

## Teadmise ja tõekspidamise loogikad

- Teadmise ja tõekspidamise (ehk episteemsed ja doxastilised) loogikad (logics of knowledge and belief / epistemic and doxastic logics) on liik modaalloogikat, milles saab arutleda subjektide (“agentide”) teadmiste ja tõekspidamiste üle.
- Teadmised ja tõekspidamised esitavad agendi “mudelit” tegelikkusest.
- Teadmised peavad olema tegelikkusega kooskõlas, tõekspidamiste korral on nõutud ainult “mudeli” sisemine kooskõla.
- Sarnaselt dünaamilisele loogikale on need loogikad mitmemodaalsed, st paratamatuse ja võimalikkuse modaalsused on indekseeritud.
- Kõige tavalisem on multimodaalne KT45 - teadmise loogika.

## Teadmise ja tõekspidamise loogikad: Süntaks

- Signatuuris on kaks tähestikku  $PC = \{p, q, \dots\}$  ja  $Agt = \{a, b, \dots\}$ , mille sümboleid nimetatakse lausesümboliteks ja agendinimedeks.
- Keeles on üks kategooria avaldisi—valemid  $\mathcal{Fma}$ —, mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
  - kõik lausesümbolid on valemid (nn atomaarvalemid);
  - $\top, \perp$  on valemid;
  - kui  $A$  on valem, siis  $\neg A$  on samuti valem;
  - kui  $A, B$  on valemid, siis  $A \wedge B, A \vee B, A \supset B$  on ka valemid;
  - kui  $a$  on agendinimi ja  $A$  on valem, siis  $K_a A$  on valem,
  - kui  $A$  on valem, siis  $E A, C A$  ja  $D A$  on valemid.
- $K_a A$  - agent  $a$  teab/peab tõeks, et  $A$   
 $E A$  - kõik agendid teavad, et  $A$   
 $C A$  - on üldine teadmine, et  $A$  (“iga loll teab”)  
 $D A$  - süsteem teab (on hajutatud teadmine), et  $A$  (“tark mees teab”)

## Teadmise ja tõekspidamise loogikad: Semantika

- Kripke struktuur on kolmik  $M = (W, R, I)$ , kus  $W$  on mittetühi hulk, mille elemente nimetatakse võimalikeks maailmadeks,  $R$  on agendinimedega indekseeritud binaarsete seoste pere sellel ning  $I$  on funktsioon  $PC \times W \rightarrow \{1, 0\}$ .
- Teadmiste puhul nõutakse, et  $R_a$  on refleksiivne, transitiivne ja eukleidiline (millega ta on ekvivalentsiseos).  
Tõekspidamiste puhul asendatakse refleksiivsus seriaalsusega.

- Valemite väärtustus etteantud struktuuris on määratud funktsiooniga  $\llbracket \cdot \rrbracket^{M,w} : \text{Fma} \times W \rightarrow \{1, 0\}$ :

- $\llbracket p \rrbracket^{M,w} = I(w, p)$ , kui  $p$  on lausesümbol;
- $\llbracket \top \rrbracket^{M,w} = 1$ ,  $\llbracket \perp \rrbracket^{M,w} = 0$ ;
- $\llbracket \neg A \rrbracket^{M,w} = 1 - \llbracket A \rrbracket^{M,w}$ ;
- $\llbracket A \wedge B \rrbracket^{M,w} = \min(\llbracket A \rrbracket^{M,w}, \llbracket B \rrbracket^{M,w})$ ;
- $\llbracket A \vee B \rrbracket^{M,w} = \max(\llbracket A \rrbracket^{M,w}, \llbracket B \rrbracket^{M,w})$ ;
- $\llbracket A \supset B \rrbracket^{M,w} = \max(1 - \llbracket A \rrbracket^{M,w}, \llbracket B \rrbracket^{M,w})$ ;
- $\llbracket K_a A \rrbracket^{M,w} = \min_{w' \in W, wR_a w'} (\llbracket A \rrbracket^{M,w'})$ ;
- $\llbracket EA \rrbracket^{M,w} = \min_{w' \in W, a \in \text{Agt}, wR_a w'} (\llbracket A \rrbracket^{M,w'})$ ;
- $\llbracket CA \rrbracket^{M,w} =$   
 $\min_{n \geq 1, w_0, \dots, w_n \in W, a_0, \dots, a_{n-1} \in \text{Agt}, w = w_0 R_{a_0} \dots R_{a_{n-1}} w_n = w'} (\llbracket A \rrbracket^{M,w'})$ ;
- $\llbracket DA \rrbracket^{M,w} = \min_{w' \in W, wR_a w'} \text{for all } a \in \text{Agt} (\llbracket A \rrbracket^{M,w'})$ .

## Olulisi tautoloogiaid ja järelduvusi

- Need tautoloogiad ja reeglid on KT45 aksioomid ja reeglid:

$$K_a(A \supset B) \supset (K_a A \supset K_a B)$$

$$\frac{A}{K_a A}$$

$$K_a A \supset A$$

$$K_a A \supset K_a K_a A$$

$$\neg K_a A \supset K_a \neg K_a A$$

$$E A \equiv \bigwedge_{a \in \text{Agt}} K_a A$$

$$C A \supset \bigwedge_{a \in \text{Agt}} K_a(A \wedge C A)$$

$$B \supset \bigwedge_{a \in \text{Agt}} K_a(A \wedge B)$$

$$\frac{B \supset \bigwedge_{a \in \text{Agt}} K_a(A \wedge B)}{B \supset C A}$$

$$K_a A \supset D A$$

- Need valemid pole üldkehtivad:

$$EA \supset EEA$$

$$\neg EA \supset E\neg EA$$

$$DA \supset \bigvee_{a \in \text{Agt}} K_a A$$

## “Iga loll” ja “tark mees” kui agendid

- Igaühe teadmist, üldteadmist ja hajutatud teadmist võib võtta kui teatud eriagentide  $e$ ,  $c$ ,  $d$  teadmist.
- Saaks defineerida:
  - $wR_e w'$  parajasti siis, kui mingi agendi  $a$  jaoks  $wR_a w'$ ;
  - $wR_c w'$  parajasti siis, kui mingite  $n \geq 1$ ,  $w_0, \dots, w_n \in W$ ,  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \text{Agt}$  jaoks  $w = w_0 R_{a_0} \dots R_{a_{n-1}} w_n = w'$ ,
  - $wR_d w'$  parajasti siis, kui iga agendi  $a$  jaoks  $wR_a w'$ .
- Agent  $d$  (“wise man”) on nagu tavalised teadvad agendid: saavutatavusseos on refleksiivne (tõde), transitiivne (positiivne introspektsioon) ja eukleidiline (negatiivne introspektsioon).
- Agendi  $e$  saavutatavusseos on refleksiivne, kui  $\text{Agt} \neq \emptyset$ .
- Agendi  $c$  saavutatavusseos on transitiivne ja eukleidiline, samuti refleksiivne, kui  $\text{Agt} \neq \emptyset$ .

## Kolm tarka

- Kuningal on käepärast kolm punast ja kaks valget kübarat.
- Kuninga juures on kolm tarka. Ta asetab igaühele pähe kübara, nii et ükski tark iseenda kübarat ei näe, aga kõigi teiste omi näeb.
- Kõigi kuuldes leiavad aset järgmised vestlused.
- Kuningas küsib esimeselt targalt: Mis värvi on su kübar? Esimene tark vastab: Ma ei tea.
- Kuningas küsib teiselt targalt: Mis värvi on su kübar? Teine tark vastab: Ma ei tea.
- Kolmas tark ütleb: Ma tean, mis värvi minu kübar on.



- Tähendagu  $r_i$ , et *indal* targal on punane kübar peas.
- Tähistagu  $\Gamma$  järgmiste valemite konjunktsiooni:

$$\begin{array}{ll}
 r_1 \supset K_2 r_1 \wedge K_3 r_1 & \neg r_1 \supset K_2 \neg r_1 \wedge K_3 \neg r_1 \\
 r_2 \supset K_1 r_2 \wedge K_3 r_2 & \neg r_2 \supset K_1 \neg r_2 \wedge K_3 \neg r_2 \\
 r_3 \supset K_1 r_3 \wedge K_2 r_3 & \neg r_3 \supset K_1 \neg r_3 \wedge K_2 \neg r_3
 \end{array}$$

- Kehtivad järgmised loogilised järeldused:

$$\begin{array}{l}
 \Gamma, C(r_1 \vee r_2 \vee r_3), C(\neg K_1 r_1 \wedge \neg K_1 \neg r_1) \models C(r_2 \vee r_3) \\
 \Gamma, C(r_2 \vee r_3), C(\neg K_2 r_2 \wedge \neg K_2 \neg r_2) \models C r_3 \\
 C r_3 \models K_3 r_3
 \end{array}$$