus $n = |A|$; seda kutsutakse tõeväärtustabelite meetodiks.

NORMAALKUJUD

- *Literaal* on p või $\neg p$, kus p on lausesümbol.
- *Elementaardisjunktsioon* on $l_1 \vee \ldots \vee l_n$, kus $\{l_1, \ldots, l_n\}$ on lõplik hulk literaale.
- *Elementaarkonjunktsioon* on $l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$, kus $\{l_1, \ldots, l_n\}$ on lõplik hulk literaale.
- *Konjunktiivne normaalkuju* on $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$, kus $\{c_1, \ldots, c_m\}$ on lõplik hulk elementaardisjunktsioone.
- *Disjunktiivne normaalkuju* on $c_1 \vee \ldots \vee c_m$, kus $\{c_1, \ldots, c_m\}$ on lõplik hulk elementaarkonjunktsioone.

- Valemi teisendamine konjunktiivsele või disjunktiivsele normaalkujule (annab esialgse valemiga loogiliselt ekvivalentse valemi):
  - implikatsioonid ära, kasutades $A \supset B \Leftrightarrow \neg A \vee B$,
  - eitused sisse ning kahekordsed eitused ära, kasutades $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$, $\neg\neg A \Leftrightarrow A$,
  - disjunktsioonid või konjunktsioonid sisse, kasutades $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ja $A \vee \top \Leftrightarrow \top$ või $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ja $A \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$.
- Saadud kuju võib veel optimeerida kasutades absorptsioone $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ ja $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, välistatud kolmanda seadust $A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$ ja vastuolu seadust $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \bot$ ning ühikute seadusi $A \wedge \top \Leftrightarrow A$, $A \vee \bot \Leftrightarrow A$.