LAUSELOOGIKA: LOOMULIK TULETUS

- Loomuliku tuletuse süsteemid on liik tõestussüsteeme nagu Hilberti süsteemidki. Neile on omane, et igal konnektiivil on oma sissetoomise (introduction) ja väljaviimise (elimination) reeglid.
- Loomuliku tuletuse süsteeme võib esitada mitmel moel, siin vaatame standardesitust (à la Prawitz) ja sekventsiesitust (à la Gentzen).
- Standardesituse omapäraks on, et reeglite eeldused võivad olla tingimuslikud: esinevad reeglid kujul

$$\dfrac{\begin{matrix} H_{11} \quad \dots \quad H_{1m_1} \\ \vdots \\ A_1 \end{matrix} \qquad \dots \qquad \begin{matrix} H_{n1} \quad \dots \quad H_{nm_n} \\ \vdots \\ A_n \end{matrix}}{B}$$

- Siin valemid $H_{11}, \ldots, H_{1m_1}, \ldots, H_{n1}, \ldots, H_{nm_n}$ on reegli erinevate eelduste eeldused (hüpoteesid).

- Sellise tuletusreegli sisu on, et kui $\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A_1\end{array}$ on valemi A tuletus valemitehulgast $\Gamma \cup \{H_{11}, \ldots, H_{1m_1}\}$ ja ... ja $\begin{array}{c}\mathcal{D}_n\\ A_n\end{array}$ on valemi A tuletus valemitehulgast $\Gamma \cup \{H_{n1}, \ldots, H_{nm_n}\}$, siis $\dfrac{\begin{array}{ccc}\mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_n\\ A_1 & \ldots & A_n\end{array}}{B}$ on valemi B tuletus valemitehulgast Γ.

  Seega: kasutadaolevad hüpoteesid on tuletuse alamtuletustes erinevad.

- Lauseloogika loomuliku tuletuse standardesitus: Aksioomiskeeme pole, tuletusreeglid on järgmised:

$$\frac{}{\top}\ \top\mathcal{I} \qquad \frac{\bot}{C}\ \bot\mathcal{E}\ \text{(EFQ)}$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\mathcal{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\mathcal{E}_L \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge\mathcal{E}_R$$

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_L \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_R \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ \vee\mathcal{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \supset B}\ \supset\mathcal{I} \qquad \frac{A \supset B \quad A}{B}\ \supset\mathcal{E}\ \text{(MP)}$$

- Eitust vaadatakse sisuliselt kui erikujulist implikatsiooni ($\neg A = A \supset \bot$):

$$\dfrac{\begin{matrix} A \\ \vdots \\ \bot \end{matrix}}{\neg A}\ \neg\mathcal{I} \qquad\qquad \dfrac{\neg A \quad A}{\bot}\ \neg\mathcal{E}$$

- Lisaks on tarvis veel üht reeglit (selle ärajätmisega saaksime tuletussüsteemi intuitsionistlikule lauseloogikale):

$$\dfrac{\begin{matrix} A \\ \vdots \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} \neg A \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\ \text{dil.}$$

- Alternatiive viimasele reeglile:

$$\dfrac{}{A \lor \neg A}\ \text{TND} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} \neg A \\ \vdots \\ \bot \end{matrix}}{A}\ \text{RAA} \qquad\qquad \dfrac{\neg\neg A}{A}\ \text{DNE}$$

- Nimede seletusi:
  - EFQ: ex falso quodlibet, väärusest mida tahes
  - MP: modus ponens
  - dil.: dilemma
  - TND: tertium non datur, kolmandat pole antud (välistatud kolmanda seadus)
  - RAA: reductio ad absurdum, taandamine absurdile
  - DNE: double negation elimination

- Näiteid:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{+2}{p \vee r}$}
\AxiomC{$\overset{+1}{(p \supset q) \wedge (r \supset s)}$}
\RightLabel{$\wedge\mathcal{E}_L$}
\UnaryInfC{$p \supset q$}
\AxiomC{$\overset{+3}{p}$}
\RightLabel{$\supset \mathcal{E}$}
\BinaryInfC{q}
\RightLabel{$\vee\mathcal{I}_L$}
\UnaryInfC{$q \vee s$}
\AxiomC{$\overset{+1}{(p \supset q) \wedge (r \supset s)}$}
\RightLabel{$\wedge\mathcal{E}_R$}
\UnaryInfC{$r \supset s$}
\AxiomC{$\overset{+4}{r}$}
\RightLabel{$\supset \mathcal{E}$}
\BinaryInfC{s}
\RightLabel{$\vee\mathcal{I}_R$}
\UnaryInfC{$q \vee s$}
\RightLabel{$\vee\mathcal{E}, -3, -4$}
\TrinaryInfC{$q \vee s$}
\RightLabel{$\supset \mathcal{I}, -2$}
\UnaryInfC{$p \vee r \supset q \vee s$}
\RightLabel{$\supset \mathcal{I}, -1$}
\UnaryInfC{$(p \supset q) \wedge (r \supset s) \supset (p \vee r \supset q \vee s)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{+1}{q}$}
\RightLabel{$\supset \mathcal{I}, -3$}
\UnaryInfC{$p \supset q$}
\RightLabel{$\vee\mathcal{I}_L$}
\UnaryInfC{$(p \supset q) \vee (q \supset r)$}
\AxiomC{$\overset{+2}{\neg q}$}
\AxiomC{$\overset{+4}{q}$}
\RightLabel{$\neg\mathcal{E}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\bot\mathcal{E}$}
\UnaryInfC{r}
\RightLabel{$\supset \mathcal{I}, -4$}
\UnaryInfC{$q \supset r$}
\RightLabel{$\vee\mathcal{I}_R$}
\UnaryInfC{$(p \supset q) \vee (q \supset r)$}
\RightLabel{Dilemma, $-1, -2$}
\BinaryInfC{$(p \supset q) \vee (q \supset r)$}
\end{prooftree}
$$

- Loomuliku tuletuse sekventsiesituse idee on muuta arvepidamine parajasti kasutada olevate hüpoteeside üle ilmutatuks.

- Tõestatavateks/tuletatavateks objektideks pole mitte valemid, vaid nn sekventsid, so figuurid kujul $\Gamma \to A$, kus Γ on lõplik (võibolla tühi) hulk valemeid (NB! hulk, mitte list või multihulk, st järjestus, kordsus ei loe) ning A on valem.

- (Hulkade kirjutamiseks kasutame lihtsustatud süntaksit: A_1, ..., A_n tähistab hulka $\{A_1, \ldots, A_n\}$; Γ, A tähistab hulka $\Gamma \cup \{A\}$.)

- Sekventsi $\Gamma \to A$ tõestatavus on sama, mis valemi A tuletatavus valemihulgast Γ loomuliku tuletuse varemantud esituses.

- Valem A loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents $\to A$.

- Sekventsi $A_1, \ldots, A_n \to B$ võib samastada valemiga $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$; meenutame, et 0 valemi konjuktsioon on $\top$.

- Sekventsiesituse aksioomiskeemid ja tuletusreeglid:

  (Paneme tähele, et tingimuslike eeldustega reegleid enam pole.)

$$\frac{}{\Gamma, A \to A}\ \text{hyp.}$$

$$\frac{}{\Gamma \to \top}\ \top\mathcal{I}$$

$$\frac{\Gamma \to \bot}{\Gamma \to C}\ \bot\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}\ \wedge\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \to A \wedge B}{\Gamma \to A}\ \wedge\mathcal{E}_L \qquad \frac{\Gamma \to A \wedge B}{\Gamma \to B}\ \wedge\mathcal{E}_R$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_L \qquad \frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_R \qquad \frac{\Gamma \to A \vee B \quad \Gamma, A \to C \quad \Gamma, B \to C}{\Gamma \to C}\ \vee\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma, A \to B}{\Gamma \to A \supset B}\ \supset\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \to A \supset B \quad \Gamma \to A}{\Gamma \to B}\ \supset\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma, A \to \bot}{\Gamma \to \neg A}\ \neg\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \to \neg A \quad \Gamma \to A}{\Gamma \to \bot}\ \neg\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma, A \to C \quad \Gamma, \neg A \to C}{\Gamma \to C}\ \text{dil.}$$

PREDIKAATLOOGIKA: LOOMULIK TULETUS

- Standardesitus: lauseloogika loomuliku tuletuse standardesituse reeglitele lisanduvad järgmised:

$$\frac{A[y/x]}{\forall x\ A}\ \forall\mathcal{I}^{\star} \qquad\qquad \frac{\forall x\ A}{A[t/x]}\ \forall\mathcal{E}$$

$$\frac{A[t/x]}{\exists x\ A}\ \exists\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{\exists x\ A \qquad \begin{array}{c} A[y/x] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ \exists\mathcal{E}^{\dagger}$$

* y ei tohi vabalt esineda valemis $\forall x\ A$ ja kasutada olevates hüpoteesides

† y ei tohi vabalt esineda valemites $\exists x\ A$, C ja kasutada olevates hüpoteesides

- Näiteid tõestustest:

$$
\dfrac{\stackrel{+1}{\exists x\, \forall y\, p(x,y)} \quad \dfrac{\dfrac{\stackrel{+2}{\forall y\, p(x',y)}}{p(x',y')}\ \forall\mathcal{E}}{\exists x\, p(x,y')}\ \exists\mathcal{I}}{\dfrac{\dfrac{\exists x\, p(x,y')}{\forall y\, \exists x\, p(x,y)}\ \forall\mathcal{I}, y' \text{ värske}}{\exists x\, \forall y\, p(x,y) \supset \forall y\, \exists x\, p(x,y)}\ \supset\mathcal{I}, -1}\ \exists\mathcal{E}, -2, x' \text{ värske}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\stackrel{+1}{\exists x\, p(x)} \quad \dfrac{\dfrac{\stackrel{+2}{\forall x\, \neg p(x)}}{\neg p(x')}\ \forall\mathcal{E} \quad \stackrel{+3}{p(x')}}{\bot}\ \neg\mathcal{E}}{\bot}\ \exists\mathcal{E}, -3, x' \text{ värske}}{\neg \forall x\, \neg p(x)}\ \neg\mathcal{I}, -2}{\exists x\, p(x) \supset \neg \forall x\, \neg p(x)}\ \supset\mathcal{I}, -1
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\stackrel{+1}{\neg\forall x\ \neg p(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\stackrel{+2}{\neg\exists x\ p(x)} \qquad \dfrac{\stackrel{+4}{p(x')}}{\exists x\ p(x)}\ \exists\mathcal{I}}{\bot}\ \neg\mathcal{E}}{\neg p(x')}\ \neg\mathcal{I}, -4}{\forall x\ \neg p(x)}\ \forall\mathcal{I}, x' \text{ värske}}{\bot}\ \neg\mathcal{E}}{\exists x\ p(x)}\ \bot\mathcal{E} \qquad \stackrel{+3}{\exists x\ p(x)}}{\exists x\ p(x)}\ \text{dilemma}, -2, -3}{\neg\forall x\ \neg p(x) \supset \exists x\ p(x)}\ \supset\mathcal{I}, -1
$$

- Sekventsiesitus: lauseloogika loomuliku tuletuse sekventsiesituse reeglitele lisanduvad järgmised:

$$\frac{\Gamma \to A[y/x]}{\Gamma \to \forall x\ A}\ \forall\mathcal{I}^\star \qquad\qquad \frac{\Gamma \to \forall x\ A}{\Gamma \to A[t/x]}\ \forall\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma \to A[t/x]}{\Gamma \to \exists x\ A}\ \exists\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{\Gamma \to \exists x\ A \quad \Gamma, A[y/x] \to C}{\Gamma \to C}\ \exists\mathcal{E}^\dagger$$

* y ei tohi vabalt esineda valemis $\forall x\ A$ ja valemihulgas Γ

† y ei tohi vabalt esineda valemites $\exists x\ A$, C ja valemihulgas Γ