

Teadmise ja tõekspidamise loogikad

- Teadmise ja tõekspidamise (ehk episteemsed ja doxastilised) loogikad (logics of knowledge and belief / epistemic and doxastic logics) on liik modaalloogikat, milles saab arutleda subjektide (“agentide”) teadmiste ja tõekspidamiste üle.
- Teadmised ja tõekspidamised esitavad agendi “mudelit” tegelikkusest.
- Teadmised peavad olema tegelikkusega kooskõlas, tõekspidamiste korral on nõutud ainult “mudeli” sisemine kooskõla.
- Sarnaselt dünaamilisele loogikale on need loogikad mitmemodaalsed, st paratamatuse ja võimalikkuse modaalsused on indekseeritud.
- Kõige tavalisem on multimodaalne KT45 - teadmise loogika.

Teadmise ja tõekspidamise loogikad: Süntaks

- Signatuuris on kaks tähestikku $PC = \{p, q, \dots\}$ ja $Agt = \{a, b, \dots\}$, mille sümboleid nimetatakse lausesümboliteks ja agendinimedeks.
- Keeles on üks kategooria avaldisi—valemid \mathcal{F}_{ma} —, mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
 - kõik lausesümbolid on valemid (nn atomaarvalemid);
 - \top, \perp on valemid;
 - kui A on valem, siis $\neg A$ on samuti valem;
 - kui A, B on valemid, siis $A \wedge B, A \vee B, A \supset B$ on ka valemid;
 - kui a on agendinimi ja A on valem, siis $K_a A$ on valem,
 - kui A on valem, siis $E A, C A$ ja $D A$ on valemid.
- $K_a A$ - agent a teab/peab tõeks, et A
 $E A$ - kõik agendid teavad, et A
 $C A$ - on üldine teadmine, et A (“iga loll teab”)
 $D A$ - süsteem teab (on hajutatud teadmine), et A (“tark mees teab”)

Teadmise ja tõekspidamise loogikad: Semantika

- Kripke struktuur on kolmik $M = (W, R, I)$, kus W on mittetühi hulk, mille elemente nimetatakse võimalikeks maailmadeks, R on agendinimedega indekseeritud binaarsete seoste pere sellel ning I on funktsioon $PC \times W \rightarrow \{1, 0\}$.
- Teadmiste puhul nõutakse, et R_a on refleksiivne, transitiivne ja eukleidiline (millega ta on ekvivalentsiseos).
Tõekspidamiste puhul asendatakse refleksiivsus seriaalsusega.

- Valemite väärtustus etteantud struktuuris on määratud funktsiooniga $\llbracket \cdot \rrbracket^{M,w} : \text{Fma} \times W \rightarrow \{1, 0\}$:

- $\llbracket p \rrbracket^{M,w} = I(w, p)$, kui p on lausesümbol;
- $\llbracket \top \rrbracket^{M,w} = 1$, $\llbracket \perp \rrbracket^{M,w} = 0$;
- $\llbracket \neg A \rrbracket^{M,w} = 1 - \llbracket A \rrbracket^{M,w}$;
- $\llbracket A \wedge B \rrbracket^{M,w} = \min(\llbracket A \rrbracket^{M,w}, \llbracket B \rrbracket^{M,w})$;
- $\llbracket A \vee B \rrbracket^{M,w} = \max(\llbracket A \rrbracket^{M,w}, \llbracket B \rrbracket^{M,w})$;
- $\llbracket A \supset B \rrbracket^{M,w} = \max(1 - \llbracket A \rrbracket^{M,w}, \llbracket B \rrbracket^{M,w})$;
- $\llbracket K_a A \rrbracket^{M,w} = \min_{w' \in W, wR_a w'} (\llbracket A \rrbracket^{M,w'})$;
- $\llbracket EA \rrbracket^{M,w} = \min_{w' \in W, a \in \text{Agt}, wR_a w'} (\llbracket A \rrbracket^{M,w'})$;
- $\llbracket CA \rrbracket^{M,w} =$
 $\min_{n \geq 1, w_0, \dots, w_n \in W, a_0, \dots, a_{n-1} \in \text{Agt}, w = w_0 R_{a_0} \dots R_{a_{n-1}} w_n = w'} (\llbracket A \rrbracket^{M,w'})$;
- $\llbracket DA \rrbracket^{M,w} = \min_{w' \in W, wR_a w'} \text{for all } a \in \text{Agt} (\llbracket A \rrbracket^{M,w'})$.

Olulisi tautoloogiaid ja järelduvusi

- Need tautoloogiad ja reeglid on KT45 aksioomid ja reeglid:

$$K_a(A \supset B) \supset (K_a A \supset K_a B)$$

$$\frac{A}{K_a A}$$

$$K_a A \supset A$$

$$K_a A \supset K_a K_a A$$

$$\neg K_a A \supset K_a \neg K_a A$$

$$E A \equiv \bigwedge_{a \in \text{Agt}} K_a A$$

$$C A \supset \bigwedge_{a \in \text{Agt}} K_a(A \wedge C A)$$

$$B \supset \bigwedge_{a \in \text{Agt}} K_a(A \wedge B)$$

$$\frac{B \supset \bigwedge_{a \in \text{Agt}} K_a(A \wedge B)}{B \supset C A}$$

$$K_a A \supset D A$$

- Need valemid pole üldkehtivad:

$$EA \supset EEA$$

$$\neg EA \supset E\neg EA$$

$$DA \supset \bigvee_{a \in \text{Agt}} K_a A$$

“Iga loll” ja “tark mees” kui agendid

- Igaühe teadmist, üldteadmist ja hajutatud teadmist võib võtta kui teatud eriagentide e , c , d teadmist.
- Saaks defineerida:
 - $wR_e w'$ parajasti siis, kui mingi agendi a jaoks $wR_a w'$;
 - $wR_c w'$ parajasti siis, kui mingite $n \geq 1$, $w_0, \dots, w_n \in W$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \text{Agt}$ jaoks $w = w_0 R_{a_0} \dots R_{a_{n-1}} w_n = w'$,
 - $wR_d w'$ parajasti siis, kui iga agendi a jaoks $wR_a w'$.
- Agent d (“wise man”) on nagu tavalised teadvad agendid: saavutatavusseos on refleksiivne (tõde), transitiivne (positiivne introspektsioon) ja eukleidiline (negatiivne introspektsioon).
- Agendi e saavutatavusseos on refleksiivne, kui $\text{Agt} \neq \emptyset$.
- Agendi c saavutatavusseos on transitiivne ja eukleidiline, samuti refleksiivne, kui $\text{Agt} \neq \emptyset$.

Kolm tarka

- Kuningal on käepärast kolm punast ja kaks valget kübarat.
- Kuninga juures on kolm tarka. Ta asetab igaühele pähe kübara, nii et ükski tark iseenda kübarat ei näe, aga kõigi teiste omi näeb.
- Kõigi kuuldes leiavad aset järgmised vestlused.
- Kuningas küsib esimeselt targalt: Mis värvi on su kübar? Esimene tark vastab: Ma ei tea.
- Kuningas küsib teiselt targalt: Mis värvi on su kübar? Teine tark vastab: Ma ei tea.
- Kolmas tark ütleb: Ma tean, mis värvi minu kübar on.

- Tähendagu r_i , et *indal* targal on punane kübar peas.
- Tähistagu Γ järgmiste valemite konjunktsiooni:

$$\begin{array}{ll}
 r_1 \supset K_2 r_1 \wedge K_3 r_1 & \neg r_1 \supset K_2 \neg r_1 \wedge K_3 \neg r_1 \\
 r_2 \supset K_1 r_2 \wedge K_3 r_2 & \neg r_2 \supset K_1 \neg r_2 \wedge K_3 \neg r_2 \\
 r_3 \supset K_1 r_3 \wedge K_2 r_3 & \neg r_3 \supset K_1 \neg r_3 \wedge K_2 \neg r_3
 \end{array}$$

- Kehtivad järgmised loogilised järeldused:

$$\begin{array}{l}
 \Gamma, C(r_1 \vee r_2 \vee r_3), C(\neg K_1 r_1 \wedge \neg K_1 \neg r_1) \models C(r_2 \vee r_3) \\
 \Gamma, C(r_2 \vee r_3), C(\neg K_1 r_1 \wedge \neg K_1 \neg r_1) \models C r_3 \\
 C r_3 \models K_3 r_3
 \end{array}$$