Lauseloogika: Loomulik tuletus

- Loomuliku tuletuse süsteemid on liik tõestussüsteeme nagu Hilberti süsteemidki. Neile on omane, et igal konnektiivil on oma sissetoomise (introduction) ja väljaviimise (elimination) reeglid.
- Loomuliku tuletuse süsteeme võib esitada mitmel moel, siin vaatame standardesitust (à la Prawitz) ja sekventsiesitust (à la Gentzen).
- Standardesituse omapäraks on, et reeglite eeldused võivad olla tingimuslikud: esinevad reeglid kujul

$$\frac{\begin{matrix} H_{11} \quad \ldots \quad H_{1m_1} \\ \vdots \\ A_1 \end{matrix} \qquad \ldots \qquad \begin{matrix} H_{n1} \quad \ldots \quad H_{nm_n} \\ \vdots \\ A_n \end{matrix}}{B}$$

- Siin valemid $H_{11}, \ldots, H_{1m_1}, \ldots, H_{n1}, \ldots, H_{nm_n}$ on reegli erinevate eelduste eeldused (hüpoteesid).

- Sellise tuletusreegli sisu on, et kui $\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\A_1\end{array}$ on valemi A tuletus valemitehulgast $\Gamma \cup \{H_{11}, \ldots, H_{1m_1}\}$ ja $\ldots$ ja $\begin{array}{c}\mathcal{D}_n\\A_n\end{array}$ on valemi A tuletus valemitehulgast $\Gamma \cup \{H_{n1}, \ldots, H_{nm_n}\}$, siis $\dfrac{\begin{array}{ccc}\mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_n\\A_1 & \ldots & A_n\end{array}}{B}$ on valemi B tuletus valemitehulgast Γ.

  Seega: kasutadaolevad hüpoteesid on tuletuse alamtuletustes erinevad.

- Lauseloogika loomuliku tuletuse standardesitus: Aksioomiskeeme pole, tuletusreeglid on järgmised:

$$\frac{}{\top}\ \top\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{\bot}{C}\ \bot\mathcal{E}\ \text{(EFQ)}$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\mathcal{E}_L \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge\mathcal{E}_R$$

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_L \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_R \qquad\qquad \frac{A \vee B \quad \begin{matrix} A \\ \vdots \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} B \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\ \vee\mathcal{E}$$

$$\frac{\begin{matrix} A \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \supset B}\ \supset\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{A \supset B \quad A}{B}\ \supset\mathcal{E}\ \text{(MP)}$$

- Eitust vaadatakse sisuliselt kui erikujulist implikatsiooni ($\neg A = A \supset \bot$):

$$\dfrac{\begin{matrix} A \\ \vdots \\ \bot \end{matrix}}{\neg A}\ \neg\mathcal{I} \qquad\qquad \dfrac{\neg A \quad A}{\bot}\ \neg\mathcal{E}$$

- Lisaks on tarvis veel üht reeglit (selle ärajätmisega saaksime tuletussüsteemi intuitsionistlikule lauseloogikale):

$$\dfrac{\begin{matrix} A \\ \vdots \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} \neg A \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\ \text{dil.}$$

- Alternatiive viimasele reeglile:

$$\dfrac{}{A \vee \neg A}\ \text{TND} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} \neg A \\ \vdots \\ \bot \end{matrix}}{A}\ \text{RAA} \qquad\qquad \dfrac{\neg\neg A}{A}\ \text{DNE}$$

- Nimede seletusi:
  - EFQ: ex falso quodlibet, väärusest mida tahes
  - MP: modus ponens
  - dil.: dilemma
  - TND: tertium non datur, kolmandat pole antud (välistatud kolmanda seadus)
  - RAA: reductio ad absurdum, taandamine absurdile
  - DNE: double negation elimination

- Näiteid:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{+2}{p \lor r} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{+1}{(p \supset q) \land (r \supset s)}}{p \supset q}\,\land\mathcal{E}_L \quad \overset{+3}{p}}{q}\,\supset\mathcal{E}}{q \lor s}\,\lor\mathcal{I}_L \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{+1}{(p \supset q) \land (r \supset s)}}{r \supset s}\,\land\mathcal{E}_R \quad \overset{+4}{r}}{s}\,\supset\mathcal{E}}{q \lor s}\,\lor\mathcal{I}_R}{\dfrac{q \lor s}{p \lor r \supset q \lor s}\,\supset\mathcal{I}, -2}\,\lor\mathcal{E}, -3, -4}{(p \supset q) \land (r \supset s) \supset (p \lor r \supset q \lor s)}\,\supset\mathcal{I}, -1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{+1}{q}}{p \supset q}\,\supset\mathcal{I}, -3}{(p \supset q) \lor (q \supset r)}\,\lor\mathcal{I}_L \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{+2}{\neg q} \quad \overset{+4}{q}}{\bot}\,\neg\mathcal{E}}{r}\,\bot\mathcal{E}}{q \supset r}\,\supset\mathcal{I}, -4}{(p \supset q) \lor (q \supset r)}\,\lor\mathcal{I}_R}{(p \supset q) \lor (q \supset r)}\,\text{Dilemma}, -1, -2$$

- Loomuliku tuletuse sekventsiesituse idee on muuta arvepidamine parajasti kasutada olevate hüpoteeside üle ilmutatuks.
- Tõestatavateks/tuletatavateks objektideks pole mitte valemid, vaid nn sekventsid, so figuurid kujul $\Gamma \rightarrow A$, kus Γ on lõplik (võibolla tühi) hulk valemeid (NB! hulk, mitte list või multihulk, st järjestus, kordsus ei loe) ning A on valem.
- (Hulkade kirjutamiseks kasutame lihtsustatud süntaksit: A_1, ..., A_n tähistab hulka $\{A_1, \ldots, A_n\}$; Γ, A tähistab hulka $\Gamma \cup \{A\}$.)
- Sekventsi $\Gamma \rightarrow A$ tõestatavus on sama, mis valemi A tuletatavus valemihulgast Γ loomuliku tuletuse varemantud esituses.
- Valem A loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents $\rightarrow A$.
- Sekventsi $A_1, \ldots, A_n \rightarrow B$ võib samastada valemiga $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$; meenutame, et 0 valemi konjuktsioon on $\top$.

- Sekventsiesituse aksioomiskeemid ja tuletusreeglid:

  (Paneme tähele, et tingimuslike eeldustega reegleid enam pole.)

$$\frac{}{\Gamma, A \to A}\ \text{hyp.}$$

$$\frac{}{\Gamma \to \top}\ \top\mathcal{I}$$

$$\frac{-}{}$$

$$\frac{\Gamma \to \bot}{\Gamma \to C}\ \bot\mathcal{E}$$

$$\frac{-}{}$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}\ \wedge\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \to A \wedge B}{\Gamma \to A}\ \wedge\mathcal{E}_L \qquad \frac{\Gamma \to A \wedge B}{\Gamma \to B}\ \wedge\mathcal{E}_R$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_L \qquad \frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_R \qquad \frac{\Gamma \to A \vee B \quad \Gamma, A \to C \quad \Gamma, B \to C}{\Gamma \to C}\ \vee\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma, A \to B}{\Gamma \to A \supset B}\ \supset\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \to A \supset B \quad \Gamma \to A}{\Gamma \to B}\ \supset\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma, A \to \bot}{\Gamma \to \neg A}\ \neg\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \to \neg A \quad \Gamma \to A}{\Gamma \to \bot}\ \neg\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma, A \to C \quad \Gamma, \neg A \to C}{\Gamma \to C}\ \text{dil.}$$

LAUSELOOGIKA: SEKVENTSIARVUTUS

- Sekventsiarvutused on kolmas alternatiiv tõestussüsteeme Hilberti süsteemide ja loomuliku tuletuse süsteemide kõrval.

  Neid ei tohi segamini ajada loomuliku tuletuse sekventsiesitustega.

- Kui loomulikus tuletuses olid igal konnektiivil oma sissetoomise ja väljaviimise reeglid, siis sekventsiarvutustes on igal konnektiivil oma parema ja vasaku poole reeglid.

- Sekventsid on sedapuhku nö mitmejärelduselised: sekvents on figuur kujul $\Gamma \to \Delta$, kus nii Γ kui ka Δ on lõplikud (võibolla tühjad) hulgad valemeid (taas hulgad, mitte listid või multihulgad, st järjestus, kordsus ei loe).

- Valem A loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents $\to A$.

- Sekventsi $A_1, \ldots, A_n \to B_1, \ldots, B_m$ võib samastada valemiga $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$; meenutame, et 0 valemi konjuktsioon on $\top$ ja 0 valemi disjunktsioon on $\bot$.

- Sekventsiarvutuse aksioomiskeemid ja tuletusreeglid (tagasisuunalisele otsimisele häälestatud versiooni jaoks):

$$\frac{}{\Gamma, A \to A, \Delta}\ \text{hyp}$$

$$\frac{}{\Gamma \to \top, \Delta}\ \top\mathcal{R} \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad \frac{}{\Gamma, \bot \to \Delta}\ \bot\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma \to A, \Delta \quad \Gamma \to B, \Delta}{\Gamma \to A \wedge B, \Delta}\ \wedge\mathcal{R} \qquad \frac{\Gamma, A, B \to \Delta}{\Gamma, A \wedge B \to \Delta}\ \wedge\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma \to A, B, \Delta}{\Gamma \to A \vee B, \Delta}\ \vee\mathcal{R} \qquad \frac{\Gamma, A \to \Delta \quad \Gamma, B \to \Delta}{\Gamma, A \vee B \to \Delta}\ \vee\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma, A \to B, \Delta}{\Gamma \to A \supset B, \Delta}\ \supset\mathcal{R} \qquad \frac{\Gamma \to A, \Delta \quad \Gamma, B \to \Delta}{\Gamma, A \supset B \to \Delta}\ \supset\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma, A \to \Delta}{\Gamma \to \neg A, \Delta}\ \neg\mathcal{R} \qquad \frac{\Gamma \to A, \Delta}{\Gamma, \neg A \to \Delta}\ \neg\mathcal{L}$$

- Mõned näited:

$$
\dfrac{
  \dfrac{}{p \land q \supset r, p \to p, r}\ \text{hyp.}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{q, p \to p, r}\ \text{hyp.}
      \quad
      \dfrac{}{q, p \to q, r}\ \text{hyp.}
    }{q, p \to p \land q, r}\ \land\mathcal{R}
    \quad
    \dfrac{}{q, r, p \to r}\ \text{hyp.}
  }{q, p \land q \supset r, p \to r}\ \supset\mathcal{L}
}{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{p \supset q, p \land q \supset r, p \to r}{p \supset q, p \land q \supset r \to p \supset r}\ \supset\mathcal{R}
    }{(p \supset q) \land (p \land q \supset r) \to p \supset r}\ \land\mathcal{L}
  }{\to (p \supset q) \land (p \land q \supset r) \supset (p \supset r)}\ \supset\mathcal{R}
}\ \supset\mathcal{L}
$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{p \to p, q}\;\text{hyp.} \qquad \cfrac{}{q, p \to q}\;\text{hyp.}}{p \supset q, p \to q}\;\supset\mathcal{L}}{p \supset q, \neg q, p \to}\;\neg\mathcal{L}}{p \supset q, \neg q \to \neg p}\;\neg\mathcal{R}}{p \supset q \to \neg q \supset \neg p}\;\supset\mathcal{R}}{\to (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)}\;\supset\mathcal{R}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{q \supset r, p \to p, r}\;\text{hyp.} \qquad \cfrac{}{r, q \supset r, p \to r}\;\text{hyp.}}{p \supset r, q \supset r, p \to r}\;\supset\mathcal{L} \qquad \cfrac{\cfrac{}{p \supset r, q \to q, r}\;\text{hyp.} \qquad \cfrac{}{p \supset r, r, q \to r}\;\text{hyp.}}{p \supset r, q \supset r, q \to r}\;\supset\mathcal{L}}{p \supset r, q \supset r, p \vee q \to r}\;\vee\mathcal{L}}{p \supset r, q \supset r \to p \vee q \supset r}\;\supset\mathcal{R}}{p \supset r \to (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)}\;\supset\mathcal{R}}{\to (p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset (p \vee q \supset r))}\;\supset\mathcal{R}$$