LAUSELOOGIKA: SEMANTILISED TABELID (SEMANTIC TABLEAUX)

- Semantilised tabelid on suhteliselt efektiivne meetod etteantud valemi A kehtestatavuse [vääratavuse] kindlakstegemiseks, mis positiivse tulemuse korral pealegi annab ka mudeli [resp kontramudeli].
- Idee on süstemaatiliselt otsida mudelit [resp kontramudelit] lähtudes tarvilikest ja piisavatest tingimustest, et mingi liitvalem oleks tõene või väär.

  Need tingimused on:
  - $I \models \neg A$ parajasti siis, kui $I \not\models A$,
    $I \not\models \neg A$ parajasti siis, kui $I \models A$,
  - $I \models \top$ alati,
    $I \not\models \top$ mitte kunagi,
  - $I \models \bot$ mitte kunagi,
    $I \not\models \bot$ alati,

- $I \models A \land B$ parajasti siis, kui $I \models A$ ja $I \models B$,
  $I \not\models A \land B$ parajasti siis, kui $I \not\models A$ või $I \not\models B$,
- $I \models A \lor B$ parajasti siis, kui $I \models A$ või $I \models B$,
  $I \not\models A \lor B$ parajasti siis, kui $I \not\models A$ ja $I \not\models B$,
- $I \models A \supset B$ parajasti siis, kui $I \not\models A$ või $I \models B$,
  $I \not\models A \supset B$ parajasti siis, kui $I \models A$ ja $I \not\models B$.

- Samuti kasutatakse asjaolu, et iga atomaarvalem on igas interpretatsioonis kas tõene või väär (ei saa olla mitte kumbki ega mõlemad).

- Töötatakse *märgiga valemitega* (signed formulae), millisteks on $\mathbf{T}A$, $\mathbf{F}A$, kus A on tavaline, märgita valem.

  $\mathbf{T}A$ tähendab sama, mis $A \equiv \top$ ehk A; $\mathbf{F}A$ tähendab sama, mis $A \equiv \bot$ ehk $\neg A$.

  (On võimalik ka märgita valemitega esitus, kuid märgiga valemitel on teatud eeliseid.)

- Algoritm:
  - Avame üheharulise tabeli (tableau) ja kirjutame sinna märgiga valemi $\mathbf{T}A$ või $\mathbf{F}A$, kus A on valem, mille kehtestatavust resp vääratavust tahame kontrollida.
  - Seni kuni tabelis on lõpetamata harusid, teeme järgmist.
    - $*$ Valime lõpetamata haru.
    - $*$ Kui harus pole enam märgiga liitvalemeid, mida selles harus poleks töödeldud, siis kontrollime kas harus esinevate märgiga atomaarvalemite seas on mõni vastandpaar $\{\mathbf{T}p, \mathbf{F}p\}$. Kui jah, siis lõpetame haru ja märgime ta '$\times$' (kinnine). Kui ei, siis lõpetame haru ja märgime ta '$\bigcirc$' (lahtine).
    - $*$ Kui harus on veel mõni märgiga liitvalem, mida selles pole töödeldud, siis valime ühe neist ning täiendame haru vastavalt valitud märgitud valemile järgnevalt:
      - $\cdot$ kui see on $\mathbf{T}\top$ või $\mathbf{F}\bot$, siis ei tee midagi;
      - $\cdot$ kui see on $\mathbf{F}\top$ või $\mathbf{T}\bot$, siis sulgeme haru ja märgime ta '$\times$';
      - $\cdot$ kui see on $\mathbf{T}\neg A$ või $\mathbf{F}\neg A$, siis lisame harusse $\mathbf{F}A$ resp $\mathbf{T}A$;

- kui see on α, kus α on $\mathbf{T}(A \wedge B)$, $\mathbf{F}(A \vee B)$ või $\mathbf{F}(A \supset B)$, siis lisame harusse α_1 ja α_2, kus α_1, α_2 on antud tabeliga

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(A \wedge B)$	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{T}B$
$\mathbf{F}(A \vee B)$	$\mathbf{F}A$	$\mathbf{F}B$
$\mathbf{F}(A \supset B)$	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{F}B$

- kui see on β, kus β on $\mathbf{F}(A \wedge B)$, $\mathbf{T}(A \vee B)$ või $\mathbf{T}(A \supset B)$, siis jagame haru kaheks ning lisame ühte alamharusse β_1 ning teise β_2, kus β_1, β_2 on antud tabeliga

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(A \wedge B)$	$\mathbf{F}A$	$\mathbf{F}B$
$\mathbf{T}(A \vee B)$	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{T}B$
$\mathbf{T}(A \supset B)$	$\mathbf{F}A$	$\mathbf{T}B$

- Tulemusena saame lõpetatud tabeli. Lõpetatud tabelit nimetatakse kinniseks, kui tema kõik harud on kinnised. Kui mõni haru on lahtine, loetakse tabelit lahtiseks.
- Kirjeldatud algoritm lahendab kehtestatavuse ja üldkehtivuse probleemi: osutub, et tabeli ehitamine $\mathbf{T}A$ [$\mathbf{F}A$] jaoks lõpeb alati ning ehitatud lõpetatud tabel on kinnine parajasti siis, kui A on kehtestamatu [resp üldkehtiv].
- Lahtine on $\mathbf{T}A$ [$\mathbf{F}A$] jaoks ehitatud lõpetatud tabel parajasti siis, kui A on kehtestatav [resp vääratav]. Sel juhul saab lahtisest harust välja lugeda mudeli [resp kontramudeli] I: iga selles harus esineva märgiga atomaarvalemi $\mathbf{T}p$ jaoks tuleb valid $I(p) = 1$, iga märgiga valemi $\mathbf{F}p$ jaoks tuleb valida $I(p) = 0$; kui mingi p ei esine kummagi märgiga, siis on ükskõik, kuidas $I(p)$ määrata.

  (Ükski atomaarvalem ei saa lahtises harus esineda mõlema märgiga, seega ülemääratuse tekkimine pole võimalik.)

- Näide: $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ on kehtestamatu:

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{T}((p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)) \\
\mathbf{T}(p \vee q) \\
\mathbf{T}(\neg p \wedge \neg q) \\
\mathbf{T}\neg p \\
\mathbf{T}\neg q \\
\mathbf{F}p \\
\mathbf{F}q \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\mathbf{T}p & \mathbf{T}q \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

- Näide: $p \wedge (\neg q \vee \neg p)$ on kehtestatav, kusjuures mudeliks on iga selline I, et $I(p) = 1$, $I(q) = 0$.

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{T}(p \wedge (\neg q \vee \neg p)) \\
\mathbf{T}p \\
\mathbf{T}(\neg q \vee \neg p) \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\mathbf{T}\neg q & \mathbf{T}\neg p \\
\mathbf{F}q & \mathbf{F}p \\
\bigcirc & \times
\end{array}
\end{array}
$$

- Näide: $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ on üldkehtiv.

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{F}((p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))) \\
\mathbf{T}(p \supset (q \supset r)) \\
\mathbf{F}((p \supset q) \supset (p \supset r)) \\
\mathbf{T}(p \supset q) \\
\mathbf{F}(p \supset r) \\
\mathbf{T}p \\
\mathbf{F}r \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\mathbf{F}p & \mathbf{T}(q \supset r) \\
\times & \begin{array}{c|c}
\mathbf{F}p & \mathbf{T}q \\
\times & \begin{array}{c|c}
\mathbf{F}q & \mathbf{T}r \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

- Algoritmi lõpetavuse tõestamine on lihtne (kuidas seda teha?).
- Väljastatavate tulemuste õigsuse küsimus on jagatav kaheks, korrektsuseks (soundness) ja täielikkuseks (completeness):

  Korrektsus: Kui $\mathbf{T}A$ [$\mathbf{F}A$] jaoks ehitatud lõpetatud tabel on kinnine, siis A on kehtestamatu [resp üldkehtiv].

  Tõestus: Eeldades, et mingi I kehtestab [resp väärab] A, saab tuletada vastuolu.

  Täielikkus: Kui A on kehtestamatu [üldkehtiv], siis $\mathbf{T}A$ [resp $\mathbf{F}A$] jaoks ehitatud lõpetatud tabel on kinnine.

  Ehk: Kui $\mathbf{T}A$ [$\mathbf{F}A$] jaoks ehitatud lõpetatud tabel on lahtine, siis A jaoks leidub mudel [resp kontramudel].

  Tõestus: Lahtise haru pealt eelkirjeldatud viisil välja loetav interpretatsioon I osutub tõepoolest mudeliks [resp kontramudeliks].

PREDIKAATLOOGIKA: SEMANTILISED TABELID

- Tabelite meetodi laiendamiseks predikaatloogikale tuleb seda kvantorite jaoks täiendada.
- Kui harus töötluseks valitud märgiga valem on γ, kus γ on $\mathbf{T}(\forall x\ A)$ või $\mathbf{F}(\exists x\ A)$, siis lisame harusse märgiga valemid $\gamma(t)$, kus t on mingi term ja $\gamma(t)$ on antud tabeliga

γ	$\gamma(t)$
$\mathbf{T}(\forall x\ A)$	$\mathbf{T}A[t/x]$
$\mathbf{F}(\exists x\ A)$	$\mathbf{F}A[t/x]$

ning jätame γ ka edaspidi valitavaks.

- Kui harus töötluseks valitud märgiga valem on δ, kus δ on $\mathbf{F}(\forall x\ A)$ või $\mathbf{T}(\exists x\ A)$, siis lisame harusse märgiga valemid $\delta(y)$, kus y on värske (varem kasutamata) muutuja ja $\delta(y)$ on antud tabeliga

δ	$\delta(y)$
$\mathbf{F}(\forall x\ A)$	$\mathbf{F}A[y/x]$
$\mathbf{T}(\exists x\ A)$	$\mathbf{T}A[y/x]$