PREDIKAATLOOGIKA: PRENEKSKUJU

- Prenekskuju on valem $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\, M$, kus Q_i on kvantorid ning M on kvantorivaba valem (nn maatriks).
- Iga valemi saab viia temaga loogiliselt ekvivalentsele prenekskujule, kirjutades kõigepealt ümber implikatsioonid ja kasutades seejärel

$$\neg\exists x\, A \Leftrightarrow \forall x\, \neg A$$
$$\neg\forall x\, A \Leftrightarrow \exists x\, \neg A$$
$$\forall x\, A \wedge B \Leftrightarrow \forall x\, (A \wedge B)$$
$$\exists x\, A \wedge B \Leftrightarrow \exists x\, (A \wedge B)$$
$$\forall x\, A \vee B \Leftrightarrow \forall x\, (A \vee B)$$
$$\exists x\, A \vee B \Leftrightarrow \exists x\, (A \vee B)$$

  Viimases neljas samasuses ei tohi x vabalt esineda B-s.
- Vajadusel tuleb enne nende samasuste rakendamist seotud muutujaid ümber nimetada.

SKOLEMISEERIMINE

- Kvantoritest valemis on võimalik vabaneda, aga seda ei saa teha loogiliselt ekvivalentselt.
- Skolemiseerimine teisendab prenekskuju A kvantorivabaks valemiks A', mis on kehtestatav parajasti siis, kui A on kehtestatav.
- Idee: $\forall x \exists y A(x, y)$ on kehtestatav parajasti siis, kui kehtestatav on $A(x, f(x))$, kus f on uus unaarne funktsioonisümbol.
- Skolemiseerimine: kvantorid jäetakse ära, üldsuskvantoriga seotud muutuja esinemised jäävad paika, eksistentsikvantoriga seotud muutuja y esinemised asendatakse termiga $f(x_1, \ldots x_n)$, kus n on antud eksistentsikvantorile eelnenud üldsuskvantorite arv, $x_1, \ldots x_n$ on vastavad seotud muutujad ning f on uus n-kohaline funktsioonisümbol. Nt. $\forall x_1\, \exists y_1\, \forall x_2\, \exists y_2\, A(x_1, y_1, x_2, y_2)$ asendatakse $A(x_1, f(x_1), x_2, g(x_1, x_2))$, kus f on uus 1-kohaline ja g uus 2-kohaline funktsioonisümbol.

DUAALNE TEGEVUS: HERBRANDISEERIMINE

- Tulenevalt duaalsusprintsiibist on olemas ka skolemiseerimisele duaalne tegevus. Herbrandiseerimine teisendab prenekskuju A kvantorivabaks valemiks A', mis on üldkehtiv parajasti siis, kui A on üldkehtiv (vrd.: skolemiseerimise korral oli meil tegu ekvivalentsiga kehtestatavuse suhtes).

- Herbrandiseerimine: kvantorid jäetakse ära, eksistentsikvantoriga seotud muutuja esinemised jäävad paika, aga üldsuskvantoriga seotud muutuja y esinemised asendatakse termiga $f(x_1, \ldots x_n)$, kus n on antud üldsuskvantorile eelnenud eksistentsikvantorite arv, $x_1, \ldots x_n$ on vastavad seotud muutujad ning f on uus n-kohaline funktsioonisümbol.

  Nt. $\forall x_1\, \exists y_1\, \forall x_2\, \exists y_2\, A(x_1, y_1, x_2, y_2)$ asendatakse $A(c, y_1, f(y_1), y_2)$, kus c on uus 0-kohaline funktsioonisümbol (konstant) ja f on uus 1-kohaline funktsioonisümbol.

KLAUSELKUJU

- Predikaatloogikas loetakse literaaliks atomaarvalemit või selle eitust; klausel (elementaardisjunktsioon) on literaalide lõplik disjunktsioon.
- Klauselkuju (konjunktiivne normaalkuju) on klauslite lõplik konjunktsioon.
- Valemi viimine kehtestatavuse mõttes ekvivalentsele (kvantorivabale) klauselkujule:
  - viia valem prenekskujule,
  - viia prenekskuju maatriks konjunktiivsele normaalkujule (nagu lauseloogikas),
  - skolemiseerida.

PREDIKAATLOOGIKA: HILBERTI SÜSTEEM

- Sarnaselt lauseloogikaga, saab ka predikaatloogika jaoks defineerida adekvaatse Hilberti süsteemi, mis on korrektne ja täielik (st. valemi tõestatavus on samaväärne tema üldkehtivusega).
- Aksioomid on nagu lausearvutuse juures pluss:

$$\forall x(A \supset B) \supset (A \supset \forall x B) \quad x \text{ tohi ei esineda vabalt } A\text{-s}$$

$$\forall x A \supset A[t/x]$$

$$A[t/x] \supset \exists x A$$

$$\forall x(A \supset B) \supset (\exists x A \supset B) \quad x \text{ tohi ei esineda vabalt } B\text{-s}$$

- Reegliteks on Modus Ponens pluss üldistusreegel:

$$\frac{A[y/x]}{\forall x A}$$

siin y ei tohi esineda vabalt valemis A ega üheski eelduses (loogikavälises aksioomis)