LAUSELOOGIKA: SEMANTILISED TABELID (SEMANTIC TABLEAUX)

- Semantilised tabelid on suhteliselt efektiivne meetod etteantud valemi A kehtestatavuse [vääratavuse] kindlakstegemiseks, mis positiivse tulemuse korral pealegi annab ka mudeli [resp kontramudeli].
- Idee on süstemaatiliselt otsida mudelit [resp kontramudelit] lähtudes tarvilikest ja piisavatest tingimustest, et mingi liitvalem oleks tõene või väär.

  Need tingimused on:

  – $I \models \neg A$ parajasti siis, kui $I \not\models A$,
  $I \not\models \neg A$ parajasti siis, kui $I \models A$,

  – $I \models \top$ alati,
  $I \not\models \top$ mitte kunagi,

  – $I \models \bot$ mitte kunagi,
  $I \not\models \bot$ alati,

  – $I \models A \land B$ parajasti siis, kui $I \models A$ ja $I \models B$,
  $I \not\models A \land B$ parajasti siis, kui $I \not\models A$ või $I \not\models B$,

  – $I \models A \lor B$ parajasti siis, kui $I \models A$ või $I \models B$,
  $I \not\models A \lor B$ parajasti siis, kui $I \not\models A$ ja $I \not\models B$,

  – $I \models A \supset B$ parajasti siis, kui $I \not\models A$ või $I \models B$,
  $I \not\models A \supset B$ parajasti siis, kui $I \models A$ ja $I \not\models B$.

- Samuti kasutatakse asjaolu, et iga atomaarvalem on igas interpretatsioonis kas tõene või väär (ei saa olla mitte kumbki ega mõlemad).
- Töötatakse *märgiga valemitega* (signed formulae), millisteks on $\mathbf{T}A$, $\mathbf{F}A$, kus A on tavaline, märgita valem.

  $\mathbf{T}A$ tähendab sama, mis $A \equiv \top$ ehk A; $\mathbf{F}A$ tähendab sama, mis $A \equiv \bot$ ehk $\neg A$.

  (On võimalik ka märgita valemitega esitus, kuid märgiga valemitel on teatud eeliseid.)

- Algoritm:
  - Avame üheharulise tabeli (tableau) ja kirjutame sinna märgiga valemi $\mathbf{T}A$ või $\mathbf{F}A$, kus A on valem, mille kehtestatavust resp vääratavust tahame kontrollida.
  - Seni kuni tabelis on lõpetamata harusid, teeme järgmist.
    - ∗ Valime lõpetamata haru.
    - ∗ Kui harus pole enam märgiga liitvalemeid, mida selles harus poleks töödeldud, siis kontrollime kas harus esinevate märgiga atomaarvalemite seas on mõni vastandpaar $\{\mathbf{T}p, \mathbf{F}p\}$. Kui jah, siis lõpetame haru ja märgime ta '$\times$' (kinnine). Kui ei, siis lõpetame haru ja märgime ta '$\bigcirc$' (lahtine).
    - ∗ Kui harus on veel mõni märgiga liitvalem, mida selles pole töödeldud, siis valime ühe neist ning täiendame haru vastavalt valitud märgitud valemile järgnevalt:
      - · kui see on $\mathbf{T}\top$ või $\mathbf{F}\bot$, siis ei tee midagi;
      - · kui see on $\mathbf{F}\top$ või $\mathbf{T}\bot$, siis sulgeme haru ja märgime ta '$\times$';
      - · kui see on $\mathbf{T}\neg A$ või $\mathbf{F}\neg A$, siis lisame harusse $\mathbf{F}A$ resp $\mathbf{T}A$;

- · kui see on α, kus α on $\mathbf{T}(A \wedge B)$, $\mathbf{F}(A \vee B)$ või $\mathbf{F}(A \supset B)$, siis lisame harusse α_1 ja α_2, kus α_1, α_2 on antud tabeliga

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(A \wedge B)$	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{T}B$
$\mathbf{F}(A \vee B)$	$\mathbf{F}A$	$\mathbf{F}B$
$\mathbf{F}(A \supset B)$	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{F}B$

- · kui see on β, kus β on $\mathbf{F}(A \wedge B)$, $\mathbf{T}(A \vee B)$ või $\mathbf{T}(A \supset B)$, siis jagame haru kaheks ning lisame ühte alamharusse β_1 ning teise β_2, kus β_1, β_2 on antud tabeliga

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(A \wedge B)$	$\mathbf{F}A$	$\mathbf{F}B$
$\mathbf{T}(A \vee B)$	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{T}B$
$\mathbf{T}(A \supset B)$	$\mathbf{F}A$	$\mathbf{T}B$

- Tulemusena saame lõpetatud tabeli. Lõpetatud tabelit nimetatakse kinniseks, kui tema kõik harud on kinnised. Kui mõni haru on lahtine, loetakse tabelit lahtiseks.
- Kirjeldatud algoritm lahendab kehtestatavuse ja üldkehtivuse probleemi: osutub, et tabeli ehitamine $\mathbf{T}A$ [$\mathbf{F}A$] jaoks lõpeb alati ning ehitatud lõpetatud tabel on kinnine parajasti siis, kui A on kehtestamatu [resp üldkehtiv].
- Lahtine on $\mathbf{T}A$ [$\mathbf{F}A$] jaoks ehitatud lõpetatud tabel parajasti siis, kui A on kehtestatav [resp vääratav]. Sel juhul saab lahtisest harust välja lugeda mudeli [resp kontramudeli] I: iga selles harus esineva märgiga atomaarvalemi $\mathbf{T}p$ jaoks tuleb valid $I(p) = 1$, iga märgiga valemi $\mathbf{F}p$ jaoks tuleb valida $I(p) = 0$; kui mingi p ei esine kummagi märgiga, siis on ükskõik, kuidas $I(p)$ määrata.

  (Ükski atomaarvalem ei saa lahtises harus esineda mõlema märgiga, seega ülemääratuse tekkimine pole võimalik.)

- Näide: $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ on kehtestamatu:

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{T}((p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)) \\
\mathbf{T}(p \vee q) \\
\mathbf{T}(\neg p \wedge \neg q) \\
\mathbf{T}\neg p \\
\mathbf{T}\neg q \\
\mathbf{F}p \\
\mathbf{F}q \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\quad \mathbf{T}p \quad & \quad \mathbf{T}q \quad \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

- Näide: $p \wedge (\neg q \vee \neg p)$ on kehtestatav, kusjuures mudeliks on iga selline I, et $I(p) = 1$, $I(q) = 0$.

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{T}(p \wedge (\neg q \vee \neg p)) \\
\mathbf{T}p \\
\mathbf{T}(\neg q \vee \neg p) \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\mathbf{T}\neg q & \mathbf{T}\neg p \\
\mathbf{F}q & \mathbf{F}p \\
\bigcirc & \times
\end{array}
\end{array}
$$

- Näide: $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ on üldkehtiv.

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{F}((p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))) \\
\mathbf{T}(p \supset (q \supset r)) \\
\mathbf{F}((p \supset q) \supset (p \supset r)) \\
\mathbf{T}(p \supset q) \\
\mathbf{F}(p \supset r) \\
\mathbf{T}p \\
\mathbf{F}r \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} \mathbf{F}p \\ \times \end{array} &
\begin{array}{c}
\mathbf{T}(q \supset r) \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} \mathbf{F}p \\ \times \end{array} &
\begin{array}{c}
\mathbf{T}q \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\mathbf{F}q & \mathbf{T}r \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

- Algoritmi lõpetavuse tõestamine on lihtne (kuidas seda teha?).
- Väljastatavate tulemuste õigsuse küsimus on jagatav kaheks, korrektuseks (soundness) ja täielikkuseks (completeness):

  Korrektsus: Kui $\mathbf{T}A$ [$\mathbf{F}A$] jaoks ehitatud lõpetatud tabel on kinnine, siis A on kehtestamatu [resp üldkehtiv].

  Tõestus: Eeldades, et mingi I kehtestab [resp väärab] A, saab tuletada vastuolu.

  Täielikkus: Kui A on kehtestamatu [üldkehtiv], siis $\mathbf{T}A$ [resp $\mathbf{F}A$] jaoks ehitatud lõpetatud tabel on kinnine.

  Ehk: Kui $\mathbf{T}A$ [$\mathbf{F}A$] jaoks ehitatud lõpetatud tabel on lahtine, siis A jaoks leidub mudel [resp kontramudel].

  Tõestus: Lahtise haru pealt eelkirjeldatud viisil välja loetav interpretatsioon I osutub tõepoolest mudeliks [resp kontramudeliks].

LAUSELOOGIKA: HILBERTI SÜSTEEM

- Hilberti süsteemid on klass *tõestussüsteeme* (proof systems).
- Tõestussüsteemid on vahendid semantiliste üldkehtivuse ja loogilise järelduvuse argumentide formaalseks esitamiseks.

  Tõestussüsteemi põhiülesanne on loogilise või matemaatilise keele kõigi valemite hulgast eraldada välja teatud alamhulk—teoreemid. Teoreemideks loetakse need valemid, mida kindlatest lähtevalemitest ehk aksioomidest kindlaid tuletusreegleid (inference rules) lõplik arv kordi rakendades on võimalik tuletada.

  Taotlus on, et valem oleks teoreem parajasti siis, kui ta on üldkehtiv.
- Hilberti süsteemid: võimalikult vähe tuletusreegleid, aksioome (õieti aksioomiskeeme) võib olla palju.

- Lauseloogika Hilberti süsteem (üks mitmetest võimalikest):
  - Aksioomid (õieti aksioomiskeemid):

$$A \supset (B \supset A)$$
$$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$
$$(A \supset \neg B) \supset ((A \supset B) \supset \neg A)$$
$$\neg\neg A \supset A$$
$$\top$$
$$\bot \supset C$$
$$A \supset (B \supset A \wedge B)$$
$$A \wedge B \supset A$$
$$A \wedge B \supset B$$
$$A \supset A \vee B$$
$$B \supset A \vee B$$
$$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$$

  - Üks tuletusreegel:

$$\frac{A \quad A \supset B}{B} \qquad \text{(modus ponens)}$$

- Valemi A *tõestused* (proofs) on hulk valemipuid, mis on defineeritud induktiivselt järgmiselt:
  - kui A on aksioom, siis A (kui ühetipuline valemipuu) on A tõestus;
  - kui $A_1, \ldots, A_n$ ja B moodustavad tuletusreegli rakenduse ning $\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\A_1\end{array}, \ldots \begin{array}{c}\mathcal{D}_n\\A_n\end{array}$ on valemite $A_1, \ldots, A_n$ tõestused, siis $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\A_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_n\\A_n\end{array}}{B}$ on valemi B tõestus.
- Valem A on *tõestatav* (provable) ehk *teoreem* (tähistus $\vdash A$), kui A-le leidub tõestus.

- Valemi A *tuletused* (derivations) valemite hulgast Γ on hulk valemipuid, mis on defineeritud induktiivselt järgmiselt:
  - kui $A \in \Gamma$, siis A (kui ühetipuline valemipuu) on A tuletus Γ-st;
  - kui A on aksioom, siis A (kui ühetipuline valemipuu) on A tuletus Γ-st;
  - kui $A_1, \ldots, A_n$ ja B moodustavad tuletusreegli rakenduse ning $\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A_1\end{matrix}, \ldots \begin{matrix}\mathcal{D}_n\\ A_n\end{matrix}$ on valemite $A_1, \ldots, A_n$ tõestused, siis $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_n\\ A_1 & \ldots & A_n\end{matrix}}{B}$ on valemi B tuletus Γ-st.
- Valem A on valemite hulgast Γ *tuletatav* (derivable) ehk tema *järeldus* (consequence) (tähistus $\Gamma \vdash A$), kui A-le leidub tuletus Γ-st.
- $\emptyset \vdash A$ parajasti siis, kui $\vdash A$ (ehk A on tühjast valemite hulgast tuletatav parajasti siis, kui ta on tõestatav).

- Osutub, et toodud Hilberti süsteem on lauseloogika jaoks perfektne tõestussüsteem: korrektne ja täielik (tõestusi me siinkohal ei too).

  Korrektsus: Kui $\vdash A$, siis $\models A$. (Veel enam, kui $\Gamma \vdash A$, siis $\Gamma \models A$.)

  Täielikkus: Kui $\models A$, siis $\vdash A$. (Veel enam, kui $\Gamma \models A$, siis $\Gamma \vdash A$.)

- Näide: Valem $p \supset p$ on tõestatav.

$$\dfrac{p \supset (p \supset p) \qquad \dfrac{p \supset ((p \supset p) \supset p) \qquad \begin{matrix}(p \supset ((p \supset p) \supset p))\\ \supset ((p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p))\end{matrix}}{(p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p)}}{p \supset p}$$

- Deduktsiooniteoreem: Kui $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, siis $\Gamma \vdash A \supset B$.

  (Paneme tähele, et vastupidine kehtib ka, aga triviaalselt.)

- Tõestus. Induktsiooniga B tuletuse järgi $(\Gamma \cup \{A\})$-st.
  - Kui B tuletus $(\Gamma \cup \{A\})$-st on ühetipuline puu B, siis $B \in \Gamma$, $B = A$ või B on aksioom. Kui $B = A$, siis $\Gamma \vdash A \supset B$ meie vastse tähelepaneku põhjal, et $\vdash A \supset A$. Kui $B \in \Gamma$ või B on aksioom, siis on $A \supset B$ Γ-st tuletatav järgmiselt:

$$\frac{B \quad B \supset (A \supset B)}{A \supset B}$$

  - Vastasel korral on B tuletusel $(\Gamma \cup \{A\})$-st kuju

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ C \supset B\end{array}}{B}$$

ning induktsiooni eelduse põhjal on siis $A \supset C$ ja $A \supset (C \supset B)$ Γ-st tuletatavad. Sel juhul $A \supset B$ Γ-st tuletatav järgmiselt:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \supset C\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \supset (C \supset B)\end{array} \quad (A \supset (C \supset B)) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B))}{(A \supset C) \supset (A \supset B)}}{A \supset B}$$