

PREDIKAATLOOGIKA: PRENEKSKUJU

- Prenekskuju on valem $Q_1x_1 \dots Q_nx_n M$, kus Q_i on kvantorid ning M on kvantorivaba valem (nn maatriks).
- Iga valemi saab viia temaga loogiliselt ekvivalentsele prenekskujule, kirjutades kõigepealt ümber implikatsioonid ja kasutades seejärel

$$\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$$

$$\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$$

$$\forall x A \wedge B \Leftrightarrow \forall x (A \wedge B)$$

$$\exists x A \wedge B \Leftrightarrow \exists x (A \wedge B)$$

$$\forall x A \vee B \Leftrightarrow \forall x (A \vee B)$$

$$\exists x A \vee B \Leftrightarrow \exists x (A \vee B)$$

Viimases neljas samasuses ei tohi x vabalt esineda B -s.

- Vajadusel tuleb enne nende samasuste rakendamist seotud muutujaid ümber nimetada.

SKOLEMISEERIMINE

- Kvantoritest valemis on võimalik vabaneda, aga seda ei saa teha loogiliselt ekvivalentselt.
- Skolemiseerimine teisendab prenekskuju A kvantorivabaks valemiks A' , mis on kehtestatav parajasti siis, kui A on kehtestatav.
- Idee: $\forall x \exists y A(x, y)$ on kehtestatav parajasti siis, kui kehtestatav on $A(x, f(x))$, kus f on uus unaarne funktsioonisümbol.
- Skolemiseerimine: kvantorid jäetakse ära, üldsuskvantoriga seotud muutuja esinemised jäävad paika, eksistentsikvantoriga seotud muutuja y esinemised asendatakse termiga $f(x_1, \dots, x_n)$, kus n on antud eksistentsikvantorile eelnenud üldsuskvantorite arv, x_1, \dots, x_n on vastavad seotud muutujad ning f on uus n -kohaline funktsioonisümbol.
Nt. $\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 A(x_1, y_1, x_2, y_2)$ asendatakse $A(x_1, f(x_1), x_2, g(x_1, x_2))$, kus f on uus 1-kohaline ja g uus 2-kohaline funktsioonisümbol.

DUAALNE TEGEVUS: HERBRANDISEERIMINE

- Tulenevalt duaalsusprintsibist on olemas ka skolemiseerimisele dualne tegevus. Herbrandiseerimine teisendab prenekskuju A kvantorivabaks valemiks A' , mis on üldkehtiv parajasti siis, kui A on üldkehtiv (vrd.: skolemiseerimise korral oli meil tegu ekvivalentsiga kehtestatavuse suhtes).
- Herbrandiseerimine: kvantorid jäetakse ära, eksistentsikvantoriga seotud muutuja esinemised jäävad paika, aga üldsuskvantoriga seotud muutuja y esinemised asendatakse termiga $f(x_1, \dots, x_n)$, kus n on antud üldsuskvantorile eelnenud eksistentsikvantorite arv, x_1, \dots, x_n on vastavad seotud muutujad ning f on uus n -kohaline funktsioonisümbol.
Nt. $\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 A(x_1, y_1, x_2, y_2)$ asendatakse $A(c, y_1, f(y_1), y_2)$, kus c on uus 0-kohaline funktsioonisümbol (konstant) ja f on uus 1-kohaline funktsioonisümbol.

KLAUSELKUJU

- Predikaatloogikas loetakse literaaliks atomaarvalemite või selle eitust; klausel (elementaardisjunktsioon) on literaalide lõplik disjunktsioon.
- Klauselkuju (konjunktiivne normaalkuju) on klauslite lõplik konjunktsioon.
- Valemite viimine kehtestatavuse mõttes ekvivalentsele (kvantorivabale) klauselkujule:
 - viia valem prenekskujule,
 - viia prenekskuju maatriks konjunktiivsele normaalkujule (nagu lauseloogikas),
 - skolemiseerida.

PREDIKAATLOOGIKA: HILBERTI SÜSTEEM

- Sarnaselt lauseloogikaga, saab ka predikaatloogika jaoks defineerida adekvaatse Hilberti süsteemi, mis on korrektne ja täielik (st. valemi tõestatavus on samaväärne tema üldkehtivusega).
- Aksiomid on nagu lausearvutuse juures pluss:

$$\forall x(A \supset B) \supset (A \supset \forall xB) \quad x \text{ tohi ei esineda vabalt } A\text{-s}$$

$$\forall xA \supset A[t/x]$$

$$A[t/x] \supset \exists xA$$

$$\forall x(A \supset B) \supset (\exists xA \supset B) \quad x \text{ tohi ei esineda vabalt } B\text{-s}$$

- Reegliteks on Modus Ponens pluss üldistusreegel:

$$\frac{A[y/x]}{\forall xA}$$

siin y ei tohi esineda vabalt valemis A ega üheski eelduses (loogikavälises aksiomis)