Lauseloogika: Sekventsiarvutus

- Sekventsiarvutused on kolmas alternatiiv tõestussüsteeme Hilberti süsteemide ja loomuliku tuletuse süsteemide kõrval. Neid ei tohi segamini ajada loomuliku tuletuse sekventsiesitustega.
- Kui loomulikus tuletuses olid igal konnektiivil oma sissetoomise ja väljaviimise reeglid, siis sekventsiarvutustes on igal konnektiivil oma parema ja vasaku poole reeglid.
- Sekventsid on sedapuhku nö mitmejärelduselised: sekvents on figuur kujul $\Gamma \to \Delta$, kus nii Γ kui ka Δ on lõplikud (võibolla tühjad) hulgad valemeid (taas hulgad, mitte listid või multihulgad, st järjestus, kordsus ei loe).
- Valem A loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents $\to A$.
- Sekventsi $A_1, \ldots, A_n \to B_1, \ldots, B_m$ võib samastada valemiga $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$; meenutame, et 0 valemi konjuktsioon on $\top$ ja 0 valemi disjunktsioon on $\bot$.

- Sekventsiarvutuse aksioomiskeemid ja tuletusreeglid (tagasisuunalisele otsimisele häälestatud versiooni jaoks):

$$\frac{}{\Gamma, A \to A, \Delta}\ \text{hyp}$$

$$\frac{}{\Gamma \to \top, \Delta}\ \top\mathcal{R} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma, \top \to \Delta}\ \top\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \bot, \Delta}\ \bot\mathcal{R} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \to \Delta}\ \bot\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma \to A, \Delta \quad \Gamma \to B, \Delta}{\Gamma \to A \wedge B, \Delta}\ \wedge\mathcal{R} \qquad \frac{\Gamma, A, B \to \Delta}{\Gamma, A \wedge B \to \Delta}\ \wedge\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma \to A, B, \Delta}{\Gamma \to A \vee B, \Delta}\ \vee\mathcal{R} \qquad \frac{\Gamma, A \to \Delta \quad \Gamma, B \to \Delta}{\Gamma, A \vee B \to \Delta}\ \vee\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma, A \to B, \Delta}{\Gamma \to A \supset B, \Delta}\ \supset\mathcal{R} \qquad \frac{\Gamma \to A, \Delta \quad \Gamma, B \to \Delta}{\Gamma, A \supset B \to \Delta}\ \supset\mathcal{L}$$

$$\frac{\Gamma, A \to \Delta}{\Gamma \to \neg A, \Delta}\ \neg\mathcal{R} \qquad \frac{\Gamma \to A, \Delta}{\Gamma, \neg A \to \Delta}\ \neg\mathcal{L}$$

Näiteid:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \land q \supset r, p \rightarrow p, r}\ \text{hyp.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q, p \rightarrow p, r}\ \text{hyp.} \quad \dfrac{}{q, p \rightarrow q, r}\ \text{hyp.}}{q, p \rightarrow p \land q, r}\ \land\mathcal{R} \qquad \dfrac{}{q, r, p \rightarrow r}\ \text{hyp.}}{q, p \land q \supset r, p \rightarrow r}\ \supset\mathcal{L}}{p \supset q, p \land q \supset r, p \rightarrow r}\ \supset\mathcal{L}}{p \supset q, p \land q \supset r \rightarrow p \supset r}\ \supset\mathcal{R}}{(p \supset q) \land (p \land q \supset r) \rightarrow p \supset r}\ \land\mathcal{L}}{\rightarrow (p \supset q) \land (p \land q \supset r) \supset (p \supset r)}\ \supset\mathcal{R}
$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \to p, q}\ \text{hyp.} \qquad \dfrac{}{q, p \to q}\ \text{hyp.}}{p \supset q, p \to q}\ \supset\mathcal{L}}{p \supset q, \neg q, p \to}\ \neg\mathcal{L}}{p \supset q, \neg q \to \neg p}\ \neg\mathcal{R}}{p \supset q \to \neg q \supset \neg p}\ \supset\mathcal{R}}{\to (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)}\ \supset\mathcal{R}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q \supset r, p \to p, r}\ \text{hyp.} \qquad \dfrac{}{r, q \supset r, p \to r}\ \text{hyp.}}{p \supset r, q \supset r, p \to r}\ \supset\mathcal{L} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \supset r, q \to q, r}\ \text{hyp.} \qquad \dfrac{}{p \supset r, r, q \to r}\ \text{hyp.}}{p \supset r, q \supset r, q \to r}\ \supset\mathcal{L}}{p \supset r, q \supset r, p \vee q \to r}\ \vee\mathcal{L}}{p \supset r, q \supset r \to p \vee q \supset r}\ \supset\mathcal{R}}{p \supset r \to (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)}\ \supset\mathcal{R}}{\to (p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset (p \vee q \supset r))}\ \supset\mathcal{R}$$

Korrektsus ja täielikkus

- Sekventsiarvutus on korrektne ja täielik.
- Korrektsus: Kui $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$ on tõestatav, siis $A_1 \wedge \ldots A_N \supset B_1 \vee \ldots \vee B_n$ on üldkehtiv.
- Täielikkus: Kui $A_1 \wedge \ldots A_N \supset B_1 \vee \ldots \vee B_n$ on üldkehtiv, siis $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$ on tõestatav

Tõestuse otsimine

- Tõestuse otsimiseks (lähtudes etteantud eesmärksekventsist) piisab, kui rakendada reegleid suvalises järjekorras.
- Reeglid on "pööratavad", mis intuitiivselt tähendab, et reegli rakendamisel (alt üles) infot ei kao.
- Kui mingi sekvents on tõestatav mingi reeglite järjekorraga, siis sobib ka iga teine järjekord.
- Praktikas on siiski kasulik viivitada kahe eeldusega reeglitega. Nende rakendamisel vara teeme osa tööd topelt.