

## Lauseloogika: Loomulik tuletus

- Loomuliku tuletuse süsteemid on liik tõestussüsteeme nagu Hilberti süsteemidki. Neile on omane, et igal konnektiivil on oma sissetoomise (introduction) ja väljaviimise (elimination) reeglid.
- Loomuliku tuletuse süsteeme võib esitada mitmel moel, siin vaatame standardesitust (à la Prawitz) ja sekventsiesitust (à la Gentzen).
- Standardesituse omapäraks on, et reeglite eeldused võivad olla tingimuslikud: esinevad reeglid kujul

$$\frac{H_{11} \quad \dots \quad H_{1m_1} \quad \dots \quad H_{n1} \quad \dots \quad H_{nm_n}}{B}$$

$A_1 \quad \dots \quad A_n$

- Siin valemid  $H_{11}, \dots, H_{1m_1}, \dots, H_{n1}, \dots, H_{nm_n}$  on reegli erinevate eelduste eeldused (hüpoteesid).

- Sellise tuletusreegli sisu on, et kui  $A_1$  on valemi  $A$  tuletus valemitehulgast  $\Gamma \cup \{H_{11}, \dots, H_{1m_1}\}$  ja  $\dots$  ja  $A_n$  on valemi  $A$  tuletus valemitehulgast  $\Gamma \cup \{H_{n1}, \dots, H_{nm_n}\}$ , siis
 
$$\frac{\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_n \\ A_1 & \dots & A_n \end{array}}{B}$$
 on valemi  $B$  tuletus valemitehulgast  $\Gamma$ .

Seega: kasutadaolevad hüpoteesid on tuletuse alamtuletustes erinevad.

- Lauseloogika loomuliku tuletuse standardesitus:  
Aksiomiskeeme pole, tuletusreeglid on järgmised:

$$\frac{}{\top} \top I$$

$$\frac{}{\perp} \perp E \text{ (EFQ)}$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L \quad \frac{B}{A \vee B} \vee I_R$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \supset B} \supset I$$

$$\frac{A \supset B \quad A}{B} \supset E \text{ (MP)}$$

- Eitust vaadatakse sisuliselt kui erikujulist implikatsiooni ( $\neg A = A \supset \perp$ ):

$$\frac{\perp}{\neg A} \neg\mathcal{I} \qquad \frac{\neg A \quad A}{\perp} \neg\mathcal{E}$$

- Lisaks on tarvis veel üht reeglit (selle ärajätmisega saaksime tuletussüsteemi intuitsionistlikule lauseloogikale):

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \text{ dil.}$$

- Alternatiive viimasele reeglile:

$$\frac{}{A \vee \neg A} \text{ TND} \qquad \frac{\perp}{A} \text{ RAA} \qquad \frac{\neg\neg A}{A} \text{ DNE}$$

- Nimede seletusi:
  - EFQ: ex falso quodlibet, väärusest mida tahes
  - MP: modus ponens
  - dil.: dilemma
  - TND: tertium non datur, kolmandat pole antud (välistatud kolmanda seadus)
  - RAA: reductio ad absurdum, taandamine absurdile
  - DNE: double negation elimination

- Näiteid:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{+1}{(p \supset q) \wedge (r \supset s)}}{p \supset q} \wedge \mathcal{E}_L \quad \frac{+3}{p} \supset \mathcal{E}}{\frac{q}{q \vee s} \vee \mathcal{I}_L} \quad \frac{\frac{+1}{(p \supset q) \wedge (r \supset s)}}{r \supset s} \wedge \mathcal{E}_R \quad \frac{+4}{r} \supset \mathcal{E}}{\frac{s}{q \vee s} \vee \mathcal{I}_R} \supset \mathcal{E}, -3, -4 \\
 \hline
 \frac{+2}{p \vee r} \quad \frac{q \vee s}{p \vee r \supset q \vee s} \supset \mathcal{I}, -2 \\
 \hline
 \frac{(p \supset q) \wedge (r \supset s) \supset (p \vee r \supset q \vee s)}{\quad} \supset \mathcal{I}, -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{+1}{q} \supset \mathcal{I}, -3}{(p \supset q) \vee (q \supset r)} \vee \mathcal{I}_L \quad \frac{\frac{+2}{\neg q} \quad \frac{+4}{q} \quad \neg \mathcal{E}}{\frac{\perp}{r} \perp \mathcal{E}} \supset \mathcal{I}, -4}{(p \supset q) \vee (q \supset r)} \vee \mathcal{I}_R \\
 \hline
 (p \supset q) \vee (q \supset r) \quad \text{Dilemma, } -1, -2
 \end{array}$$

- Loomuliku tuletuse sekventsiesituse idee on muuta arvepidamine parajasti kasutada olevate hüpoteeside üle ilmutatuks.
- Tõestatavateks/tuletatavateks objektideks pole mitte valemid, vaid nn sekventsid, so figuurid kujul  $\Gamma \rightarrow A$ , kus  $\Gamma$  on lõplik (võibolla tühi) hulk valemid (NB! hulk, mitte list või multihulk, st järjestus, kordsus ei loe) ning  $A$  on valem.
- (Hulkade kirjutamiseks kasutame lihtsustatud süntaksit:  $A_1, \dots, A_n$  tähistab hulka  $\{A_1, \dots, A_n\}$ ;  $\Gamma, A$  tähistab hulka  $\Gamma \cup \{A\}$ .)
- Sekventsi  $\Gamma \rightarrow A$  tõestatavus on sama, mis valemi  $A$  tuletatavus valemihulgast  $\Gamma$  loomuliku tuletuse varemantud esituses.
- Valem  $A$  loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents  $\rightarrow A$ .
- Sekventsi  $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$  võib samastada valemiga  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$ ; meenutame, et 0 valemi konjunksioon on  $\top$ .

- Sekventsiesituse aksioomiskeemid ja tuletusreeglid:  
(Paneme tähele, et tingimuslike eeldustega reegleid enam pole.)

$$\begin{array}{c}
 \overline{\Gamma \rightarrow \top} \quad \top\mathcal{I} \\
 \\
 \overline{\Gamma, A \rightarrow A} \quad \text{hyp.} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \quad \overline{\Gamma \rightarrow B}}{\Gamma \rightarrow A \wedge B} \quad \wedge\mathcal{I} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \quad \vee\mathcal{I}_L \quad \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \quad \vee\mathcal{I}_R \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \quad \supset\mathcal{I} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow \neg A} \quad \neg\mathcal{I} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \wedge B}{\Gamma \rightarrow A} \quad \wedge\mathcal{E}_L \quad \frac{\Gamma \rightarrow A \wedge B}{\Gamma \rightarrow B} \quad \wedge\mathcal{E}_R \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \vee B \quad \Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, B \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C} \quad \vee\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \supset B \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow B} \quad \supset\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow \neg A \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow \perp} \quad \neg\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, \neg A \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C} \quad \text{dil.}
 \end{array}$$