Predikaatloogika

- Predikaatloogika on lauseloogika tugev laiendus.
  Predikaatloogikas saab nimetada asju ning rääkida nende omadustest.
  Väljendusvõimsuselt on predikaatloogika seega oluliselt peenekoelisem kui lauseloogika. Samas on predikaatloogikate valemite tõesuse, üldkehtivuse või kehtestatavuse kontroll oluliselt raskem kui lauseloogika valemite oma.
- Kaks süntaktilist kategooriat: termid ja valemid.

Predikaatloogika süntaks: signatuurid ja muutujavarud

- Predikaatloogika *signatuur* on paar $(\mathrm{FC}, \mathrm{PC})$, kus $\mathrm{FC} = \{f, g, \ldots, c, d, \ldots\}$ on tähestik, mille sümboleid nimetatakse *funktsioonisümboliteks*; igale sümbolile on määratud mingi lõplik aarsus; ja $\mathrm{PC} = \{p, q, \ldots\}$ on tähestik, mille sümboleid nimetatakse *predikaatsümboliteks*; ka neil on kõigil fikseeritud lõplik aarsus.
  0-aarseid funktsioonisümboleid kutsutakse ka *indiviidsümboliteks*, 0-aarseid predikaatsümboleid kutsutakse ka *lausesümboliteks*. Kõiki nimetatud sümboleid on (meil siin) mõistlik lugeda konstantideks.
- Lisaks eeldame loenduvat tähestikku $\mathrm{Var} = \{x, y, \ldots\}$, mida nimetame muutujavaruks. Tema elemente nimetame *(indiviid)muutujateks*.

Termide ja valemite moodustamine

- Predikaatloogika *termid* (üle signatuuri $(\mathrm{FC}, \mathrm{PC})$) on hulk väljendeid ehk keel $\mathrm{Tm} = \{t, u, \ldots\}$, mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
  - iga indiviidmuutuja x on term;
  - iga indiviidkonstant c on term;
  - kui f on n-aarne funktsioonikonstant ja t_1, …, t_n on termid, siis $f(t_1, \ldots, t_n)$ on term.
- Näide: x, c, $f(x, c)$, $g(f(x, c), h(d))$ on termid.

- Predikaatloogika *valemid* (üle signatuuri $(\mathrm{FC}, \mathrm{PC})$) on hulk väljendeid ehk keel $\mathrm{Fma} = \{A, B, \ldots\}$, mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
    - kui p on n-aarne predikaatkonstant ja t_1, ..., t_n on termid, siis $p(t_1, \ldots, t_n)$ on valem (nn atomaarvalem);
    - $\top$ (verum, tõde), $\bot$ (falsum, väärus) on valemid;
    - kui A on valem, siis $\neg A$ (mitte-A) on samuti valem;
    - kui A, B on valemid, siis $A \wedge B$ (A ja B), $A \vee B$ (A või B), $A \supset B$ (kui A, siis B e A implitseerib B) on ka valemid;
    - kui x on indiviidmuutuja ja A on valem, siis $\forall x\, A$ (iga x korral A) ja $\exists x\, A$ (leidub x, et A) on valemid.
- Sümboleid $\forall$ (üldisuskvantor), $\exists$ (olemasolukvantor) nimetatakse kvantoriteks.
- Näide: $\top$, $\neg p(x)$, $\forall x\, (\neg p(x) \supset q(h(x), c))$, $\forall x\, \forall y\, \exists z.(f(x, z) \wedge f(y, z))$ on valemid.

Muutujate sidumine, substitutsioon

- Kvantorid *seovad* muutujaid valemis, täpsemalt muutujate esinemisi. Kvantoriteta valemis on kõik muutujaesinemised vabad. Valemis $\forall x\, A$ $[\exists x\, A]$ on muutuja x vabad esinemised valemis A välimise kvantori $\forall$ $[\exists]$ poolt seotud.
- Näide: Valemis $p(x) \wedge \forall x\, (q(x) \vee \exists x\, r(x))$ on muutuja x esimene esinemine vaba, teine seotud üldisuskvantoriga, kolmas eksistentsikvantoriga.
- $A[t/x]$ tähistab valemit, mis saadakse valemist A muutuja x kõigi vabade esinemiste asendamisel termiga t.
- Näiteid: $(p(x, y) \vee r(a, x))[f(z)/x] = p(f(z), y) \vee r(a, f(z))$; $(p(x) \wedge \forall x\, q(x))[c/x] = p(c) \wedge \forall x\, q(x)$.

Alamtermid ja -valemid, substitutsioonieksemplarid

- Valemi *alamvalemiteks* on kõik temas alamväljenditena esinevad valemid. Laiemas mõttes on valemi alamvalemiteks kõigi temas alamväljenditena esinevate valemite kõik substitutsioonieksemplarid (valemid, mis on saadud vabade muutujate süstemaatilisel asendamisel mingite termidega).
- Näide: Valemi $\forall x\, \forall y\, \exists z\, (f(x,z) \wedge f(y,z))$ alamvalemiteks võib lugeda mh valemid $\forall y\, \exists z\, (f(h(c),z) \wedge f(y,z))$ ja $f(h(w),d) \wedge f(f(c,w),d)$.

Predikaatloogika semantika: Struktuurid ja omistused

- Olgu $(\mathrm{FC}, \mathrm{PC})$ fikseeritud predikaatloogiline signatuur, st funktsioonikonstantide (sh indiviidkonstantide) ja predikaatkonstantide tähestik.
- *Struktuur* on siis suvaline paar $M = (D, I)$, kus D on mingi mittetühi hulk (*põhihulgaks* ehk *kandja*) ning I on sõltuv funktsioon (*interpretatsioon*), mis igale n-aarsele funktsioonikonstandile seab vastavuse mingi funktsiooni $D^n \to D$ (sh igale indiviidkonstandile mingi elemendi hulgast D) ja igale n-aarsele predikaatkonstandile mingi funktsiooni $D^n \to \{1, 0\}$.
- *Omistus* (assignment) on suvaline funktsioon $\alpha : \mathrm{Var} \to D$.
- Suvalise omistuse α ja suvaliste $x \in \mathrm{Var}$, $d \in D$ jaoks defineerime modifitseeritud omistuse $\alpha\{d/x\}$ järgmiselt:

$$\alpha\{d/x\}(y) = \begin{cases} d & \text{kui } y = x \text{ (süntaktiliselt)} \\ \alpha(y) & \text{muidu} \end{cases}$$

Termide ja valemite väärtustamine

- Predikaatarvutuse termide *väärtustus* struktuuris $M = (D, I)$ ja omistuse α suhtes on funktsioon $[\![\cdot]\!]^{M,\alpha} : \mathrm{Tm} \to D$, mis on defineeritud induktsiooniga järgmiselt:
  - $[\![x]\!]^{M,\alpha} = \alpha(x)$, kui x on indiviidmuutuja;
  - $[\![c]\!]^{M,\alpha} = I(c)$, kui c on indiviidkonstant;
  - $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{M,\alpha} = I(f)([\![t_1]\!]^{M,\alpha}, \ldots, [\![t_n]\!]^{M,\alpha})$, kui f in funktsioonikonstant.

- Predikaatarvutuse valemite *väärtustus* struktuuris $M = (D, I)$ ja omistuse α suhtes on funktsioon $[\![\cdot]\!]^{M,\alpha} : \mathrm{Fma} \to \{1, 0\}$, mis on defineeritud induktsiooniga järgmiselt:
  - $[\![p(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{M,\alpha} = I(p)([\![t_1]\!]^{M,\alpha}, \ldots, [\![t_n]\!]^{M,\alpha})$, kui p on predikaatkonstant;
  - $[\![\top]\!]^{M,\alpha} = 1$, $[\![\bot]\!]^{M,\alpha} = 0$;
  - $[\![\neg A]\!]^{M,\alpha} = 1 - [\![A]\!]^{M,\alpha}$;
  - $[\![A \wedge B]\!]^{M,\alpha} = \min([\![A]\!]^{M,\alpha}, [\![B]\!]^{M,\alpha})$;
  - $[\![A \vee B]\!]^{M,\alpha} = \max([\![A]\!]^{M,\alpha}, [\![B]\!]^{M,\alpha})$;
  - $[\![A \supset B]\!]^{M,\alpha} = \max(1 - [\![A]\!]^{M,\alpha}, [\![B]\!]^{M,\alpha})$;
  - $[\![\forall x\, A]\!]^{M,\alpha} = \min_{d \in D}([\![A]\!]^{M,\alpha\{d/x\}})$;
  - $[\![\exists x\, A]\!]^{M,\alpha} = \max_{d \in D}([\![A]\!]^{M,\alpha\{d/x\}})$.

- Valem A loetakse struktuuris M omistuse α suhtes *tõeseks* (tähistus $M \models A[\alpha]$), kui $[\![A]\!]^{M,\alpha} = 1$.
- Võime veenduda, et iga $M = (D, I)$ ja α korral
  - $M \models p(t_1, \ldots, t_n)[\alpha]$ parajasti siis, kui $I(p)([\![t_1]\!]^{M,\alpha}, \ldots, [\![t_n]\!]^{M,\alpha}) = 1$, kui p on predikaatkonstant;
  - $M \models \top[\alpha]$ alati; $M \models \bot[\alpha]$ mitte kunagi;
  - $M \models \neg A[\alpha]$ parajasti siis, kui $M \not\models A[\alpha]$;
  - $M \models A \wedge B[\alpha]$ parajasti siis, kui $M \models A[\alpha]$ ja $M \models B[\alpha]$;
  - $M \models A \vee B[\alpha]$ parajasti siis, kui $M \models A[\alpha]$ või $M \models B[\alpha]$;
  - $M \models A \supset B[\alpha]$ parajasti siis, kui $M \not\models A[\alpha]$ või $M \models B[\alpha]$;
  - $M \models \forall x\, A[\alpha]$ parajasti siis, kui iga $d \in D$ korral $M \models A[\alpha\{d/x\}]$;
  - $M \models \exists x\, A[\alpha]$ parajasti siis, kui leidub $d \in D$, et $M \models A[\alpha\{d/x\}]$;

Kehtivus, üldkehtivus, ...

- Struktuur $M = (D, I)$ *kehtestab* valemi A, A *kehtib* M-is, A on M-is *tõene* ehk M on A *mudel* (tähistus $M \models A$), kui $M \models A\ [\alpha]$ (st. $[\![A]\!]^{M,\alpha} = 1$) iga omistuse α korral.
- Valem A on *üldkehtiv*, *tautoloogiline* ehk *loogiliselt tõene* (tähistus $\models A$), kui A on tõene igas struktuuris iga omistuse korral.
- Valem A on *kehtestatav*, kui leiduvad struktuur ja omistus, milles A on tõene.
- Valem A on *loogililine järeldus* valemite hulgast Γ (tähistus $\Gamma \models A$), kui igas struktuuris, kus kehtivad kõik hulga Γ valemid, kehtib ka valem A.
- Valemid A ja B on *loogiliselt samaväärsed* (tähistus $A \Leftrightarrow B$), kui neil on samad tõeväärtused igas struktuuris iga omistuse korral.

Mida saab väljendada?

- Näiteid predikaatloogika väljendusvõimalustest:
  - $\forall x\, \forall y\, (p(x,y) \supset p(y,x))$: p on sümmeetriline relatsioon;
  - $\forall x\, \exists y\, p(x,y)$: funktsioonina mõistetuna on p totaalne;
  - $\exists x\, \exists y\, (p(x) \wedge \neg p(y))$: mõnel põhihulga elemendil on omadus p, mõnel pole (see valem saab olla tõene ainult siis, kui põhihulgas on vähemalt kaks elementi);
  - $\forall x\, p(a,x)$: a on põhihulga vähim element relatsiooni p suhtes.

Üldkehtivate valemite näiteid

- Näiteid predikaatloogika tautoloogiatest:

$$\forall x\, A \equiv \neg \exists x\, \neg A$$
$$\exists x\, A \equiv \neg \forall x\, \neg A$$
$$\forall x\, A \supset \exists x\, A$$
$$\exists x\, \forall y\, A \supset \forall y\, \exists x\, A$$
$$\forall x\, (A \wedge B) \equiv \forall x\, A \wedge \forall x\, B$$
$$\exists x\, (A \vee B) \equiv \exists x\, A \vee \exists x\, B$$
$$\forall x\, A \vee \forall x\, B \supset \forall x\, (A \vee B)$$
$$\exists x\, (A \wedge B) \supset \exists x\, A \wedge \exists x\, B$$
$$(\exists x\, A \supset \forall x\, B) \supset \forall x\, (A \supset B)$$
$$\exists x\, (A \supset B) \equiv (\forall x\, A \supset \exists x\, B)$$

Üldkehtivus- ja kehtestatavuskontroll

- Erinevalt lauseloogika juhust, ei ole TAUT (üldkehtivuskontroll) ega SAT (kehtestatavuskontroll) predikaatloogika puhul lahenduvad.
- TAUT on *poollahenduv*, st leiduvad algoritmid, mis etteantud valemi kohta vastavad "jah", kui see valem on üldkehtiv, ning vastavad "ei" või ei lõpeta, kui ta on vääratav.
- SAT on *kopoollahenduv*, st leiduvad algoritmid, mis etteantud valemi kohta vastavad "jah" või ei lõpeta, kui see valem on kehtestatav, ning vastavad "ei", kui ta on vastuoluline.