

**LAUSELOOGIKA: LOOMULIK TULETUS**

- Tuletusreeglid:

$$\begin{array}{c}
 \neg \\
 \hline
 \neg \mathcal{I}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 - \\
 \hline
 \frac{\perp}{C} \perp \mathcal{E}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 - \\
 \hline
 \frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge \mathcal{I}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 - \\
 \hline
 \frac{A \wedge B}{A} \wedge \mathcal{E}_1 \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge \mathcal{E}_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 A \\
 \vdots \\
 \frac{A}{A \vee B} \vee \mathcal{I}_1 \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee \mathcal{I}_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 A \quad B \\
 \vdots \quad \vdots \\
 \frac{A \vee B \quad C \quad C}{C} \vee \mathcal{E}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 A \\
 \vdots \\
 \frac{B}{A \supset B} \supset \mathcal{I}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 A \supset B \quad A \\
 \hline
 B \supset \mathcal{E}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 A \\
 \vdots \\
 \frac{\perp}{\neg A} \neg \mathcal{I}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \neg A \quad A \\
 \hline
 \perp \neg \mathcal{E}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 A \quad \neg A \\
 \vdots \quad \vdots \\
 \frac{C \quad C}{C} \text{dil.}
 \end{array}$$

Alternatiivse viimasele reeglile:

$$\text{LEM} \quad \frac{}{A \vee \neg A}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \neg A \\
 \vdots \\
 \frac{\perp}{A} \text{RAA}
 \end{array}
 \qquad
 \frac{\neg \neg A}{A} \text{DNR}$$

### LOOMULIKU TULETUSE SEKVENTSIESITUS

(ei ole samastatav sekventsiarvutusega, milleni veel jõuame)

- Idee: muuta arvepidamine parajasti kasutada olevate eelduste üle ilmutatuks.
- Tõestatavateks/tuletatavateks objektideks pole mitte valemid, vaid nn sekventsid, so figuurid kujul  $\Gamma \rightarrow A$ , kus  $\Gamma$  on lõplik (võibolla tühi) hulk valemiteid (NB! hulk, mitte list või multihulk, st järjestus, kordsus ei loe) ning  $A$  on valem.
- (Hulkade kirjutamiseks kasutame lihtsustatud süntaksit:  $A_1, \dots, A_n$  tähistab hulka  $\{A_1, \dots, A_n\}$ ;  $\Gamma, A$  tähistab hulka  $\Gamma \cup \{A\}$ .)
- $\Gamma \rightarrow A$  tõestatavus on sama, mis  $A$  tuletatavus  $\Gamma$ -st loomuliku tuletuse varemantud esituses.
- Valem  $A$  loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents  $\rightarrow A$ .
- (Sekventsi  $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$  võib samastada valemiga  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$ ; 0 valemite konjunktsioon on  $\top$ .)

3

- Aksiomiskeemid ja tuletusreeglid:  
(Paneme tähele, et eeldustega (assumptions) reegleid enam pole.)

$$\begin{array}{c}
 \overline{\Gamma \rightarrow \top} \quad \top\mathcal{I} \\
 \\
 \overline{\Gamma, A \rightarrow A} \quad \text{ass.} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \wedge B} \wedge\mathcal{I} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \vee\mathcal{I}_1 \quad \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \vee\mathcal{I}_2 \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \supset\mathcal{I} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow \neg A} \neg\mathcal{I} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \wedge B}{\Gamma \rightarrow A} \wedge\mathcal{E}_1 \quad \frac{\Gamma \rightarrow A \wedge B}{\Gamma \rightarrow B} \wedge\mathcal{E}_2 \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \vee B \quad \Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, B \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C} \vee\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \supset B \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow B} \supset\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow \neg A \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow \perp} \neg\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, \neg A \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C} \text{dil.}
 \end{array}$$

4