

# Dünaamiline loogika

- Dünaamiline loogika on erijuhtum modaalloogikat, mille mõtteks on arutlemine programmide käitumise üle.
- Erinevalt tavalisest n-ö ühemodaalsest loogikast, on dünaamiline loogika mitmemodaalne. Modaalsused on indekseeritud toimingutega (programmidega).

## Dünaamiline loogika: Süntaks

- Dünaamilise loogika signatuur koosneb kahest tähestikust  $PC = \{p, q, \dots\}$  ja  $AC = \{a, b, \dots\}$ , mille sümboleid nimetatakse lausesümboliteks ja toimingusümboliteks.
- Keeles on kaks kategooriat avaldisi—valemid  $\mathbb{F}$  ja toiminguavaldised  $\text{Act}$ —, mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
  - kõik lausesümbolid on valemid (nn atomaarvalemid);
  - $\top, \perp$  on valemid;
  - kui  $A$  on valem, siis  $\neg A$  on samuti valem;
  - kui  $A, B$  on valemid, siis  $A \wedge B, A \vee B, A \supset B$  on ka valemid;
  - kui  $A$  on valem ja  $\alpha$  on toiming, siis  $[\alpha]A$  (pärast  $\alpha$  teostamist paramatult  $A$ ),  $\langle \alpha \rangle A$  (pärast  $\alpha$  teostamist võibolla  $A$ ) on ka valemid.

- kõik toimingusümbolid on toiminguavaldised;
- kui  $\alpha, \beta$  on toiminguavaldised, siis  $\alpha; \beta$  (esiteks  $\alpha$ , siis  $\beta$ ) on toiminguavaldis;
- kui  $\alpha, \beta$  on toiminguavaldised, siis  $\alpha \cup \beta$  (mittedeterministlik valik  $\alpha$  ja  $\beta$  vahel) on toiminguavaldis;
- kui  $\alpha$  on toiminguavaldis, siis  $\alpha^*$  ( $\alpha$  mittedeterministlik kordus) on toiminguavaldis;
- kui  $A$  on valem, siis  $A?$  ( $A$  test) on toiminguavaldis.

## Dünaamiline loogika: Semantika

- Dünaamilise loogika Kripke struktuur on kolmik  $M = (W, R, I)$ , kus  $W$  on mittetühi hulk, mille elemente nimetatakse võimalikeks maailmadeks,  $R$  on toimingusümbolitega indekseeritud binaarsete seoste pere sellel ning  $I$  on funktsioon  $PC \times W \rightarrow \{1, 0\}$ .
- Valemite ja toimingute väärtustused etteantud struktuuris on funktsioonid  $\llbracket \cdot \rrbracket^{M, \cdot} : \text{Fma} \times W \rightarrow \{1, 0\}$ ,  
 $\llbracket \cdot \rrbracket^{M, \cdot} : \text{Act} \rightarrow \mathcal{P}(W \times W)$ :
  - $\llbracket p \rrbracket^{M, w} = I(w, p)$ , kui  $p$  on lausesümbol;
  - $\llbracket \top \rrbracket^{M, w} = 1$ ,  $\llbracket \perp \rrbracket^{M, w} = 0$ ;
  - $\llbracket \neg A \rrbracket^{M, w} = 1 - \llbracket A \rrbracket^{M, w}$ ;
  - $\llbracket A \wedge B \rrbracket^{M, w} = \min(\llbracket A \rrbracket^{M, w}, \llbracket B \rrbracket^{M, w})$ ;
  - $\llbracket A \vee B \rrbracket^{M, w} = \max(\llbracket A \rrbracket^{M, w}, \llbracket B \rrbracket^{M, w})$ ;
  - $\llbracket A \supset B \rrbracket^{M, w} = \max(1 - \llbracket A \rrbracket^{M, w}, \llbracket B \rrbracket^{M, w})$ ;
  - $\llbracket [\alpha]A \rrbracket^{M, w} = \min_{w' \in W, w} [\alpha]_{M, w'}(\llbracket A \rrbracket^{M, w'})$ ;
  - $\llbracket \langle \alpha \rangle A \rrbracket^{M, w} = \max_{w' \in W, w} [\alpha]_{M, w'}(\llbracket A \rrbracket^{M, w'})$ .

- $w[[a]]^M w'$  parajasti siis, kui  $(w, w') \in R(a)$ ,
- $w[[\alpha; \beta]]^M w'$  parajasti siis, kui leidub  $w'' \in W$  nii, et  $w[[\alpha]]^M w''$  ja  $w''[[\beta]]^M w'$ ,
- $w[[\alpha \cup \beta]]^M w'$  parajasti siis, kui  $w[[\alpha]]^M w'$  või  $w[[\beta]]^M w'$ ,
- $w, [[\alpha^*]]^M w'$  parajasti siis, kui leiduvad  $n \geq 0$  ja  $w_0, \dots, w_n \in W$  nii, et  $w = w_0, w_0[[\alpha]]^M w_1, \dots, w_{n-1}[[\alpha]]^M w_n, w_n = w'$ ;
- $w[[A?]]^M w'$  parajasti siis kui  $w = w'$  ja  $[[A]]^{M,w} = 1$ .

# Programmeerimine dünaamilises loogikas

- Toiminguavaldised on kasutatavad programmeerimiskeelena:

$$\text{skip} = \top?$$

$$\text{fail} = \perp?$$

$$\text{if } A_1 \rightarrow \alpha_1 \mid \dots \mid A_n \rightarrow \alpha_n \text{ fi} = (A_1?; \alpha_1) \cup \dots \cup (A_n?; \alpha_n)$$

$$\text{do } A_1 \rightarrow \alpha_1 \mid \dots \mid A_n \rightarrow \alpha_n \text{ od} = (\text{if } A_1 \rightarrow \alpha_1 \mid \dots \mid A_n \rightarrow \alpha_n \text{ fi})^* \\ (\neg A_1 \wedge \dots \wedge \neg A_n)?$$

$$\text{if } A \text{ then } \alpha_0 \text{ else } \alpha_1 = \text{if } A \rightarrow \alpha_0 \mid \neg A \rightarrow \alpha_1 \text{ fi}$$

$$\text{while } A \text{ do } \alpha = \text{do } A \rightarrow \alpha \text{ od}$$

$$\text{repeat } \alpha \text{ until } A = \alpha; \text{while } \neg A \text{ do } \alpha$$

## Hilberti süsteem

- Dünaamilise loogika Hilberti süsteem on antud lauseloogika aksioomide, aksioomi K, reeglite MP ja NR (necessitation rule) ning aksioomidega:

$$\begin{aligned}[\alpha; \beta]A &\equiv [\alpha][\beta]A \\ [\alpha \cup \beta]A &\equiv [\alpha]A \wedge [\beta]A \\ [B?]A &\equiv B \supset A \\ [\alpha^*]A &\supset A \wedge [\alpha][\alpha^*]A \\ A \wedge [\alpha^*](A \supset [\alpha]A) &\supset [\alpha^*]A\end{aligned}$$