

## LAUSELOOGIKA: LOOMULIK TULETUS

- Loomuliku tuletuse süsteemid on liik tõestussüsteeme nagu Hilberti süsteemidki. Neile on omane, et igal konnektiivil on oma sissetoomise (introduction) ja väljaviimise (elimination) reeglid.
- Loomuliku tuletuse süsteeme võib esitada mitmel moel, siin vaatame standardesitust (à la Prawitz) ja sekventsiesitust (à la Gentzen).
- Standardesituse omapäraks on, et reeglite eeldused võivad olla tingimuslikud: esinevad reeglid kujul

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{11} & \dots & H_{1m_1} & & H_{n1} & \dots & H_{nm_n} \\
 & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & A_1 & \dots & & & A_n \\
 \hline
 & & & & & & B
 \end{array}$$

- Siin valemid  $H_{11}, \dots, H_{1m_1}, \dots, H_{n1}, \dots, H_{nm_n}$  on reegli erinevate eelduste eeldused (hüpoteesid).

- Sellise tuletusreegli sisu on, et kui  $A_1$  on valemi  $A$  tuletus valemitehulgast  $\Gamma \cup \{H_{11}, \dots, H_{1m_1}\}$  ja  $\dots$  ja  $A_n$  on valemi  $A$  tuletus valemitehulgast  $\Gamma \cup \{H_{n1}, \dots, H_{nm_n}\}$ , siis  $\frac{\mathcal{D}_1 \quad \dots \quad \mathcal{D}_n}{A_1 \quad \dots \quad A_n} B$  on valemi  $B$  tuletus valemitehulgast  $\Gamma$ .  
Seega: kasutadaolevad hüpoteesid on tuletuse alamtuletustes erinevad.

- Lauseloogika loomuliku tuletuse standardesitus: Aksiomiskeeme pole, tuletusreeglid on järgmised:

$$\frac{}{\perp} \top \mathcal{I}$$

—

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge \mathcal{I}$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge \mathcal{E}_L \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge \mathcal{E}_R$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee \mathcal{I}_L \quad \frac{B}{A \vee B} \vee \mathcal{I}_R$$

$$\frac{A \quad B}{A \vee B \quad C \quad C} \vee \mathcal{E}$$

$$\frac{A \quad \dots \quad B}{A \supset B} \supset \mathcal{I}$$

$$\frac{A \supset B \quad A}{B} \supset \mathcal{E} \text{ (MP)}$$

- Eitust vaadatakse sisuliselt kui erikujulist implikatsiooni ( $\neg A = A \supset \perp$ ):

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg\mathcal{I} \qquad \frac{\neg A \quad A}{\perp} \neg\mathcal{E}$$

- Lisaks on tarvis veel üht reeglit (selle ärajätmisega saaksime tuletussüsteemi intuitsionistlikule lauseloogikale):

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \text{dil.}$$

- Alternatiive viimasele reeglile:

$$\frac{}{A \vee \neg A} \text{TND} \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} \text{RAA} \qquad \frac{\neg\neg A}{A} \text{DNE}$$

- Nimede seletusi:
  - EFQ: ex falso quodlibet, väärusest mida tahes
  - MP: modus ponens
  - dil.: dilemma
  - TND: tertium non datur, kolmandat pole antud (välistatud kolmanda seadus)
  - RAA: reductio ad absurdum, taandamine absurdile
  - DNE: double negation elimination

- Näiteid:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{+1}{(p \supset q) \wedge (r \supset s)}{p \supset q} \wedge \mathcal{E}_L \quad \frac{+3}{p} \supset \mathcal{E}}{\frac{q}{q \vee s} \vee \mathcal{I}_L} \supset \mathcal{E} \quad \frac{\frac{+1}{(p \supset q) \wedge (r \supset s)}{r \supset s} \wedge \mathcal{E}_R \quad \frac{+4}{r} \supset \mathcal{E}}{\frac{s}{q \vee s} \vee \mathcal{I}_R} \supset \mathcal{E}}{\frac{+2}{p \vee r} \quad \frac{q \vee s}{q \vee s} \vee \mathcal{E}, -3, -4} \\
 \frac{\frac{q \vee s}{p \vee r \supset q \vee s} \supset \mathcal{I}, -2}{(p \supset q) \wedge (r \supset s) \supset (p \vee r \supset q \vee s)} \supset \mathcal{I}, -1 \\
 \\
 \frac{\frac{\frac{+1}{q} \supset \mathcal{I}, -3}{(p \supset q) \vee (q \supset r)} \vee \mathcal{I}_L \quad \frac{\frac{\frac{+2}{\neg q} \quad \frac{+4}{q} \neg \mathcal{E}}{\frac{\perp}{r} \perp \mathcal{E}} \supset \mathcal{I}, -4}{(p \supset q) \vee (q \supset r)} \vee \mathcal{I}_R}{(p \supset q) \vee (q \supset r)} \text{Dilemma, } -1, -2
 \end{array}$$

- Loomuliku tuletuse sekventsiesituse idee on muuta arvepidamine parajasti kasutada olevate hüpoteeside üle ilmutatuks.
- Tõestatavateks/tuletatavateks objektideks pole mitte valemid, vaid nn sekventsid, so figuurid kujul  $\Gamma \rightarrow A$ , kus  $\Gamma$  on lõplik (võibolla tühi) hulk valemmeid (NB! hulk, mitte list või multihulk, st järjestus, kordsus ei loe) ning  $A$  on valem.
- (Hulkade kirjutamiseks kasutame lihtsustatud süntaksit:  $A_1, \dots, A_n$  tähistab hulka  $\{A_1, \dots, A_n\}$ ;  $\Gamma, A$  tähistab hulka  $\Gamma \cup \{A\}$ .)
- Sekventsi  $\Gamma \rightarrow A$  tõestatavus on sama, mis valemi  $A$  tuletatavus valemihulgast  $\Gamma$  loomuliku tuletuse varemantud esituses.
- Valem  $A$  loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents  $\rightarrow A$ .
- Sekventsi  $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$  võib samastada valemiga  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$ ; meenutame, et 0 valemi konjuktsioon on  $\top$ .

- Sekventsiesituse aksiomiskeemid ja tuletusreeglid:  
(Paneme tähele, et tingimuslike eeldustega reegleid enam pole.)

$$\begin{array}{c}
 \overline{\Gamma \rightarrow \top} \quad \top\mathcal{I} \\
 \\
 \overline{\Gamma, A \rightarrow A} \quad \text{hyp.} \\
 \\
 \frac{}{\Gamma \rightarrow \perp} \quad \perp\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \wedge B} \quad \wedge\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A \wedge B}{\Gamma \rightarrow A} \quad \wedge\mathcal{E}_L \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A \wedge B}{\Gamma \rightarrow B} \quad \wedge\mathcal{E}_R \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \quad \vee\mathcal{I}_L \qquad \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \quad \vee\mathcal{I}_R \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A \vee B \quad \Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, B \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C} \quad \vee\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \quad \supset\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A \supset B \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow B} \quad \supset\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow \neg A} \quad \neg\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \neg A \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow \perp} \quad \neg\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, \neg A \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C} \quad \text{dil.}
 \end{array}$$



## LAUSELOOGIKA: SEKVENTSIARVUTUS

- Sekventsiarvutused on kolmas alternatiiv tõestussüsteeme Hilberti süsteemide ja loomuliku tuletuse süsteemide kõrval.  
Neid ei tohi segamini ajada loomuliku tuletuse sekventsiesitustega.
- Kui loomulikus tuletuses olid igal konnektiivil oma sissetoomise ja väljaviimise reeglid, siis sekventsiarvutustes on igal konnektiivil oma parema ja vasaku poole reeglid.
- Sekvents on sedapuhku nõ mitmejäreluselised: sekvents on figuur kujul  $\Gamma \rightarrow \Delta$ , kus nii  $\Gamma$  kui ka  $\Delta$  on lõplikud (võibolla tühjad) hulgad valemeid (taas hulgad, mitte listid või multihulgad, st järjestus, kordsus ei loe).
- Valem  $A$  loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents  $\rightarrow A$ .
- Sekventsi  $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$  võib samastada valemiga  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset B_1 \vee \dots \vee B_m$ ; meenutame, et 0 valemi konjunktsioon on  $\top$  ja 0 valemi disjunktsioon on  $\perp$ .

- Sekventsiarvutuse aksiomiskeemid ja tuletusreeglid (tagasisuunalisele otsimisele häälestatud versiooni jaoks):

$$\begin{array}{c}
 \overline{\Gamma, A \rightarrow A, \Delta} \text{ hyp} \\
 \\
 \overline{\Gamma \rightarrow \top, \Delta} \top\mathcal{R} \qquad \qquad \qquad - \\
 \\
 - \qquad \qquad \qquad \overline{\Gamma, \perp \rightarrow \Delta} \perp\mathcal{L} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \wedge B, \Delta} \wedge\mathcal{R} \qquad \qquad \qquad \frac{\Gamma, A, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \rightarrow \Delta} \wedge\mathcal{L} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \vee B, \Delta} \vee\mathcal{R} \qquad \qquad \qquad \frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \rightarrow \Delta} \vee\mathcal{L} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Delta} \supset\mathcal{R} \qquad \qquad \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta \quad \Gamma, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \supset B \rightarrow \Delta} \supset\mathcal{L} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \neg A, \Delta} \neg\mathcal{R} \qquad \qquad \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \rightarrow \Delta} \neg\mathcal{L}
 \end{array}$$



$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{p \rightarrow p, q} \text{ hyp.} \quad \overline{q, p \rightarrow q} \text{ hyp.}}{\overline{p \supset q, p \rightarrow q} \supset \mathcal{L}} \\
\frac{\overline{p \supset q, p \rightarrow q} \supset \mathcal{L}}{\overline{p \supset q, \neg q, p \rightarrow \neg q} \supset \mathcal{L}} \\
\frac{\overline{p \supset q, \neg q, p \rightarrow \neg q} \supset \mathcal{L}}{\overline{p \supset q, \neg q \rightarrow \neg p} \supset \mathcal{R}} \\
\frac{\overline{p \supset q, \neg q \rightarrow \neg p} \supset \mathcal{R}}{\overline{p \supset q \rightarrow \neg q \supset \neg p} \supset \mathcal{R}} \\
\frac{\overline{p \supset q \rightarrow \neg q \supset \neg p} \supset \mathcal{R}}{\rightarrow (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)} \supset \mathcal{R}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{q \supset r, p \rightarrow p, r} \text{ hyp.} \quad \overline{r, q \supset r, p \rightarrow r} \text{ hyp.}}{\overline{p \supset r, q \supset r, p \rightarrow r} \supset \mathcal{L}} \quad \frac{\overline{p \supset r, q \rightarrow q, r} \text{ hyp.} \quad \overline{p \supset r, r, q \rightarrow r} \text{ hyp.}}{\overline{p \supset r, q \supset r, q \rightarrow r} \supset \mathcal{L}} \\
\frac{\overline{p \supset r, q \supset r, p \rightarrow r} \supset \mathcal{L} \quad \overline{p \supset r, q \supset r, q \rightarrow r} \supset \mathcal{L}}{\overline{p \supset r, q \supset r, p \vee q \rightarrow r} \supset \mathcal{L}} \quad \vee \mathcal{L} \\
\frac{\overline{p \supset r, q \supset r, p \vee q \rightarrow r} \supset \mathcal{L}}{\overline{p \supset r, q \supset r \rightarrow p \vee q \supset r} \supset \mathcal{R}} \\
\frac{\overline{p \supset r, q \supset r \rightarrow p \vee q \supset r} \supset \mathcal{R}}{\overline{p \supset r \rightarrow (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)} \supset \mathcal{R}} \\
\frac{\overline{p \supset r \rightarrow (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)} \supset \mathcal{R}}{\rightarrow (p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset (p \vee q \supset r))} \supset \mathcal{R}
\end{array}$$