DÜNAAMILINE LOOGIKA

- Dünaamiline loogika on erijuhtum modaalloogikat, mille mõtteks on arutlemine programmide käitumise üle.
- Erinevalt tavalisest n-ö ühemodaalsest loogikast, on dünaamiline loogika mitmemodaalne. Modaalsused on indekseeritud toimingutega (programmidega).

DÜNAAMILINE LOOGIKA: SÜNTAKS

- Dünaamilise loogika signatuur koosneb kahest tähestikust $\mathrm{PC} = \{p, q, \ldots\}$ ja $\mathrm{AC} = \{a, b, \ldots\}$, mille sümboleid nimetatakse lausesümboliteks ja toimingusümboliteks.
- Keeles on kaks kategooriat avaldisi—valemid Fma ja toiminguavaldised Act—, mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
  - kõik lausesümbolid on valemid (nn atomaarvalemid);
  - $\top$, $\bot$ on valemid;
  - kui A on valem, siis $\neg A$ on samuti valem;
  - kui A, B on valemid, siis $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$ on ka valemid;
  - kui A on valem ja α on toiming, siis $[\alpha]A$ (pärast α teostamist paramatult A), $\langle\alpha\rangle A$ (pärast α teostamist võibolla A) on ka valemid.

- kõik toimingusümbolid on toiminguavaldised;
- kui α, β on toiminguavaldised, siis $\alpha; \beta$ (esiteks α, siis β) on toiminguavaldis;
- kui α, β on toiminguavaldised, siis $\alpha \cup \beta$ (mittedeterministlik valik α ja β vahel) on toiminguavaldis;
- kui α on toiminguavaldis, siis $\alpha^\star$ (α mittedeterministlik kordus) on toiminguavaldis;
- kui A on valem, siis $A?$ (A test) on toiminguavaldis.

Dünaamiline loogika: Semantika

- Dünaamilise loogika Kripke struktuur on kolmik $M = (W, R, I)$, kus W on mittetühi hulk, mille elemente nimetatakse võimalikeks maailmadeks, R on toimingusümbolitega indekseeritud binaarsete seoste pere sellel ning I on funktsioon $\mathrm{PC} \times W \to \{1, 0\}$.
- Valemite ja toimingute väärtustused etteantud struktuuris on funktsioonid $[\![\cdot]\!]^{M,\cdot} : \mathrm{Fma} \times W \to \{1, 0\}$, $[\![\cdot]\!]^{M,\cdot} : \mathrm{Act} \to \mathcal{P}(W \times W)$:
  - $[\![p]\!]^{M,w} = I(w, p)$, kui p on lausesümbol;
  - $[\![\top]\!]^{M,w} = 1$, $[\![\bot]\!]^{M,w} = 0$;
  - $[\![\neg A]\!]^{M,w} = 1 - [\![A]\!]^{M,w}$;
  - $[\![A \wedge B]\!]^{M,w} = \min([\![A]\!]^{M,w}, [\![B]\!]^{M,w})$;
  - $[\![A \vee B]\!]^{M,w} = \max([\![A]\!]^{M,w}, [\![B]\!]^{M,w})$;
  - $[\![A \supset B]\!]^{M,w} = \max(1 - [\![A]\!]^{M,w}, [\![B]\!]^{M,w})$;
  - $[\![[\alpha]A]\!]^{M,w} = \min_{w' \in W, w [\![\alpha]\!]^M w'}([\![A]\!]^{M,w'})$;
  - $[\![\langle\alpha\rangle A]\!]^{M,w} = \max_{w' \in W, w [\![\alpha]\!]^M w'}([\![A]\!]^{M,w'})$.

- $w[\![a]\!]^M w'$ parajasti siis, kui $(w, w') \in I(a)$,
- $w[\![\alpha; \beta]\!]^M w'$ parajasti siis, kui leidub $w'' \in W$ nii, et $w[\![\alpha]\!]^M w''$ ja $w''[\![\beta]\!]^M w$,
- $w[\![\alpha \cup \beta]\!]^M w'$ parajasti siis, kui $w[\![\alpha]\!]^M w'$ või $w[\![\beta]\!]^M w'$,
- $w, [\![\alpha^\star]\!]^M w'$ parajasti siis, kui leiduvad $n \geq 0$ ja $w_0, \ldots w_n \in W$ nii, et $w = w_0$, $w_0[\![\alpha]\!]^M w_1, \ldots, w_{n-1}[\![\alpha]\!]^M w_n, w_n = w'$;
- $w[\![A?]\!]^M w'$ parajasti siis kui $w = w'$ ja $[\![A]\!]^{M,w} = 1$.

PROGRAMMEERIMINE DÜNAAMILISES LOOGIKAS

- Toiminguavaldised on kasutatavad programmeerimiskeelena:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{skip} &= \top? \\
\mathsf{fail} &= \bot? \\
\mathsf{if}\ A_1 \to \alpha_1 \mid \ldots \mid A_n \to \alpha_n\ \mathsf{fi} &= (A_1?; \alpha_1) \cup \ldots \cup (A_n?; \alpha_n) \\
\mathsf{do}\ A_1 \to \alpha_1 \mid \ldots \mid A_n \to \alpha_n\ \mathsf{od} &= (\mathsf{if} A_1 \to \alpha_1 \mid \ldots \mid A_n \to \alpha_n\ \mathsf{fi})^\star; \\
&\qquad (\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n)? \\
\mathsf{if}\ A\ \mathsf{then}\ \alpha_0\ \mathsf{else}\ \alpha_1 &= \mathsf{if}\ A \to \alpha_0 \mid \neg A \to \alpha_1\ \mathsf{fi} \\
\mathsf{while}\ A\ \mathsf{do}\ \alpha &= \mathsf{do}\ A \to \alpha\ \mathsf{od} \\
\mathsf{repeat}\ \alpha\ \mathsf{until}\ A &= \alpha; \mathsf{while}\ \neg A\ \mathsf{do}\ \alpha
\end{aligned}
$$

Hilberti süsteem

- Dünaamilise loogika Hilberti süsteem on antud lauseloogika aksioomide, aksioomi K, reeglite MP ja NR (necessitation rule) ning aksioomidega:

$$[\alpha;\beta]A \equiv [\alpha][\beta]A$$

$$[\alpha \cup \beta]A \equiv [\alpha]A \wedge [\beta]A$$

$$[B?]A \equiv B \supset A$$

$$[\alpha^\star]A \supset A \wedge [\alpha][\alpha^\star]A$$

$$A \wedge [\alpha^\star](A \supset [\alpha]A) \supset [\alpha^\star]A$$