Modaalloogika

- Modaalloogikad on üks standardloogikatest (klassikaline lause- ja predikaatloogika) hälbivaid loogikasüsteemide liike.
  Modaalloogikate eritunnuseks on täiendavad loogilised konstandid, nn modaalsed operaatorid ehk modaalsused, paratamatus ja võimalikkus.
  Modaalsustega saab laiendada nii lauseloogikat kui ka predikaatloogikat. Meie piirdume modaliseeritud lauseloogikaga.
- Algus filosoofilises loogikas. Tänasel päeval kasutatakse modaalloogikaid arvutiteaduses laialdaselt olulise töövahendina süsteemide spetsifitseerimisel ja verifitseerimisel, samuti arutlemises agentsüsteemide üle intellektitehnikas.
- Üks ühine süntaks, mille jaoks on mitmeid semantikaid. St pole üht ja ainsat modaalloogikat, vaid lai modaalloogikate spekter, mida ühendab sama süntaks.

Modaalloogikad: süntaks

- Lauseloogiline signatuur on tähestik $\mathrm{PC} = \{p, q, \ldots\}$, mille sümboleid nimetatakse lausesümboliteks (lausekonstantideks).
- (Lause-)modaalloogika valemid (üle selle signatuuri) on hulk väljendeid Fma, mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
  - kõik lausesümbolid on valemid (nn atomaarvalemid);
  - $\top$, $\bot$ on valemid;
  - kui A on valem, siis $\neg A$ on samuti valem;
  - kui A, B on valemid, siis $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$ on ka valemid;
  - kui A on valem, siis $\Box A$ (paratamatu, et A), $\Diamond A$ (võimalik, et A) on ka valemid.
- Sümboleid $\Box$ (paratamatus), $\Diamond$ (võimalikkus) nimetatakse modaalseteks operaatoriteks ehk modaalsusteks.

Modaalloogikad: Semantika

- Olulised modaalloogikad jagunevad kaheks: normaalsed ja mittenormaalsed (klassikalised) modaalloogikad. Meie räägime normaalsetest modaalloogikatest, nende semantika põhineb Kripke raamidel ja struktuuridel. Mittenormaalsete modaalloogikate semantika põhineb naabrusraamidel ja -struktuuridel.
- Idee: Valemeid interpreteeritakse struktuuris nn võimalike maailmade (asjade seisude) suhtes.
  $\Box A$ kehtib etteantud maailmas, kui A kehtib igas sellest maailmast saavutatavas (ehk sellele maailmale alternatiivses) maailmas.
  $\Diamond A$ kehtib etteantud maailmas, kui A kehtib vähemalt ühes sellest maailmast saavutatavas maailmas.

- *Kripke* ehk *relatsiooniline raam* [frame] on paar $F = (W, R)$, kus W on mittetühi hulk, mille elemente nimetatakse *(võimalikeks) maailmadeks* [possible worlds] ning R on binaarne seos sellel, mida nimetatakse *saavutatavuse seoseks* [accessibility relation].
- Raam $F = (W, R)$ on
  - seriaalne, kui iga $w \in W$ jaoks leidub $w' \in W$ nii, et $wR'w$,
  - refleksiivne, kui iga $w \in W$ puhul wRw,
  - sümmeetriline, kui iga $w, w' \in W$ puhul sellest, et wRw' järeldub, et $w'Rw$,
  - transitiivne, kui iga $w, w', w'' \in W$ puhul sellest, et wRw' ja $w'Rw''$ järeldub, et wRw'',
  - eukleidiline, kui iga $w, w', w'' \in W$ puhul sellest, et wRw' ja wRw'' järeldub, et $w'Rw''$.
- Mitte kõik ülaltoodud raamitingimused pole sõltumatud, nt seriaalsusest, sümmeetrilisusest ja transitiivsusest järeldub refleksiivsus jne.

- Olgu $\mathrm{PC} = \{p, q, \ldots\}$ fikseeritud lauseloogiline signatuur, st lausesümbolite tähestik. Siis *Kripke* ehk *relatsiooniline struktuur* selle signatuuri jaoks on kolmik $M = (W, R, I)$, kus
    - (W, R) on raam ning
    - I on *interpretatsiooniks* nimetatav funktsioon $\mathrm{PC} \times W \to \{1, 0\}$ ehk tõeväärtuse omistus igale lausesümbolile igas maailmas.

- Lausemodaalloogiliste valemite *väärtustus* etteantud struktuuris $M = (W, R, I)$ on funktsioon $[\![\cdot]\!]^{M,\cdot} : \mathrm{Fma} \times W \to \{1, 0\}$, mis on defineeritud induktsiooniga järgmiselt:
  - $[\![p]\!]^{M,w} = I(w, p)$, kui p on lausesümbol;
  - $[\![\top]\!]^{M,w} = 1$, $[\![\bot]\!]^{M,w} = 0$;
  - $[\![\neg A]\!]^{M,w} = 1 - [\![A]\!]^{M,w}$;
  - $[\![A \wedge B]\!]^{M,w} = \min([\![A]\!]^{M,w}, [\![B]\!]^{M,w})$;
  - $[\![A \vee B]\!]^{M,w} = \max([\![A]\!]^{M,w}, [\![B]\!]^{M,w})$;
  - $[\![A \supset B]\!]^{M,w} = \max(1 - [\![A]\!]^{M,w}, [\![B]\!]^{M,w})$;
  - $[\![\Box A]\!]^{M,w} = \min_{w' \in W, wRw'}([\![A]\!]^{M,w'})$;
  - $[\![\Diamond A]\!]^{M,w} = \max_{w' \in W, wRw'}([\![A]\!]^{M,w'})$.
- Valem A loetakse struktuuri M maailmas w tõeseks (tähis $M, w \models A$, kui $[\![A]\!]^{M,w} = 1$.

- On lihtne näha, et iga M korral
  - $M, w \models p$ parajasti siis, kui $I(p, w) = 1$, kui p on lausesümbol;
  - $M, w \models \top$ alati; $M, w \models \bot$ mitte kunagi;
  - $M, w \models \neg A$ parajasti siis, kui $M, w \not\models A$;
  - $M, w \models A \wedge B$ parajasti siis, kui $M, w \models A$ ja $M \models B$;
  - $M, w \models A \vee B$ parajasti siis, kui $M, w \models A$ või $M, w \models B$;
  - $M, w \models A \supset B$ parajasti siis, kui $M, w \not\models A$ või $M, w \models B$;
  - $M, w \models \Box A$ parajasti siis, kui iga $w' \in W$, wRw' korral $M, w' \models A$;
  - $M, w \models \Diamond A$ parajasti siis, kui vähemalt ühe $w' \in W$, wRw' korral $M, w' \models A$;
- Öeldakse, et struktuur M kehtestab A, A kehtib M-is, A on M-is tõene ehk M on A mudel (tähis $M \models A$), kui A on tõene M-i igas maailmas.
- Öeldakse, et raam F kehtestab A, A kehtib F-is ehk A on F-is tõene (tähis $F \models A$), kui A on tõene F-i igas struktuuris.

- Öeldakse, et valem A on üldkehtiv mingis raamide klassis (tähis $\models A$), kui iga selle klassi raam kehtestab A.
- Olulised normaalsed modaalloogikad on igaüks määratud mingi raamiklassiga.

K	kõik raamid
D = KD	seriaalsed raamid
T = KT	refleksiivsed raamid
S4 = KT4	refleksiivsed-transitiivsed raamid
S5 = KT5 = KT4B	refleksiivsed-transitiivsed-sümmeetrilised raam
Br = KTB	refleksiivsed-sümmeetrilised raamid

- Näiteid tautoloogiatest:
  Loogikas K:

$$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$$
$$\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$$
$$\Box(A \wedge B) \equiv \Box A \wedge \Box B$$
$$\Box(A \vee B) \supset \Box A \vee \Diamond B$$

Modaalloogikad: Hilberti süsteemid

- Normaalse loogika K Hilberti süsteem:
  - lauseloogika aksioomiskeemid ja tuletusreeglid:

$$
\begin{gathered}
A \supset (B \supset A) \\
(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)) \\
(A \supset \neg B) \supset ((A \supset B) \supset \neg A) \\
\neg\neg A \supset A
\end{gathered}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\top & \bot \supset C \\
A \supset (B \supset A \wedge B) & (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)) \\
A \wedge B \supset A & A \supset A \vee B \\
A \wedge B \supset B & B \supset A \vee B
\end{array}
$$

$$
\frac{A \quad A \supset B}{B}
$$

- modaalloogika-spetsiifilised aksioomid ja tuletusreeglid:
  - aksioomiskeem K:

$$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$$

  - võimalikkus paratamatuse kaudu:

$$\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$$

  - tuletusreegel NR (necessitation rule):

$$\frac{A}{\Box A}$$

- Täiendavad aksioomiskeemid:

seriaalsus	$\Box A \supset \Diamond A$
refleksiivsus	$\Box A \supset A$
sümmeetrilisus	$A \supset \Box\Diamond A$
transitiivsus	$\Box A \supset \Box\Box A$
eukleidilisus	$\Diamond A \supset \Box\Diamond A$