UNIFITSEERIMINE

- *Substitutsioon* on funktsioon $\sigma : \mathrm{Var} \to \mathrm{Tm}$, s.o., termide omistus muutujatele.
- Substitutsioonid on laiendatavad termidele. Kui σ on substitutsioon, siis tema rakendus $(-)\sigma : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tm}$ on defineeritud järgmiselt:
  - $x\sigma = \sigma(x)$, kui x on muutuja,
  - $c\sigma = c$, kui c on indiviidkonstant,
  - $[f(t_1, \ldots t_n)]\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$, kui f on funktsioonikonstant.
- Näide. Kui $\sigma(x) = f(x, y)$, $\sigma(y) = h(a)$, $\sigma(z) = g(c, h(x))$, siis $[j(k(x), y)]\sigma = j(k(f(x, y)), h(a))$.
- Substitutsioonide σ, τ kompositsiooni all (enne σ, siis τ) peame silmas peame silmas sellist substitutsiooni $\sigma\tau$, et $(\sigma\tau)(x) = [x\sigma]\tau$ iga muutuja x korral.
- Lihtne on näha, et iga termi t korral $t(\sigma\tau) = [t\sigma]\tau$.
- Substitutsioonide kompositsioon on assotsiatiivne: $(\sigma\tau)\theta = \sigma(\tau\theta)$.

- Substitutsiooni σ *tugihulgaks* nimetame nende muutujate x hulka, mille korral $\sigma(x) \neq x$ (nende muutujate hulk, mille substitutsioon millegi erinevaga asendab).
- Kui kahel substitutsioonil σ, τ on lõplik tugi, siis on lõplik tugi ka nende kompositsioonil σ, τ.
- Kui substitutsioonil σ on lõplik tugi, ütleme $\{x_1, \ldots, x_n\}$, kusjuures $\sigma(x_i) = t_i$, siis tähistatakse teda sageli $[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$. Identsussubstitutsiooni tähis selles vaimus on [] (tugi on tühi hulk, iga muutuja asendatakse iseendaga).
- Kui $\sigma = [t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$, $\tau = [u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m]$, siis

  $$\sigma\tau = [t_1\tau/x_1, \ldots, t_n\tau/x_n, z_1\tau/z_1, \ldots z_k\tau/z_k]$$

  kus $z_1, \ldots, z_k$ on need muutujad nimekirjast $y_1, \ldots, y_m$, mis nimekirjas $x_1, \ldots, x_n$ ei esine.
- Näide: Kui $\sigma = [f(x, y)/x, h(a)/y, g(c, h(x))/z]$ ja $[b/x, g(a, x)/y, z/w]$, siis $\sigma\tau = [f(b, g(a, x))/x, h(a)/y, g(c, h(b))/z, z/w]$.

- Substitutsioon τ on substitutsioonist σ *üldisem*, kui leidub substitutsioon θ nii, et $\sigma = \tau\theta$.
- Näide: Substitutsioonidest $\sigma = [f(g(a, h(z)))/x, g(h(x), b)/y, h(x)/z]$, $\tau = [f(g(x, y))/x, g(z, b)/y]$ on τ üldisem kui σ, sest $\sigma = \tau\theta$, kus $\theta = [a/x, h(z)/y, h(x)/z]$.
- Kui τ on üldisem kui σ ja θ on üldisem kui τ, siis θ on üldisem kui σ.
- Kui τ on üldisem kui σ ja σ on üldisem kui τ, siis σ ja τ on muutujate ümbernimetamise täpsuseni samad.

WAI 3720 Loogika arvutiteaduses Sügis 2002 / Tarmo Uustalu Loeng 8

- Substitutsioon on kahe termi t_1 ja t_2 *unifikaator*, kui $t_1\sigma = t_2\sigma$. Termid t_1 ja t_2 on *unifitseeritavad*, kui neile leidub *unifikaator*.
- Substitutsioon σ on t_1 ja t_2 *kõige üldisem unifikaator* (most general unifier, mgu), kui σ on t_1 ja t_2 unifikaator ja üldisem kui iga teine.
- Kui kaks termi t_1 ja t_2 on unifitseeritavad, siis neile leidub muutujate ümbernimetamise täpsuseni üheselt määratud kõige üldisem unifikaator.
- Näide: Termid $f(y, h(a))$ ja $f(h(x), h(z))$ on unifitseeritavad substitutsiooniga $[h(x)/y, a/z]$. Substitutsioon $[k(w)/x, h(k(w))/y, a/z]$ unifitseerib samuti, aga esimene substitutsioon on üldisem, tegelikult kõige üldisem. Termid $f(x, x)$, $f(a, b)$ ei ole unifitseeritavad. (Miks? Sest x tuleks asendada nii a kui ka b-ga.)

- Kahe termi unifitseerimiseks, täpsemalt nende kõige üldisema unifikaatori leidmiseks on mitmeid algoritme. A. Robinsoni originaalalgoritm kasutas ebakõlapaari (disagreement pair) mõistet.
- Kahe termi t_1 ja t_2 ebakõlapaariks on d_1 ja d_2, kus d_1 ja d_2 on vastavalt t_1 ja t_2 alamtermid, nii et termidest puudena mõeldes on d_1 ja d_2 juured märgendatud erinevate sümbolitega, aga teed vastavalt t_1 ja t_2 juurtest kuni nendeni märgendatud samade sümbolitega.
- Näide: Termide $f(g(a,x),h(c,j(y,x)))$ ja $f(g(a,x),h(c,k(z)))$ juures moodustavad alamtermid $j(y,x)$ ja $k(z)$ ebakõlapaari.
- Kui kaks termi erinevad, peab nende vahel olema üks või enam ebakõlapaari. Kui substitutsioon σ unifitseerib termid t_1 ja t_2, peab ta unifitseerima iga nende ebakõlapaari.

- Robinsoni unifitseerimisalgoritm:
  - Olgu $\sigma := []$.
  - Niikaua kui $t_1\sigma \neq t_2\sigma$ teeme järgmist:
    - valime t_1, t_2 mingi ebakõlapaari d_1, d_2,
    - kui kumbki termidest d_1, d_2 pole muutuja, siis ebaõnnestume,
    - olgu x ükskõik kumb termidest d_1, d_2 on muutuja (kui mõlemad on muutujad, siis suvaline nendest) ja olgu t teine nendest,
    - kui x esineb t-s, siis ebaõnnestume,
    - olgu $\sigma := \sigma[t/x]$.
  - σ on t_1 ja t_2 kõige üldisem unifikaator.

RESOLUTSIOON

- Resolutsioon on populaarne meetod klauselkujul olevate valemite kehtestamatuses veendumiseks. Resolutsioon on arutlus- ja arvutusmehhanismiks ka keeles Prolog, kus piirdutakse ainult teatavakujuliste klauslitega (Horni klauslid, max 1 positiivne literaal klauslis).
- Tuletame meelde, et literaal (literal) on atomaarvalem või selle eitus (positiivsed ja negatiivsed literaalid) ning klausel ehk elementaardisjunktsioon (clause, elementary disjunction) on literaalide lõplik disjunktsioon. Meenutame ka, et tühi disjunktsioon on $\perp$ (falsum).

  Resolutsiooni kasutades saab kontrollida, kas hulk klausleid (ehk siis—samaväärselt—klauslite lõplik konjuktsioon, kui tegu on lõpliku hulgaga) on kehtestamatu ehk vastuoluline.
- Idee: Lihtsat tõestussüsteemi (üksainus reegel) kasutades tuletatakse etteantud klauslitest ilmselgelt kehtestamatu klausel $\perp$.

- Resolutsioonireegel:

  $$\frac{C \vee \neg A \quad D \vee A'}{(C \vee D)\sigma}$$

  kus $\sigma = \mathrm{mgu}(A, A')$.

  (C, D klauslid, A, A' aatomid.)
- Terminoloogiat: Kui A, A' on unifitseeruvad, nimetatakse $C \vee \neg A$, $D \vee A'$ konfliktseteks klausliteks ning $(C \vee D)\sigma$, kus $\sigma = \mathrm{mgu}(A, A')$, nende resolvendiks.
- Kuna iga klauslit mõistetakse eraldi üldsuskvantifitseeritult, siis enne resolutsioonireegli rakendamist kahele klauslile tuleb nendes esinevad muutujad lahku ümber nimetada. Seda kutsutakse lahkustandardiseerimiseks (standardization apart).
- Näide reeglirakendusest: Klauslites $p(f(x), g(y) \vee q(x, y)$ ja $\neg p(f(f(a)), g(z)) \vee r(f(a), g(z))$ atomaarvalemite $p(f(x), g(y))$ ja $p(f(f(a)), g(z))$ mgu on $[f(a)/x, z/y]$ ning resolvendiks on $q(f(a), z) \vee r(f(a), g(z))$.

- Näide resolutsiooni kasutusest (puhtlauseloogiline): Klauslid p, $\neg p \vee q$, $\neg r$, $\neg p \vee \neg q \vee r$ on samaaegselt kehtestamatud, sest nendest saab tuletada $\bot$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg r \quad \neg p \vee \neg q \vee r}{\neg p \vee \neg q} \quad \neg p \vee q}{\neg p} \quad p}{\bot}$$

- Teine näide (predikaatloogiline, unifitseerimine oluline): Klauslid 1-7 all on samaaegselt kehtestamatud, sest nendest tuletub $\bot$. (Tõestus on esitatud loetelu-formaadis.)

1. $\neg p(x) \vee q(x) \vee r(x, f(x))$
2. $\neg p(x) \vee q(x) \vee s(f(x))$
3. $t(a)$
4. $p(a)$
5. $\neg r(a, y) \vee t(y)$
6. $\neg t(x) \vee \neg q(x)$
7. $\neg t(x) \vee \neg s(x)$

8.	$\neg q(a)$	$[a/x]$	$3, 6$
9.	$q(a) \vee s(f(a))$	$[a/x]$	$2, 4$
10.	$s(f(a))$		$8, 9$
11.	$q(a) \vee r(a, f(a))$	$[a/x]$	$1, 4$
12.	$r(a, f(a))$		$8, 11$
13.	$t(f(a))$	$[f(a)/y]$	$5, 12$
14.	$\neg s(f(a))$	$[f(a)/x]$	$7, 13$
15.	$\perp$		$10, 14$