

MODAALLOOGIKA

- Modaalloogikad on üks standardloogikatest (klassikaline lause- ja predikaatloogika) hälbivaid loogikasüsteemide liike.

Modaalloogikate eritunnuseks on täiendavad loogilised konstandid, nn modaalsed operaatorid ehk modaalsused, paratamatus ja võimalikkus.

Modaalsustega saab laiendada nii lauseloogikat kui ka predikaatloogikat. Meie piirdume modaliseeritud lauseloogikaga.

- Algas filosoofilises loogikas. Tänapäeval kasutatakse modaalloogikaid arvutiteaduses laialdaselt olulise töövahendina süsteemide spetsifitseerimisel ja verifitseerimisel, samuti arutlemises agentsüsteemide üle intellektitehnikas.
- Üks ühine süntaks, mille jaoks on mitmeid semantikaid. St pole üht ja ainsat modaalloogikat, vaid lai modaalloogikate spekter, mida ühendab sama süntaks.

MODAALLOOGIKAD: SÜNTAKS

- Lauseloogiline signatuur on tähestik $PC = \{p, q, \dots\}$, mille sümboleid nimetatakse lausesümboliteks (lausekonstantideks).
- (Lause-)modaalloogika valemid (üle selle signatuuri) on hulk väljendeid F_{ma} , mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
 - kõik lausesümbolid on valemid (nn atomaarvalemid);
 - \top, \perp on valemid;
 - kui A on valem, siis $\neg A$ on samuti valem;
 - kui A, B on valemid, siis $A \wedge B, A \vee B, A \supset B$ on ka valemid;
 - kui A on valem, siis $\Box A$ (paratamatu, et A), $\Diamond A$ (võimalik, et A) on ka valemid.
- Sümboliteid \Box (paratamatus), \Diamond (võimalikkus) nimetatakse modaalsusteks operaatoriteks ehk modaalsusteks.

MODAALLOOGIKAD: SEMANTIKA

- Olulised modaalloogikad jagunevad kaheks: normaalsed ja mittenormaalised (klassikalised) modaalloogikad. Meie räägime normaalsetest modaalloogikatest, nende semantika põhineb Kripke raamidil ja struktuuridel. Mittenormaalsete modaalloogikate semantika põhineb naabrusraamidil ja -struktuuridel.
- Idee: Valemeid interpreteeritakse struktuuris nn võimalike maailmade (asjade seisude) suhtes.
 - A kehtib etteantud maailmas, kui A kehtib igas sellest maailmast saavutatavas (ehk sellele maailmale alternatiivses) maailmas.
 - ◇ A kehtib etteantud maailmas, kui A kehtib vähemalt ühes sellest maailmast saavutatavas maailmas.

- *Kripke* ehk *relatsiooniline raam* [frame] on paar $F = (W, R)$, kus W on mittetühi hulk, mille elemente nimetatakse (*võimalikeks*) *maailmadeks* [possible worlds] ning R on binaarne seos sellel, mida nimetatakse *saavutatavuse seoseks* [accessibility relation].
- Raam $F = (W, R)$ on
 - seriaalne, kui iga $w \in W$ jaoks leidub $w' \in W$ nii, et $wR'w$,
 - refleksiivne, kui iga $w \in W$ puhul wRw ,
 - sümmeetriline, kui iga $w, w' \in W$ puhul sellest, et wRw' jäeldub, et $w'Rw$,
 - transitiivne, kui iga $w, w', w'' \in W$ puhul sellest, et wRw' ja $w'Rw''$ jäeldub, et wRw'' ,
 - eukleidiline, kui iga $w, w', w'' \in W$ puhul sellest, et wRw' ja wRw'' jäeldub, et $w'Rw''$.
- Mitte kõik ülaltoodud raamitingimused pole sõltumatud, nt seriaalsusest, sümmeetrilisusest ja transitiivsusest jäeldub refleksiivsus jne.

- Olgu $PC = \{p, q, \dots\}$ fikseeritud lauseloogiline signatuur, st lausesümbolite tähestik. Siis *Kripke* ehk *relatsiooniline struktuur* selle signatuuri jaoks on kolmik $M = (W, R, I)$, kus
 - (W, R) on raam ning
 - I on *interpretatsiooniks* nimetatav funktsioon $PC \times W \rightarrow \{1, 0\}$ ehk tõeväärtuse omistus igale lausesümbolile igas maailmas.

- Lausemodaalloogiliste valemite *väärtustus* etteantud struktuuris $M = (W, R, I)$ on funktsioon $\llbracket \cdot \rrbracket^{M, \cdot} : \text{Fma} \times W \rightarrow \{1, 0\}$, mis on defineeritud induktsiooniga järgmiselt:
 - $\llbracket p \rrbracket^{M, w} = I(w, p)$, kui p on lausesümbol;
 - $\llbracket \top \rrbracket^{M, w} = 1$, $\llbracket \perp \rrbracket^{M, w} = 0$;
 - $\llbracket \neg A \rrbracket^{M, w} = 1 - \llbracket A \rrbracket^{M, w}$;
 - $\llbracket A \wedge B \rrbracket^{M, w} = \min(\llbracket A \rrbracket^{M, w}, \llbracket B \rrbracket^{M, w})$;
 - $\llbracket A \vee B \rrbracket^{M, w} = \max(\llbracket A \rrbracket^{M, w}, \llbracket B \rrbracket^{M, w})$;
 - $\llbracket A \supset B \rrbracket^{M, w} = \max(1 - \llbracket A \rrbracket^{M, w}, \llbracket B \rrbracket^{M, w})$;
 - $\llbracket \Box A \rrbracket^{M, w} = \min_{w' \in W, w R w'} (\llbracket A \rrbracket^{M, w'})$;
 - $\llbracket \Diamond A \rrbracket^{M, w} = \max_{w' \in W, w R w'} (\llbracket A \rrbracket^{M, w'})$.
- Valem A loetakse struktuuri M maailmas w tõeseks (tähis $M, w \models A$, kui $\llbracket A \rrbracket^{M, w} = 1$).

- On lihtne näha, et iga M korral
 - $M, w \models p$ parajasti siis, kui $I(p, w) = 1$, kui p on lausesümbol;
 - $M, w \models \top$ alati; $M, w \models \perp$ mitte kunagi;
 - $M, w \models \neg A$ parajasti siis, kui $M, w \not\models A$;
 - $M, w \models A \wedge B$ parajasti siis, kui $M, w \models A$ ja $M \models B$;
 - $M, w \models A \vee B$ parajasti siis, kui $M, w \models A$ või $M, w \models B$;
 - $M, w \models A \supset B$ parajasti siis, kui $M, w \not\models A$ või $M, w \models B$;
 - $M, w \models \Box A$ parajasti siis, kui iga $w' \in W$, wRw' korral $M, w' \models A$;
 - $M, w \models \Diamond A$ parajasti siis, kui vähemalt ühe $w' \in W$, wRw' korral $M, w' \models A$;
- Öeldakse, et struktuur M kehtestab A , A kehtib M -is, A on M -is tõene ehk M on A mudel (tähis $M \models A$), kui A on tõene M -i igas maailmas.
- Öeldakse, et raam F kehtestab A , A kehtib F -is ehk A on F -is tõene (tähis $F \models A$), kui A on tõene F -i igas struktuuris.

- Öeldakse, et valem A on üldkehtiv mingis raamide klassis (tähis $\models A$), kui iga selle klassi raam kehtestab A .
- Olulised normaalsed modaalloogikad on igaüks määratud mingi raamiklassiga.

K kõik raamid

$D = KD$ seriaalsed raamid

$T = KT$ refleksiivsed raamid

$S4 = KT4$ refleksiivsed-transitiivsed raamid

$S5 = KT5 = KT4B$ refleksiivsed-transitiivsed-sümmeetrilised raamid

$Br = KTB$ refleksiivsed-sümmeetrilised raamid

- Näiteid tautoloogiatest:

Loogikas K:

$$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$$

$$\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$$

$$\Box(A \wedge B) \equiv \Box A \wedge \Box B$$

$$\Box(A \vee B) \supset \Box A \vee \Diamond B$$

MODAALLOOGIKAD: HILBERTI SÜSTEEMID

- Normaalse loogika K Hilberti süsteem:
 - lauseloogika aksioomiskeemid ja tuletusreeglid:

$$A \supset (B \supset A)$$

$$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(A \supset \neg B) \supset ((A \supset B) \supset \neg A)$$

$$\neg\neg A \supset A$$

⊤

⊥ ⊃ C

$$A \supset (B \supset A \wedge B) \quad (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$$

$$A \wedge B \supset A$$

$$A \supset A \vee B$$

$$A \wedge B \supset B$$

$$B \supset A \vee B$$

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$

– aksiomiskeem K:

$$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$$

– võimalikkus paratamatuse kaudu:

$$\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$$

– tuletusreegel NR (necessitation rule):

$$\frac{A}{\Box A}$$

• Täiendavad aksiomiskeemid:

seriaalsus $\Box A \supset \Diamond A$

refleksiivsus $\Box A \supset A$

sümmeetrilisus $A \supset \Box \Diamond A$

transitiivsus $\Box A \supset \Box \Box A$

eukleidilisuus $\Diamond A \supset \Box \Diamond A$