

## LAUSELOOGIKA: SEKVENTSIARVUTUS

(Gentzen)

- Sekventsiarvutus on tuletussüsteem, kus tuletatavateks objektideks on *sekventsid*, ehk figuurid kujul  $\Gamma \rightarrow \Delta$ , kus nii  $\Gamma$  kui ka  $\Delta$  on lõplikud (võibolla tühjad) hulgad valemid, mida kutsutakse vastavalt sekventsi *antetsedendiks* ja *suktsedendiks*. Kuna antetsedent ja suktsedent on hulgad, siis valemite kordsus ega järjekord nendes ei loe.
- (Sekventsi  $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$  võib sisuliselt samastada valemiga  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset B_1 \vee \dots \vee B_m$ . Seejuures 0 valemi konjunktsioon on  $\top$  ja 0 valemi disjunktsioon on  $\perp$ .)
- Valem  $A$  on *tõestatav* (tähistus  $\vdash A$ ), kui on tuletatav sekvents  $\rightarrow A$ . Valem  $A$  on *ümberlükatav* (tähistus  $\nvdash A$ ), kui on tuletatav sekvents  $A \rightarrow$ .
- Aksiomiskeemid ja reeglid: üks aksiomiskeem ja iga konnektiivi kohta vasaku (L) ja parema (R) poole reeglid (selle konnektiivi sissetoomiseks vastaval poolel).

- Aksiomiskeemid ja tuletusreeglid (tagasisuunalisele otsimisele orienteeritud versioon sekventsiarvutusest):

$$\begin{array}{c}
 \overline{\Gamma, A \rightarrow A, \Delta} \text{ id.} \\
 \overline{\Gamma \rightarrow \top, \Delta} \top\mathcal{R} \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \wedge B, \Delta} \wedge\mathcal{R} \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \vee B, \Delta} \vee\mathcal{R} \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Delta} \supset\mathcal{R} \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \neg A, \Delta} \neg\mathcal{R} \\
 \frac{}{\Gamma, \perp \rightarrow \Delta} \perp\mathcal{L} \\
 \frac{\Gamma, A, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \rightarrow \Delta} \wedge\mathcal{L} \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \rightarrow \Delta} \vee\mathcal{L} \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta \quad \Gamma, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \supset B \rightarrow \Delta} \supset\mathcal{L} \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \rightarrow \Delta} \neg\mathcal{L}
 \end{array}$$

- Sekventsiarvutus on korrektne: Kui sekvents  $A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$  on tõestatav, siis valem  $A_1 \wedge \dots \wedge A_m \supset B_1 \vee \dots \vee B_n$  on üldkehtiv.
- Sekventsiarvutus on ka täielik: Kui valem  $A_1 \wedge \dots \wedge A_m \supset B_1 \vee \dots \vee B_n$  on üldkehtiv, siis sekvents  $A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$  on tõestatav.

## KODUÜLESANDED

1. Tõesta sekventsiarvutuses järgmised valemid;

$$(A \supset B) \wedge (A \wedge B \supset C) \supset (A \supset C)$$

$$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$$

$$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$$

2. Kasutades sekventsiarvutust leia konjunktiivne normaalkuju ja kontramudelid / disjunktiivne normaalkuju ja mudelid järgmistele valemitele:

$$(p \supset r) \wedge (q \supset s) \supset (p \vee q \supset r)$$

$$(p \supset q) \wedge (q \supset \neg r) \supset \neg p$$

3. Pane ette korrektsed L ja R reeglid  $\oplus$  (välistava või) jaoks.



$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{A \rightarrow A, B} \text{ id} \quad \overline{B, A \rightarrow B} \text{ id}}{\overline{A \supset B, A \rightarrow B} \supset L} \\
\frac{\overline{A \supset B, \neg B, A \rightarrow} \neg L}{\overline{A \supset B, \neg B \rightarrow \neg A} \neg R} \\
\frac{\overline{A \supset B \rightarrow \neg B \supset \neg A} \supset R}{\rightarrow (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A) \supset R}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{B \supset C, A \rightarrow A, C} \text{ id} \quad \overline{C, B \supset C, A \rightarrow C} \text{ id}}{\overline{A \supset C, B \supset C, A \rightarrow C} \supset L} \quad \frac{\overline{A \supset C, B \rightarrow B, C} \text{ id} \quad \overline{A \supset C, C, B \rightarrow C} \text{ id}}{\overline{A \supset C, B \supset C, B \rightarrow C} \supset L} \\
\frac{\overline{A \supset C, B \supset C, A \vee B \rightarrow C} \supset R}{\overline{A \supset C, B \supset C \rightarrow A \vee B \supset C} \supset R} \\
\frac{\overline{A \supset C \rightarrow (B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)} \supset R}{\rightarrow (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)) \supset R}
\end{array}$$