Ajaloogikad

- Ajaloogikates (*temporal logics*) saab arutleda asjade dünaamika üle ajas.
- Peame silmas asjade seisude loogilist järgnevust, mitte reaalaega.
- Kaks liiki: lineaaraja (*linear-time*) loogikad ja hargneva aja (*branching-time*) loogikad.
- Lineaaraja korral suhtutakse asjade dünaamikasse deterministlikult.
- Hargnev aeg möönab arengute paljususe võimalust.

Lineaaraja loogika LTL: süntaks

- Signatuur on antud tähestikuga $\mathrm{PC} = \{p, q, \ldots\}$, mille sümboleid nimetatakse lausesümboliteks ja agendinimedeks.
- Valemite hulk Fma on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
  - kõik lausesümbolid on valemid (nn atomaarvalemid);
  - $\top$, $\bot$ on valemid;
  - kui A on valem, siis $\neg A$ on samuti valem;
  - kui A, B on valemid, siis $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$ on ka valemid;
  - kui A on valem, siis $\mathsf{X}A$ ("järgmisel hetkel A", next time A) on valem;
  - kui A on valem, siis $\mathsf{G}A$ ("alati A", globally A) ja $\mathsf{F}A$ ("ükskord A", finally A) on valemid;
  - kui A ja B on valemid, siis $A\,\mathsf{U}\,B$ ("A kuni B", A until B) ja $A\,\mathsf{R}\,B$ ("A vabastab B", A releases B) on valemid.

Lineaaraja loogika LTL: semantika

- Kripke struktuur on kolmik $M = (S, R, I)$, kus S on mittetühi hulk, mille elemente mõistame kui olekuid, R on binaarne seos sellel (ajaline vahetu järgnevus) ning I on funktsioon $\mathrm{PC} \times S \to \{1, 0\}$.
- Seos R peab olema seriaalne (igale olekule järgneb vahetult vähemalt üks olek) ja funktsionaalne (igale olekule järgneb vahetult ülimalt üks olek).
- Oleku s jaoks tähistagu s_1 unikaalset olekut, mille puhul sRs_1. Sarnaselt saame s_n-iga tähistada unikaalse oleku, mille puhul $s = s_0 R s_1 \ldots s_{n-1} R s_n$.

- Valemite väärtustus etteantud struktuuris on määratud funktsiooniga $[\![\cdot]\!]^{M,\cdot} : \mathrm{Fma} \times S \to \{1, 0\}$:
  - $M, s \models p$ parajasti siis, kui $I(s, p) = 1$, kui p on lausesümbol;
  - $M, s \models \top$; $M, s \not\models \bot$;
  - $M, s \models \neg A$ parajasti siis, kui $M, s \not\models A$;
  - $M, s \models A \wedge B$ parajasti siis, kui $M, s \models A$ ja $M, s \models B$;
  - $M, s \models A \vee B$ parajasti siis, kui $M, s \models A$ või $M, s \models B$;
  - $M, s \models A \supset B$ parajasti siis, kui $M, s \not\models A$ või $M, s \models B$;
  - $M, s \models \mathrm{X}A$ parajasti siis, kui $M, s_1 \models A$;
  - $M, s \models \mathrm{G}A$ parajasti siis, kui iga $k \leq 0$ jaoks $M, s_k \models A$;
  - $M, s \models \mathrm{F}A$ parajasti siis, kui mõne $k \geq 0$ jaoks $M, s_k \models A$;
  - $M, s \models A \,\mathrm{R}\, B$ parajasti siis, kui iga $k \geq 0$ jaoks $M, s_k \models B$ või mõne $j < k$ jaoks $M, s_j \models A$;
  - $M, s \models A \,\mathrm{U}\, B$ parajasti siis, kui mõne $k \geq 0$ jaoks $M, s_k \models B$ ja iga $j < k$ jaoks $M, s_j \models A$.

Tuletatud ajaoperaatoreid

- $\mathsf{G}^{\infty} A =_{\mathrm{df}} \mathsf{FG} A$ — mingist hetkest alates jäävalt A
- $\mathsf{F}^{\infty} A =_{\mathrm{df}} \mathsf{GF} A$ — lõpmata sageli A
- $A \, \mathsf{B} \, B =_{\mathrm{df}} A \, \mathsf{R} \, \neg B$ — A enne B-d

Olulisi tautoloogiaid ja loogilisi järelduvusi

$$\mathsf{X}A \equiv \neg\mathsf{X}\neg A$$
$$\mathsf{F}A \equiv \neg\mathsf{G}\neg A$$
$$A \,\mathsf{U}\, B \equiv \neg(\neg A \,\mathsf{R}\, \neg B)$$
$$\mathsf{G}A \equiv \bot \,\mathsf{R}\, A$$
$$\mathsf{F}A \equiv \top \,\mathsf{U}\, A$$

$$\mathsf{G}A \supset A \wedge \mathsf{X}\mathsf{G}A$$

$$\frac{C \supset A \wedge \mathsf{X}C}{C \supset \mathsf{G}A}$$

$$A \,\mathsf{R}\, B \supset B \wedge (A \vee \mathsf{X}(A \,\mathsf{R}\, B))$$

$$\frac{C \supset B \wedge (A \vee \mathsf{X}C)}{C \supset A \,\mathsf{R}\, B}$$