Lauseloogika: Loomulik tuletus

- Loomuliku tuletuse süsteemid on liik tõestussüsteeme nagu Hilberti süsteemidki. Neile on omane, et igal konnektiivil on oma sissetoomise (introduction) ja väljaviimise (elimination) reeglid.
- Loomuliku tuletuse süsteeme võib esitada mitmel moel, siin vaatame standardesitust (à la Prawitz) ja sekventsiesitust (à la Gentzen).
- Standardesituse omapäraks on, et reeglite eeldused võivad olla tingimuslikud: esinevad reeglid kujul

$$\dfrac{\begin{array}{c} H_{11} \quad \dots \quad H_{1m_1} \\ \vdots \\ A_1 \end{array} \qquad \dots \qquad \begin{array}{c} H_{n1} \quad \dots \quad H_{nm_n} \\ \vdots \\ A_n \end{array}}{B}$$

- Siin valemid $H_{11}, \ldots, H_{1m_1}, \ldots, H_{n1}, \ldots, H_{nm_n}$ on reegli erinevate eelduste eeldused (hüpoteesid).
- Sellise tuletusreegli sisu on, et kui $\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A_1\end{array}$ on valemi A tuletus valemitehulgast $\Gamma \cup \{H_{11}, \ldots, H_{1m_1}\}$ ja ... ja $\begin{array}{c}\mathcal{D}_n\\ A_n\end{array}$ on valemi A tuletus valemitehulgast $\Gamma \cup \{H_{n1}, \ldots, H_{nm_n}\}$, siis $\dfrac{\begin{array}{ccc}\mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_n\\ A_1 & \ldots & A_n\end{array}}{B}$ on valemi B tuletus valemitehulgast Γ.
  Seega: kasutadaolevad hüpoteesid on tuletuse alamtuletustes erinevad.

- Lauseloogika loomuliku tuletuse standardesitus:
  Aksioomiskeeme pole, tuletusreeglid on järgmised:

$$\frac{}{\top}\ \top\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{\bot}{C}\ \bot\mathcal{E}\ \text{(EFQ)}$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\mathcal{E}_L \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge\mathcal{E}_R$$

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_L \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_R \qquad\qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ \vee\mathcal{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \supset B}\ \supset\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{A \supset B \quad A}{B}\ \supset\mathcal{E}\ \text{(MP)}$$

- Eitust vaadatakse sisuliselt kui erikujulist implikatsiooni ($\neg A = A \supset \bot$):

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg A}\,\neg\mathcal{I} \qquad\qquad \dfrac{\neg A \quad A}{\bot}\,\neg\mathcal{E}$$

- Lisaks on tarvis veel üht reeglit (selle ärajätmisega saaksime tuletussüsteemi intuitsionistlikule lauseloogikale):

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\,\text{dil.}$$

- Alternatiive viimasele reeglile:

$$\dfrac{}{A \vee \neg A}\,\text{TND} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{A}\,\text{RAA} \qquad\qquad \dfrac{\neg\neg A}{A}\,\text{DNE}$$

- Nimede seletusi:
  - EFQ: ex falso quodlibet, väärusest mida tahes
  - MP: modus ponens
  - dil.: dilemma
  - TND: tertium non datur, kolmandat pole antud (välistatud kolmanda seadus)
  - RAA: reductio ad absurdum, taandamine absurdile
  - DNE: double negation elimination

- Näiteid:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{+2}{p \vee r}$}
\AxiomC{$\overset{+1}{(p \supset q) \wedge (r \supset s)}$}
\RightLabel{$\wedge\mathcal{E}_L$}
\UnaryInfC{$p \supset q$}
\AxiomC{$\overset{+3}{p}$}
\RightLabel{$\supset \mathcal{E}$}
\BinaryInfC{q}
\RightLabel{$\vee\mathcal{I}_L$}
\UnaryInfC{$q \vee s$}
\AxiomC{$\overset{+1}{(p \supset q) \wedge (r \supset s)}$}
\RightLabel{$\wedge\mathcal{E}_R$}
\UnaryInfC{$r \supset s$}
\AxiomC{$\overset{+4}{r}$}
\RightLabel{$\supset \mathcal{E}$}
\BinaryInfC{s}
\RightLabel{$\vee\mathcal{I}_R$}
\UnaryInfC{$q \vee s$}
\RightLabel{$\vee\mathcal{E}, -3, -4$}
\TrinaryInfC{$q \vee s$}
\RightLabel{$\supset \mathcal{I}, -2$}
\UnaryInfC{$p \vee r \supset q \vee s$}
\RightLabel{$\supset \mathcal{I}, -1$}
\UnaryInfC{$(p \supset q) \wedge (r \supset s) \supset (p \vee r \supset q \vee s)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{+1}{q}$}
\RightLabel{$\supset \mathcal{I}, -3$}
\UnaryInfC{$p \supset q$}
\RightLabel{$\vee\mathcal{I}_L$}
\UnaryInfC{$(p \supset q) \vee (q \supset r)$}
\AxiomC{$\overset{+2}{\neg q}$}
\AxiomC{$\overset{+4}{q}$}
\RightLabel{$\neg\mathcal{E}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\bot\mathcal{E}$}
\UnaryInfC{r}
\RightLabel{$\supset \mathcal{I}, -4$}
\UnaryInfC{$q \supset r$}
\RightLabel{$\vee\mathcal{I}_R$}
\UnaryInfC{$(p \supset q) \vee (q \supset r)$}
\RightLabel{Dilemma, $-1, -2$}
\BinaryInfC{$(p \supset q) \vee (q \supset r)$}
\end{prooftree}
$$

- Loomuliku tuletuse sekventsiesituse idee on muuta arvepidamine parajasti kasutada olevate hüpoteeside üle ilmutatuks.
- Tõestatavateks/tuletatavateks objektideks pole mitte valemid, vaid nn sekventsid, so figuurid kujul $\Gamma \to A$, kus Γ on lõplik (võibolla tühi) hulk valemeid (NB! hulk, mitte list või multihulk, st järjestus, kordsus ei loe) ning A on valem.
- (Hulkade kirjutamiseks kasutame lihtsustatud süntaksit: A_1, ..., A_n tähistab hulka $\{A_1, \ldots, A_n\}$; Γ, A tähistab hulka $\Gamma \cup \{A\}$.)
- Sekventsi $\Gamma \to A$ tõestatavus on sama, mis valemi A tuletatavus valemihulgast Γ loomuliku tuletuse varemantud esituses.
- Valem A loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents $\to A$.
- Sekventsi $A_1, \ldots, A_n \to B$ võib samastada valemiga $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$; meenutame, et 0 valemi konjuktsioon on $\top$.

- Sekventsiesituse aksioomiskeemid ja tuletusreeglid: (Paneme tähele, et tingimuslike eeldustega reegleid enam pole.)

$$\frac{}{\Gamma, A \rightarrow A}\ \text{hyp.}$$

$$\frac{}{\Gamma \rightarrow \top}\ \top\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \bot}{\Gamma \rightarrow C}\ \bot\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \wedge B}\ \wedge\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A \wedge B}{\Gamma \rightarrow A}\ \wedge\mathcal{E}_L \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A \wedge B}{\Gamma \rightarrow B}\ \wedge\mathcal{E}_R$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_L \qquad \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B}\ \vee\mathcal{I}_R \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A \vee B \quad \Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, B \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C}\ \vee\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B}\ \supset\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A \supset B \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow B}\ \supset\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow \bot}{\Gamma \rightarrow \neg A}\ \neg\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \neg A \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow \bot}\ \neg\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, \neg A \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C}\ \text{dil.}$$

Lauseloogika: Sekventsiarvutus

- Sekventsiarvutused on kolmas alternatiiv tõestussüsteeme Hilberti süsteemide ja loomuliku tuletuse süsteemide kõrval. Neid ei tohi segamini ajada loomuliku tuletuse sekventsiesitustega.
- Kui loomulikus tuletuses olid igal konnektiivil oma sissetoomise ja väljaviimise reeglid, siis sekventsiarvutustes on igal konnektiivil oma parema ja vasaku poole reeglid.
- Sekventsid on sedapuhku nö mitmejärelduselised: sekvents on figuur kujul $\Gamma \to \Delta$, kus nii Γ kui ka Δ on lõplikud (võibolla tühjad) hulgad valemeid (taas hulgad, mitte listid või multihulgad, st järjestus, kordsus ei loe).
- Valem A loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents $\to A$.
- Sekventsi $A_1, \ldots, A_n \to B_1, \ldots, B_m$ võib samastada valemiga $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$; meenutame, et 0 valemi konjuktsioon on $\top$ ja 0 valemi disjunktsioon on $\bot$.

- Sekventsiarvutuse aksioomiskeemid ja tuletusreeglid (tagasisuunalisele otsimisele häälestatud versiooni jaoks):

$$\frac{}{\Gamma, A \rightarrow A, \Delta}\ \text{hyp}$$

$$\frac{}{\Gamma \rightarrow \top, \Delta}\ \top\mathcal{R} \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad \frac{}{\Gamma, \bot \rightarrow \Delta}\ \bot\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \land B, \Delta}\ \land\mathcal{R} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \land B \rightarrow \Delta}\ \land\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \lor B, \Delta}\ \lor\mathcal{R} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \lor B \rightarrow \Delta}\ \lor\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Delta}\ \supset\mathcal{R} \qquad\qquad \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta \quad \Gamma, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \supset B \rightarrow \Delta}\ \supset\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \neg A, \Delta}\ \neg\mathcal{R} \qquad\qquad \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \rightarrow \Delta}\ \neg\mathcal{L}$$

Näiteid:

$$
\dfrac{
  \dfrac{}{p \wedge q \supset r, p \rightarrow p, r}\ \text{hyp.}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{q, p \rightarrow p, r}\ \text{hyp.}
      \quad
      \dfrac{}{q, p \rightarrow q, r}\ \text{hyp.}
    }{q, p \rightarrow p \wedge q, r}\ \wedge\mathcal{R}
    \quad
    \dfrac{}{q, r, p \rightarrow r}\ \text{hyp.}
  }{q, p \wedge q \supset r, p \rightarrow r}\ \supset\mathcal{L}
}{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{p \supset q, p \wedge q \supset r, p \rightarrow r}{p \supset q, p \wedge q \supset r \rightarrow p \supset r}\ \supset\mathcal{R}
    }{(p \supset q) \wedge (p \wedge q \supset r) \rightarrow p \supset r}\ \wedge\mathcal{L}
  }{\rightarrow (p \supset q) \wedge (p \wedge q \supset r) \supset (p \supset r)}\ \supset\mathcal{R}
}\ \supset\mathcal{L}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \rightarrow p, q}\ \text{hyp.} \qquad \dfrac{}{q, p \rightarrow q}\ \text{hyp.}}{p \supset q, p \rightarrow q}\ \supset \mathcal{L}}{p \supset q, \neg q, p \rightarrow}\ \neg \mathcal{L}}{p \supset q, \neg q \rightarrow \neg p}\ \neg \mathcal{R}}{p \supset q \rightarrow \neg q \supset \neg p}\ \supset \mathcal{R}}{\rightarrow (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)}\ \supset \mathcal{R}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q \supset r, p \rightarrow p, r}\ \text{hyp.} \qquad \dfrac{}{r, q \supset r, p \rightarrow r}\ \text{hyp.}}{p \supset r, q \supset r, p \rightarrow r}\ \supset \mathcal{L} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \supset r, q \rightarrow q, r}\ \text{hyp.} \qquad \dfrac{}{p \supset r, r, q \rightarrow r}\ \text{hyp.}}{p \supset r, q \supset r, q \rightarrow r}\ \supset \mathcal{L}}{p \supset r, q \supset r, p \vee q \rightarrow r}\ \vee \mathcal{L}}{p \supset r, q \supset r \rightarrow p \vee q \supset r}\ \supset \mathcal{R}}{p \supset r \rightarrow (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)}\ \supset \mathcal{R}}{\rightarrow (p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset (p \vee q \supset r))}\ \supset \mathcal{R}
$$