PREDIKAATLOOGIKA: SEMANTILISED TABELID

- Nagu lauseloogika puhul, aga täiendused kvantorite jaoks.
- Kui harus töötluseks märgitud valem on γ, kus γ on $\mathbf{T}(\forall x.\ A)$ või $\mathbf{F}(\exists x.\ A)$, siis lisame harusse valemid $\gamma(t)$, kus $\gamma(t)$ on antud tabeliga

γ	$\gamma(t)$
$\mathbf{T}(\forall x.\ A)$	$\mathbf{T}A[t/x]$
$\mathbf{F}(\exists x.\ A)$	$\mathbf{F}A[t/x]$

  ning jätame γ ka edaspidi valitavaks.
- Kui harus töötluseks märgitud valem on δ, kus δ on $\mathbf{F}(\forall x.\ A)$ või $\mathbf{T}(\exists x.\ A)$, siis lisame harusse valemid $\delta(y)$, kus y on varem kasutamata muutuja ja $\delta(y)$ on antud tabeliga

δ	$\delta(y)$
$\mathbf{F}(\forall x.\ A)$	$\mathbf{F}A[y/x]$
$\mathbf{T}(\exists x.\ A)$	$\mathbf{T}A[y/x]$

PREDIKAATLOOGIKA: VALEMI KLAUSELKUJU

- *Literaalid* on atomaarvalemid ja nende eitused.

  Näited: $p(x)$, $\neg q(c, f(y))$.
- Kvantoriteta valem on *konjunktiivsel normaalkujul*, kui tal on kuju $\bigwedge_{i=1..n} \bigvee_{j=1..m_i} L_{ij}$, kus iga L_{ij} on literaal.

  Näide: $(p(x) \vee \neg q(c, f(y))) \wedge \neg r(g(x, z))$.
- Valem on *prenekssel konjuktiivsel normaalkujul*, kui ta on kujul $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n A$, kus iga Q_i'd on $\forall$ või $\exists$ ja A on kvantoriteta konjunktiivsel normaalkujul valem.

  Kvantorite järgnevust nimetatakse *prefiksiks*, valemit A nimetatakse *maatriksiks*.

  Näide: $\forall x.\ \exists y. \forall z.\ ((p(x) \vee \neg q(c, f(y))) \wedge \neg r(g(x, z)))$.

- Valem on *klauselkujul*, kui ta on prenekssel konjuntkiivsel normaalkujul ning ta prefiks koosneb ainult üldsuskvantoritest.

  Näide: $\forall z.\ ([p(f(z)) \vee \neg p(g(z)) \vee q(z)] \wedge [\neg q(z) \vee \neg p(g(z)) \vee q(z)])$.

  Kuna kvantorid on ainult välisel tasemel ja üldised, siis võib nad ka ära jätta. Alternatiivne kirjaviis: klauslite hulk.

  Näide: $\{p(f(z)) \vee \neg p(g(z)) \vee q(z), \neg q(z) \vee \neg p(g(z)) \vee q(z)\}$.

- Teoreem (Skolem): Kui A on kinnine (st. vabade muutujateta) valem üle mingi signatuuri, siis leidub klauselkujul olev valem A' üle mõne funktsioonikonstandi võrra laiendatud signatuuri nii, et $A \approx A'$ (st. A on kehtestatav parajasti siis, kui A' on).

  Konstruktsioon: A viiakse loogiliselt ekvivalentsele preneksele konjunktiivsele normaalkujule A'', millest edasi nn. skolemiseerimise abil saadakse klauselkuju A'.

- Prenekssel kujul oleva valemi skolemiseerimine: iga eksistentsikvantor $\exists x$ eemaldatakse ning x esinemised asendatakse nn. skolemi termiga $f(y_1, \ldots, y_n)$, kus f on uus funktsioonikonstant ning $y_1, \ldots, y_n$ on kõigi antud eksistentsikvantorile prefiksis eelnevate üldsuskvantorite seotud muutujate loetelu.

  Näide: Valem $\forall x.\ \exists y.\ \exists z.\ \forall w.\ \exists v.\ M$ teisendatakse valemiks $\forall x.\ \forall w.\ M[f(x)/y, g(x)/z, h(x,w)/v]$, kus f, g, h on uued funktsioonikonstandid.

- Näide teisendamisest: Viime klauselkujule valemi

$$\forall x.\ (p(x) \supset q(x)) \supset (\forall x.\ p(x) \supset \forall x.\ q(x))$$

  - Nimetame ümber seotud muutujad:

$$\forall x.\ (p(x) \supset q(x)) \supset (\forall y.\ p(y) \supset \forall z.\ q(z))$$

  - Kõrvaldame implikatsioonid:

$$\neg\forall x.\ (\neg p(x) \lor q(x)) \lor \neg\forall y.\ p(y) \lor \forall z.\ q(z)$$

  - Surume eitused sisse:

$$\exists x.\ (p(x) \land \neg q(x)) \lor \exists y.\ \neg p(y) \lor \forall z.\ q(z)$$

WAI 3720 Loogika arvutiteaduses Sügis 2002 / Tarmo Uustalu Loeng 7

  - Toome kvantorid välja (alustades välimistest, selles näites ei tule see selgelt välja, meil pole üks teise all asuvaid kvantoreid):

$$\exists x.\ \exists y.\ \forall z.\ ((p(x) \land \neg q(x)) \lor \neg p(y) \lor q(z))$$

  - Viime maatriksi jaotuvusseadusi (de Morgani seadusi) kasutades konjunktiivsele normaalkujule:

$$\exists x.\ \exists y.\ \forall z.\ (((p(x) \lor \neg p(y) \lor q(z)) \land (\neg q(x) \lor p(y) \lor q(z)))$$

  - Eemaldame eksistentsikvantorid asendades nende seotud muutujad skolemi termidega:

$$\forall z.\ (((p(a) \lor \neg p(b) \lor q(z)) \land (\neg q(a) \lor p(b) \lor q(z)))$$

- Teine näide samast: Viime klauselkujule valemi $\exists x.\ \forall y.\ p(x,y) \supset \forall y.\ \exists x.\ p(x,y)$.
  - Nimetame ümber seotud muutujad:

$$\exists x.\ \forall y.\ p(x,y) \supset \forall w.\ \exists z.\ p(z,w)$$

  - Eemaldame implikatsioonid ning surume eitused sisse:

$$\forall x.\ \exists y.\ \neg p(x,y) \lor \forall w.\ \exists z.\ p(z,w)$$

  - Toome kvantorid välja:

$$\forall x.\ \exists y.\ \forall w.\ \exists z.\ (\neg p(x,y) \lor p(z,w))$$

  - Skolemiseerime:

$$\forall x.\ \forall w.\ (\neg p(x,f(x)) \lor p(g(x,w),w))$$

- Miks see töötab?
- Kui $M = (D,I)$ ja α kehtestavad valemi $\forall y_1.\ \ldots \forall y_n.\ \exists x.\ A$, siis valemi $\forall y_1.\ \ldots \forall y_n.\ A[f(y_1,\ldots,y_n)/x]$ kehtestavad $M' = (D,I')$ ja α, kus

$$I'(g) = \begin{cases} F & \text{kui } g = f \\ I(g) & \text{muidu} \end{cases}$$

ning

$$F(d_1,\ldots d_n) = \text{mingi } d\text{, nii et } M \models A\,[\alpha\{d_1/y_1,\ldots d_n/y_n, d/x\}]$$