PROLOG

- Prolog on tüüpiline loogika rakendus programmeerimises, kus mingit valitud loogikat kasutakse programeerimiskeelena. Prologi ja loogilise programmeerimise korral üldiselt on ideeks, et valem või sekvents (sõltub, kuidas vaadata) on programm, täpsemini programmirakendus, ning tõestuse otsimine on arvutamine.
- Prologi korral on loogikaks predikaatloogika Horni klauslite fragment (selles fragmendis klassikaline ja intuitsionistlik loogika ei eristu).
- *Horni klauslid* on klauslid (elementaardisjunktsioonid), kus on ülimalt üks positiivne literaal.
- Klauslid, milles on täpselt üks positiivne literaal, üldkujuga $p \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_n$, on Prologi jaoks *programmiklauslid* [program clauses] (*faktid*, kui $n = 0$, ja *reeglid* [rules], kui $n > 0$), Prologi notatsioon on $p \leftarrow q_1, \ldots, q_n$ ($\leftarrow$ asemel kirjutatakse ka `:-`).
- Klauslid, milles pole ühtegi positiivset literaali, üldkujuga $\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_n$, on Prologi jaoks *eesmärgid* [goals], Prologi notatsioon on $\leftarrow q_1, \ldots, q_n$ ($\leftarrow$ asemel kirjutatakse ka `?-`).

- Prologi korral ei olda loomulikult huvitatud ainult vastusest, kas etteantud klauslite komplekt, täpsemalt lõplik hulk programmiklausleid ning üks algne eesmärk, nn *päring* [query], on vastuoluline või mitte, vaid tahetakse vastolu korral saada ka mingit informatsiooni.
- Selliseks informatsiooniks on substitutsioon, mille rakendamisel programmiklauslitele ja päringutele moodustub vastuolu juba ilma unifitseerimiseta.

  Täpsemalt ollakse huvitatud *vastussubstitutsioonist*, s.o eelnimetatud substitutsiooni kitsendusest päringus esinevatele muutujatele.

  (Peame meeles, et enne resolveerimist nimetatakse resolveeritavad klauslite muutujad alati lahku.)

- Prologi puhul on piisav (täielikkus säilib), kui lubada ainult nn lineaarset resolutsiooni. Puu on siis peamiselt üks pikk haru eesmärkidest, igal sammul resolveeritatkse jooksev eesmärk mingi programmiklausliga. Alustatakse algeesmärgist ehk päringust. Lõppvalemiks peab loomulikult olema $\perp$.

  Vastussubstitutsioon arvutatakse tuletuse sammudel rakendatavate substitutsioonide kompositsioonina.

- Näide: Vaatleme järgmist programmirakendust. Programm (programmiklauslid) on:

$$\begin{array}{ll} P1. & q(x,y) \leftarrow p(x,y) \\ P2. & q(x,y) \leftarrow p(x,z), q(z,y) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} P3. & p(b,a) & P4. & p(c,a) \\ P5. & p(d,b) & P6. & p(e,b) \\ P7. & p(f,d) & P8. & p(h,g) \\ P9. & p(i,h) & P10. & p(j,h) \end{array}$$

  Päring on $\leftarrow q(y,b), q(b,z)$.

- Tuletus.

$$\begin{array}{llll} G1. & \leftarrow q(y,b), q(b,z) & & \\ G2. & \leftarrow p(y,b), q(b,z) & & G1, P1 \\ G3. & \leftarrow q(b,z) & [d/y] & G2, P5 \\ G4. & \leftarrow p(b,z) & & G3, P1 \\ G5. & \perp & [a/z] & G4, P3 \end{array}$$

  Arvutatud vastussubstitutsioon on $[d/y, a/z]$.

MODAALLOOGIKA

- Modaalloogikad on üks standardloogikatest (klassikaline lause- ja predikaatloogika) hälbivaid loogikasüsteemide liike.

  Modaalloogikate eritunnuseks on täiendavad loogilised konstandid, nn modaalsed operaatorid ehk modaalsused, paratamatus ja võimalikkus.

  Modaalsustega saab laiendada nii lauseloogikat kui ka predikaatloogikat. Meie piirdume modaliseeritud lauseloogikaga.
- Algus filosoofilises loogikas. Tänasel päeval kasutatakse modaalloogikaid arvutiteaduses laialdaselt olulise töövahendina süsteemide spetsifitseerimisel ja verifitseerimisel, samuti arutlemises agentsüsteemide üle intellektitehnikas.
- Üks ühine süntaks, mille jaoks on mitmeid semantikaid. St pole üht ja ainsat modaallogikat, vaid lai modaalloogikate spekter, mida ühendab sama süntaks.

MODAALLOOGIKAD: SÜNTAKS

- Lauseloogiline signatuur on tähestik $\mathrm{PC} = \{p, q, \ldots\}$, mille sümboleid nimetatakse lausesümboliteks (lausekonstantideks).
- (Lause-)modaalloogika valemid (üle selle signatuuri) on hulk väljendeid Fma, mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
  - kõik lausesümbolid on valemid (nn atomaarvalemid);
  - $\top$, $\bot$ on valemid;
  - kui A on valem, siis $\neg A$ on samuti valem;
  - kui A, B on valemid, siis $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$ on ka valemid;
  - kui A on valem, siis $\Box A$ (paratamatu, et A), $\Diamond A$ (võimalik, et A) on ka valemid.
- Sümboleid $\Box$ (paratamatus), $\Diamond$ (võimalikkus) nimetatakse modaalseteks operaatoriteks ehk modaalsusteks.

NORMAALSED MODAALLOOGIKAD: SEMANTIKA

- (Nn normaalsete modaalloogikate semantika põhineb Kripke raamidel ja struktuuridel. On olemas ka minimaalsed modaalloogikad, mille semantika põhineb naabrusraamidel ja -struktuuridel.)
- *Kripke* ehk *relatsiooniline raam* on paar $F = (W, R)$, kus W on mittetühi hulk, mille elemente nimetatakse *(võimalikeks) maailmadeks* (possible worlds) ning R on binaarne seos sellel, mida nimetatakse *saavutatavuse seoseks* [accessibility relation].
- Olgu $\mathrm{PC} = \{p, q, \ldots\}$ fikseeritud lauseloogiline signatuur, st lausesümbolite tähestik. Siis *Kripke* ehk *relatsiooniline struktuur* selle signatuuri jaoks on kolmik $M = (W, R, I)$, kus (W, R) on raam ning I on *interpretatsiooniks* nimetatav funktsioon $\mathrm{PC} \times W \to \{1, 0\}$ ehk tõeväärtuse omistus igale lausesümbolile igas maailmas.

- Lausemodaalloogiliste valemite *väärtustus* etteantud struktuuris $M = (W, R, I)$ on funktsioon $[\![\cdot]\!]^{M,\cdot} : \mathrm{Fma} \times W \to \{1, 0\}$, mis on defineeritud induktsiooniga järgmiselt:
  - $[\![p]\!]^{M,w} = I(w, p)$, kui p on lausesümbol;
  - $[\![\top]\!]^{M,w} = 1$, $[\![\bot]\!]^{M,w} = 0$;
  - $[\![\neg A]\!]^{M,w} = 1 - [\![A]\!]^{M,w}$;
  - $[\![A \wedge B]\!]^{M,w} = \min([\![A]\!]^{M,w}, [\![B]\!]^{M,w})$;
  - $[\![A \vee B]\!]^{M,w} = \max([\![A]\!]^{M,w}, [\![B]\!]^{M,w})$;
  - $[\![A \supset B]\!]^{M,w} = \max(1 - [\![A]\!]^{M,w}, [\![B]\!]^{M,w})$;
  - $[\![\Box A]\!]^{M,w} = \min_{w' \in W, wRw'}([\![A]\!]^{M,w'})$;
  - $[\![\Diamond A]\!]^{M,w} = \max_{w' \in W, wRw'}([\![A]\!]^{M,w'})$.
- Valem A loetakse struktuuri M maailmas w tõeseks (tähis $M \models A\,[w]$, kui $[\![A]\!]^{M,w} = 1$.

- On lihtne näha, et iga M korral
  - $M \models p\,[w]$ parajasti siis, kui $I(p, w) = 1$, kui p on lausesümbol;
  - $M \models \top\,[w]$ alati; $M \models \bot\,[w]$ mitte kunagi;
  - $M \models \neg A\,[w]$ parajasti siis, kui $M \not\models A\,[w]$;
  - $M \models A \wedge B\,[w]$ parajasti siis, kui $M \models A\,[w]$ ja $M \models B\,[w]$;
  - $M \models A \vee B\,[w]$ parajasti siis, kui $M \models A\,[w]$ või $M \models B\,[w]$;
  - $M \models A \supset B\,[w]$ parajasti siis, kui $M \not\models A\,[w]$ või $M \models B\,[w]$;
  - $M \models \Box A\,[w]$ parajasti siis, kui iga $w' \in W$, wRw' korral $M \models A\,[w']$;
  - $M \models \Diamond A\,[w]$ parajasti siis, kui vähemalt ühe $w' \in W$, wRw' korral $M \models A\,[w']$;
- Öeldakse, et struktuur M kehtestab A, A kehtib M-is, A on M-is tõene ehk M on A mudel (tähis $M \models A$), kui A on tõene M-i igas maailmas.
- Öeldakse, et raam F kehtestab A, A kehtib F-is ehk A on F-is tõene (tähis $F \models A$), kui A on tõene F-i igas struktuuris.

- Öeldakse, et valem A on üldkehtiv mingis raamide klassis (tähis $\models A$), kui iga selle klassi raam kehtestab A.
- Normaalsed loogikad on niisiis määratud raamiklassidega.

K	kõik raamid
D = KD	seriaalsed raamid
T = KT	refleksiivsed raamid
S4 = KT4	refleksiivsed-transitiivsed raamid
S5 = KT45	refleksiivsed-transitiivsed-sümmeetrilised raamid
Br = KTB	refleksiivsed-eukleidilised raamid