الدوائر الكهربائية

يان كالدا Jaan Kalda
ترجمة: فيصل ف. ع. السلوم

١.٠ المقاومات، البطاريات، الأميترات، والفولتميترات في الدوائر

الفيزياء خلف الدوائر التي بها مقاومات، بطاريات، أميترات، وفولتميترات بسيطة جدا، وعموما تغطى بأربعة قوانين فقط: قانونا كيرشوف، قانون أوم، وقانون جول[١] التي صيغت هنا كحقائق. بداية، قوانين كيرشوف:

حقيقة ١: مجموع التيارات الكهربائية الداخلة في عقدة[٢] في دائرة يساوي صفرا.

رياضيا،

$$\sum_{wiresconnectedtothei-thnode} I_\nu = 0,$$

حيث $I_{i\nu}$ ترمز للتيار في السلك الـν. هذا يفترض أن I_ν تأخذ إشارة موجبة لو كانت تدخل في العقدة، وشحنة سالبة ماعدا ذلك. يمكننا كذلك القول بأن مجموع التيارات الداخلة في العقدة يساوي مجموع التيارات الخارجة منها.

بما أن التيار الكهربائي يعرف بالشحنة المارة بالمقطع العرضي للسلك لوحدة الزمن، هذا القانون (قانون كيرشوف) يعبر جوهريا عن **قانون الاستمرارية** للشحنات الكهربائية، مدموجا مع حقيقة أن سعة أي سلك أو عقدة مهملة عادة[٣] (بالتالي، يمكننا إهمال الشحنات المتراكمة على العقد والأسلاك).

لمن لم يطور بديهة جيدة عن التيارات الكهربائية، فإن تشابهها مع سريان الماء في الأنهار المتفرعة أو الأنابيب سيكون مفيدا: مجموع تدفق الماء (مقاسا بالمتر المكعب لكل ثانية) يساوي تدفق الماء في المجرى الأساسي. لاحظ أن قانون الاستمرارية يلعب دورا مهما للعديد من العمليات الفيزيائية (مثل تدفق الموائع).

حقيقة ٢: مجموع هبوطات الجهد عند عناصر الدائرة (المقاومات، الديودات، المكثفات، إلخ) على طول مسار مغلق في الدائرة الكهربائية يساوي مجموع القوى الدافعة الكهربائية (للبطاريات والملفات).

رياضيا،

$$\sum_{wiresformingaclosedloop} V_\nu = 0,$$

حيث أن هبوط الجهد عند السلك الـν يأخذ إشارة موجبة لو كان جهد العقدة النهائية أقل من جهد العقدة الابتدائية، إلا لو كان السلك يحتوي على قوة دافعة كهربائية (emf): هبوط الجهد الناتج عن emf. يأخذ الإشارة المعاكسة.

هذا القانون ينص ببساطة على أن المجال الكهروسكوني مجال جهد؛ لو استخدمنا التماثل مع صعود الجبال، لو مشيت حتي تنتهي بنفس النقطة التي بدأت فيها، فإنك نزلت عدد من الأمتار نفسما صعدت بالضبط. القوة الدافعة الكهربائية لبطارية تقوم بتنفيذ شغل على ناقلات الشحنات باستخدام الطاقة الكيميائية (في حالة المولدات الهيدروديناميكية المغناطيسية والملفات\ الداينموات المبنية على الحث، طبيعة الـ emf مختلفة نوعا ما، لكن للآن، التفاصيل ليست مهمة: تطبيقات قانوني كيرشوف تظل نفسها). مع مثال صعود الجبال، القوة الدافعة الكهربائية يمكن اعتبارها كمصعد يحملك للأعلى ويبذل شغلا عليك كل مرة تستخدمه.

بينما أن مثال صعود الجبال يصلح لقانون كيرشوف للجهد فقط، فإن مثال شبكة القنوات يمكن تعميمه لكل الظواهر المباشرة للتيار. بشكل أكثر تحديدا، لنعتبر نظاما مغلقا من القنوات المائية؛ في أي قناة، الماء يتدفق للأسفل فقط، لكن توجد هنالك مضخات تعمل على رفع الماء للأعلى. الآن، توجد بعض الأزواج المترابطة: (أ) الشحنة الكهربائية Q وكتلة الماء m؛ (ب) التيار الكهربائي I في سلك، معرفا كمعدل تدفق الشحنة Q/t، حيث Q هي الشحنة المتدفقة خلال مقطع عرضي لسلك خلال فترة زمنية t و معدل تدفق الكتلة μ في قناة، معرفا كـ m/t، حيث m هي كتلة الماء المتدفقة خلال مقطع عرضي لقناة خلال فترة زمنية t؛ (ج) بطارية بقوة دافعة كهربائية $\mathcal{E}$ تقوم بشغل $\mathcal{E}Q$ على شحنة Q (التي تقوم بالعبور خلال البطارية) ومضخة تضخ الماء للأعلى، لارتفاع h وتبذل شغلا hm على ماء مضخوخ كتلته m.[٤] هنا نرى أنه لنظام مغلق من المضخات والقنوات، فإن محصلة الارتفاع المضخوخ (مجموع مساهمات كل المضخات) سيساوي محصلة الهبوط خلال القنوات (مجموع إزاحات كل القنوات).

الآن، سنتعامل مع قانون أوم

حقيقة ٣: عادة، فرق الجهد بين مدخل ومخرج[٥] قطعة مادة موصلة كهربائيا يمكن اعتباره متناسبا مع التيار I خلاله؛ معامل التناسب

$$R = V/I$$

يرمز له بالمقاومة، وعناصر الدائرة التي ليس لها مقاومة مهملة تسمى مقاومات.

لنحاول أن نفهم هذا باستخدام التماثل مع التدفق في أنبوب. لنعتبر أنبوبا مستقيما يربط بين خزاني ماء على ارتفاعات مختلفة. لنفترض أن قوة المقاومة F بين وحدة حجمية للماء المتدفق وجدران الأنبوب تتناسب مع سرعة التدفق v :[٦] $F = kv$. حينها سرعة الماء ستتشكل نتيجة الاتزان بين المقاومة $F = kv$ والضغط $\rho_w gh$، حيث h هو فرق الارتفاع، ρ_w- كثافة الماء، g - تسارع السقوط الحر. بالتالي، v ستتناسب مع h، والتي ترتبط بفرق الجهد طبقا للتماثل. الآن، لنتذكر أن التيار I يرتبط بتدفق الماء، الذي يساوي حاصل ضرب سرعة الماء v في مساحة المقطع العرضي للأنبوب S، وبالتالي يتناسب مع h. هذا التناسب هو بالضبط ما تم عرضه في قانون أوم. قوة المقاومة تتناسب مع سرعة التدفق وطول الأنبوب l، أي $k = \kappa l$ في الأنابيب النحيف. للأنابيب المنتظمة، قوة المقاومة (وبالتالي، المعامل κ) تعتمد أيضا على قطر الأنبوب. على كل حال، لنفترض أن κ ثابت (هذا سيرتبط بالحالة التي يكون فيها الأنبوب مملوء بمادة حبيبية، مثل الرمل الخشن). إكمالا للتماثل، المقاومة $R = V/I$ ترتبط بنسبة فرق الارتفاع h إلى تدفق الماء. طبقا لما نوقش أعلاه، المقاومة تتناسب طرديا مع طول الأنبوب l وعكسيا مع مساحة المقطع العرضي S للأنبوب (لأنه لسرعة مثبتة، التدفق يتناسب مع المساحة). بالتالي، وصلنا للحقيقة

---

[١] G. Kircho 1845, G.S. Ohm 1827, and J.P. Joule 1841, respectively

[٢] العقدة هي نقطة تلتقي فيها أسلاك مختلفة

[٣] في حالةالعمليات السريعة جدا أو ذات التردد العالي، هذا التقريب لن يعود صالحا؛ حينها، يمكن استعمال دائرة مكافئة بأسلاك مثالية ومكثفات وملفات مكافئة تمثل سعة وحث الأسلاك الحقيقية

[٤] هنا قمنا بوضع تسارع السقوط الحر $g = 1$، وهذا يمكن فعله إذا استخدمت الوحدات المناسبة

[٥] المدخل والمخرج هما نقطتان يدخل ويخرج التيار عندها؛ غالبا تكون مجرد نهايتي السلك.

[٦] هذا صالح للأنابيب النحيفة التي تهيمن فيها معاوقة اللزوجة على التوربلية

التالية.

حقيقة ٤: المقاومة الكهربائية لسلك (طوله l ومساحة مقطعه العرضي S)

$$R=\rho l/S$$

حيث ρ تسمى بالمقاومية الكهربائية لمادة السلك ($\sigma=1/\rho$).

قانون التناسب بين V و I يفشل كثيرا في الحقيقة: على سبيل المثال، في حالة المصابيح، العلاقة بين الجهد والتيار غير خطية. حتى في هذه الحالة، النسبة V/I تسمى المقاومة. في حالة علاقة $V-I$ غير خطية، المقاومة ستعتمد فحسب على فرق الجهد؛ المشتقة dV/dI يرمز لها بالمقاومة التفاضلية. لو قيل عن عنصر في الدائرة أنه مقاومة، فيفترض أن مقاومته ثابتة.

نهاية، قانون جول:

حقيقة ٥: القدرة المهدرة على عنصر دائرة

$$P=IV,$$

حيث V هي فرق الجهد بين طرفيه، و I هو التيار المار خلاله. أيضا، لو تذكرنا أن

$$I=Q/t,$$

حيث Q هي الشحنة المارة خلال العنصر و t هو الفترة الزمنية، يمكننا القول أن التيار يبذل شغلا

$$A=QV.$$

باستخدام التماثل مع القنوات، قدرة سقوط الماء تعطى بطاقة الوضع الجاذبية المطلقة في وحدة الزمن، والتي تتناسب مع حاصل ضرب ارتفاع المصب ومعدل تدفق الماء.

ليس من الصعب جدا اثبات الحقيقة التالية باستخدام الاستقراء الرياضي.

حقيقة ٦: لو كانت كل المقاومات وجهود البطاريات (القوى الدافعة الكهربائية) معروفة، واعتبرت التيارات في الأسلاك مجاهيل فحينها سيكون قانونا كيرشوف وقانون أوم مجموعة مغلقة من المعادلات الخطية التي يمكن حلها لإيجاد كل التيارات وفروق الجهد في الدائرة (أي أن الحل مميز).

هذه الحقيقة بحد ذاتها يمكن أن تكون مفيدة بعض الأحيان: لو كان بإمكانك تخمين الإجابة، فيكفي حينها أن تثبت أن كل قوانين كيرشوف حققت (لا توجد حاجة لاشتقاق الحل باتباع الطريقة التقليدية).

عادة ما يكون عدد المتغيرات المجهولة في معادلات كيرشوف (وبالتالي، عدد المعادلات) كبيرا، فيصبح حلها مملا بل ومزعجا. من أجل جعل الحسابات أسهل، العديد من الخدع والتقنيات يمكن تطبيقها.

فكرة ١: لو كان يمكن تمثيل دائرة كتركيب من توصيلات متوازية ومتسلسلة، يصبح نظام معادلات كيرشوف مفصولا، ولا تصبح هنالك حاجة لكتابة كل نظام المعادلات. بدلا من ذلك، يمكن تطبيق القواعد الآتية. (أ) للتوصيل على التوازي، محصلة التوصيل (مقلوب المقاومة) هي مجموع التوصيلات، ومحصلة التيار ستنقسم بالتناسب مع التوصيلات:

$$\frac{1}{R_{par}}=\sum_i\frac{1}{R_i}; I_i=\frac{R_{par}I}{R_i}.$$

(ب) للتوصيلات المتسلسلة، محصلة المقاومة هي مجموع المقاومات وفرق الجهد يوزع بالتناسب مع المقاومات:

$$R_{ser}=\sum_i R_i; V_i=\frac{R_iV}{R_{ser}}.$$

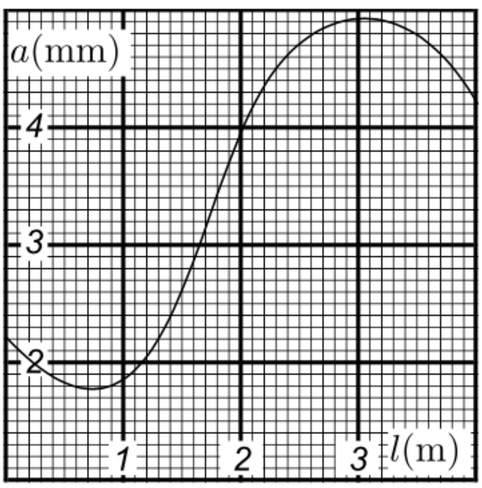
حسابيا، طريقة تطبيق فكرة ١ يمكن صياغتها كالتالي. لو وصلت مقاومتين أو أكثر بين نفس زوج العقد A وB، فاستبدلهم بمقاومة مكافئة طبقا لمعادلة R_{par}؛ أما إذا شكلت مقاومتان أو أكثر سلسلة غير متفرعة بين العقدتين A وB، فاستبدل هذه السلسلة بمقاومة مكافئة طبقا لمعادلة R_{ser}؛ أحذف كل النهايات المدلدلة (الأجزاء المرتبطة بالدائرة بواسطة سلك واحد فقط)؛ أعد العملية هذه مرارا. العملية ستتوقف إذا (أ) تبقت مقاومة مكافئة واحدة أو (ب) تكون جسر (مثلا لأربعة عقد، إذا اتصل خمسة أزواج مع بعض أو أكثر بواسطة مقاومات).

هذه القواعد والصيغ يمكن اشتقاقها بسهولة باستخدام قانوني كيرشوف. فعلا، كل المقاومات الموصلة على التوازي بين A وB تحمل نفس فرق الجهد V_{AB}؛ بالتالي، التيارات $I_i=V_{AB}/R_i$ تتناسب مع التوصيل. هذا يظهر لنا مجموع التيارات بين A وB $I=\sum_i I_i=\sum_i V_{AB}/R_i=V_{AB}\sum_i 1/R_i$، مما يقودنا إلى صيغة لـ $R_{par}=V_{AB}/I$. كل المقاومات الموصلة على التوالي بين A وB يعبر خلالهم نفس التيار I_{AB}، بحيث أن فرق الجهد على كل منهم $V_i=I_{AB}R_i$ أي أن فرق الجهد يتناسب مع المقاومة. مجموع فروق الجهد $V=\sum_i V_i=I_{AB}\sum_i R_i$، بالتالي $R_{ser}=V_{AB}/I=\sum_i R_i$. في النهاية، فيما يخص حذف النهايات المدلدلة: فنتيجة لقانوني كيرشوف، مجموع التيارات الداخلة في في جزء من دائرة يجب أن يكون صفرا؛ فلو كان هنالك سلك واحد فقط يصل جزءا من الدائرة لبقية الدائرة، فالتيار فيه يجب أن يكون صفرا، بالتالي لن يؤثر على توزع التيار ووجوده يمكن تجاهله.

المسألة التالية توضح فكرة ١ في أبسط أشكالها (لتوصيل على التوالي)، مع الحقيقة ٤.

س١:

سلك منتظم بمساحة مقطع عرضي $A_0=1mm^2$ وضع على كل طوله مقياس ميليمتري عبارة عن سلسلة من الأشرطة يفصل بينها مسافة $a_0=1mm$. قمنا بشد السلك بطريقة غير منتظمة، بحيث أن المسافة بين الأشرطة a أصبحت دالة في المسافة l من أحد نهايتي السلك (مقاسة بعد الشد). باستخدام الشكل البياني، حدد المقاومة الكهربائية R للسلك المشدود بافتراض أن مقاومية مادة السلك $\rho=1.0*10^{-6}\Omega m$. افترض أنه أثناء الشد، كثافة المادة ظلت ثابتة.



على كل حال، سنحتاج فكرة إضافية لهذه المسألة، وهذه الفكرة شاملة، وليست محتكرة للدوائر الكهربائية فقط.

فكرة ٢: العديد من الكميات الفيزيائية يمكن التعبير عنها كتكامل كميات أخرى – والتي يمكن إيجادها كالمساحة تحت المنحنيات. من أجل أن نكتشف أي مساحة نحتاج، يمكن استخدام التكنيك الآتي. جزِّء مدى المتغير (للمسألة أعلاه، المتغير l) إلى فترات صغيرة؛ لو كانت كل فترة تضيف للكمية الفيزيائية المعطاة (هنا، المقاومة R) عبر عن هذه الإضافة بدلالة سمك الفترة والمتغيرات الأخرى؛ صمم محاورا إحداثية بحيث أن هذه الإضافة تتناسب مع مساحة منطقة مستطيلية نحيفة في الرسم البياني. بعدها، عندما نقوم بجمع كل المساهمات من كل الفترات ونأخذ سمك الفترات ليكون صفرا، الكمية الفيزيائية التي تهمنا ستعبر بدلالة مساحة الرسم البياني.

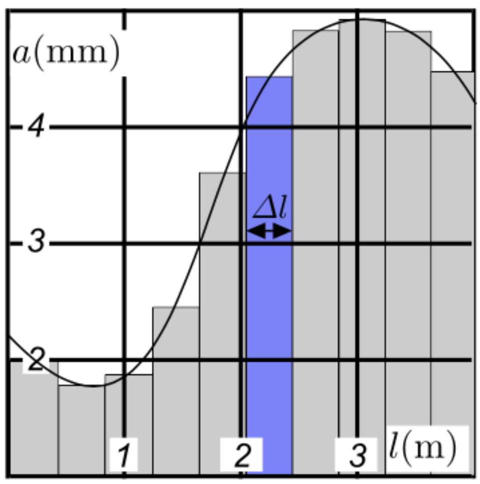
للمسألة أعلاه، كل وصلة طولها Δl من السلك ستساهم بمقاومة $\Delta R = \rho\Delta l/A$ للمقاومة الكلية R؛ هذه القطع موصلة على التوالي، لهذا بالإمكان جمعها. حجم السلك سيظل ثابتا، $Aa = A_0a_0$ بالتالي $A = A_0a_0/a$ وبهذا

$$\Delta R = \frac{\rho}{A_0a_0} a\cdot\Delta l$$

لاحظ أن $\frac{\rho}{A_0a_0}$ ثابت (لا يعتمد على l)، و $a\Delta l$ هي مساحة المستطيل الأزرق في إحداثي $a-l$، أنظر إلى الشكل أدناه. مجموع مساحة كل هذه المستطيلات (المنطقة الزرقاء والرمادية في الشكل) تقريبا هو المساحة بين منحنى $a(l)$ ومحور l، وعند النهاية $\Delta l \to 0$ تصبح مساوية لهذه المساحة. القطع اللانهائية الصغر كهذه تسمى التفاضلات ويرمز لها بالبادئة d (بدلا من البادئة Δ التي نستخدمها للقطع النهائية)؛ المجموع لكل الفترات اللانهائية الصغر يرمز له بعلامة التكامل $\int$. إذن، يمكننا القول بأن $R \approx \frac{\rho}{A_0a_0}\sum a\cdot\Delta l$ (حيث العلامة $\sum$ ترمز للجمع على كل الفترات)، وعند نهاية القطع اللانهائية الصغر dl سنحصل على المساواة

$$R = \frac{\rho}{A_0a_0}\int_0^{4m} a\cdot dl$$

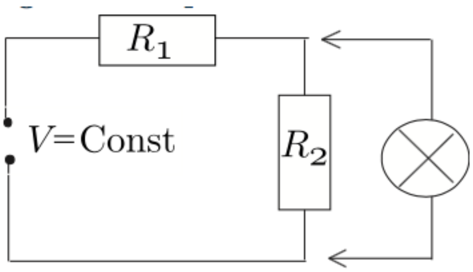
حيث $\int_0^{4m} a\cdot dl$ هي المساحة تحت منحنى $a(l)$.



المسألة القادمة تخدم كمثال بسيط آخر لفكرة ١.

س٢.:

في الشكل، $R_1/R_2 = 4$. لو قمنا بإضافة مصباح كما هو موضح في الشكل، التيار المار خلال R_1 سيزداد بمقدار $\Delta I = 0.1A$. أوجد التيار المار في المصباح.



من الممكن حل هذا السؤال بطريقة طويلة، أو قصيرة. للحل الطويل، توجد فكرة عامة أخرى.

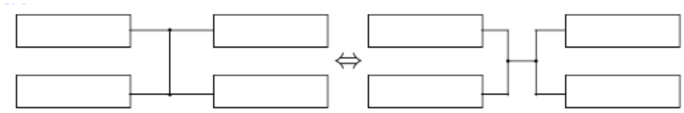
فكرة ٣: لو بدا أن عدد المعطيات بالمسألة قليل جدا، افترض فحسب أن المعطيات الناقصة معروفة (هنا على سبيل المثال، فرق الجهد U والمقاومة R_1)؛ لو مشى كل شيء على ما يرام، فإن المعطيات الناقصة ستنحذف من الجواب.

للحل القصير، يمكن تطبيق إضافة مفيدة لقانوني كيرشوف.

فكرة ٤: قانونا كيرشوف ليسا صالحين للتيارات وفروق الجهد فقط، بل أيضا لتغير فرق الجهد $\Delta V_i = V_i(after) - V_i(before)$ وتغير التيار $\Delta I_i = I_i(after) - I_i(before)$.

بعض الأحيان تكون الدائرة مرسومة بطريقة يصعب فيها معرفة هل يمكن أن تبسط إلى توصيل على التوالي أو التوازي. في هذه الحالة، تستخدم الفكرة الآتية.

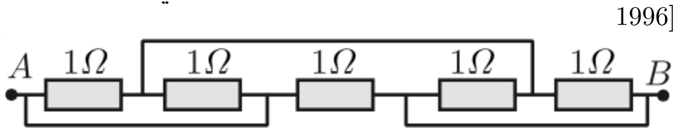
فكرة ٥: أعد رسم الدائرة حتى يصبح شكلها أبسط ما يمكن: قلص الأسلاك الفارغة (التي تصل بين طرفين) إلى نقطة واحدة، ولو كان من الممكن، وضح تركيب التوصيلات على التوالي والتوازي. لا تنسى أنه إذا وصلت عدة أطراف بواسطة سلك فارغ، فمن الممكن إعادة ترتيب التوصيل اعتباطيا (بشرط أن تظل الأطراف المعنية متصلة)، على سبيل المثال كما هو موضح في الشكل أدناه. حقا، يمكن للشخص أن يقول أن تأثير السلك هو مساواة الجهد في جزئين، وفي حالة وجود أجزاء جديدة، فلا يهم بأي ترتيب تتم مساواة الجهود.



هذه الفكرة يمكن توضيحها بواسطة جزء من الـIPhO السابع والعشرين، أنظر أدناه.

س٣.:

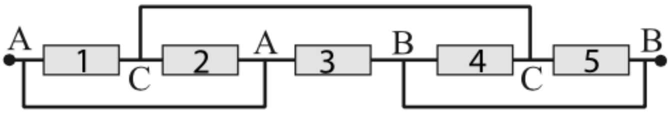
أوجد المقاومة بين المخرجين للدائرة في الشكل. [IPhO-1996]



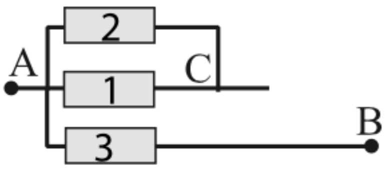
للدوائر المعقدة، من السهل القيام بأخطاء أثناء تبسيط الدائرة؛ عادة، هذا يحصل عندما تكون العقد البعيدة متصلة بأسلاك. يمكن اتباع الطريقة الآتية لاجتناب الأخطاء. ضع رمزا على كل المقاومات، على سبيل المثال أحرف؛ لو كان هنالك أكثر من بطارية، ضع رمزا عليها أيضا. ضع رمزا كذلك على كل العقد، بحيث أن العقد المتصلة بواسطة سلك فارغ (أي لاتوجد فيه أي عناصر) تحمل نفس الرمز، وتلك التي ليس بينها توصيل مباشر لها رموز مختلفة. الآن، ابدأ بإعادة رسم الدائرة بوضع عقدة (على ورقة) ورسم كل المقاومات المتصلة بها. عقب هذا، اختر مخرجا آخر

لأحد المقاومات أو البطاريات، علّم العقد المعنية وارسم المقاومات الموصلة لهذه العقدة؛ أعد هذه العملية حتى ترسم كل الدائرة.

كمثال، لنعتبر المسألة آخر مسألة. سنرمز العقد والمقاومات كما هو موضح في الشكل. لاحظ أنه نتيجة للتوصيلات، رموز العقد تظهر في مكانين مختلفين.



سنبدأ برسم العقدة A، أنظر للشكل. بما أن العقدة A متصلة مباشرة للمقاومات ١ و٢ و٣ ، سنعلق هذه المقاومات بالعقدة A كما هو موضح بالشكل. المقاومتان ١ و٢ موصلتان بالعقدة C ، بالتالي يمكننا توصيل الأسلاك المعنية وتسمية نقطة الاتصال بـC. النهاية الأخرى للمقاومة ٣ متصلة بالعقدةB بالتالي سنرسم سلكا نرمز لنهايته بـ B . الآن، عبر ملاحظة أن المقاومات ٤ و٥ تصل العقدتين B و C ، من السهل إكمال الدائرة.



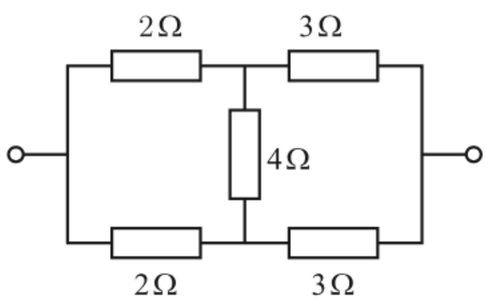
من المقترح عند رسم الدوائر المعقدة استخدام استراتيجية ترميز المقاومات والعقد بالأحرف والأرقام (من المؤكد أنك لا ترغب بعمل خطأ عند إعادة الرسم!)

فكرة ٦: إذا تضمن توصيل قنطرة كهربائية أميترا مثاليا (مقاومته صفر) أو فولتميترا مثاليا (مقاومته لا نهائية)، فإن القنطرة موجودة كوهم فقط، ويمكن كمبدأ حذفها (للفولتميتر) أو قصر دائرتها (للأميتر). بشكل مشابه، يمكن حذفها إذا لم يكن هنالك أي تيار يسري في توصيل القنطرة بسبب التماثل. عندما تحل الدائرة المبسطة، قد يكون من الضروري العودة للدائرة الأصلية (الغير مبسطة): تيار أميتر في توصيل قنطري يمكن إيجاده بواسطة قانون كيرشوف للتيارات (عند كتابته للتيارات الداخلة في العقدة التي يتصل بها الأميتر)؛ فرق جهد الفولتميتر يمكن إيجاده كفرق الجهد بين العقدتين اللتين يتصل بهما الفولتميتر باستخدام قانون كيرشوف لفروق الجهد وفروق جهد المقاومات المعنية.

من إجل إيضاح هذه الفكرة، لنأخذ المسائل الآتية.

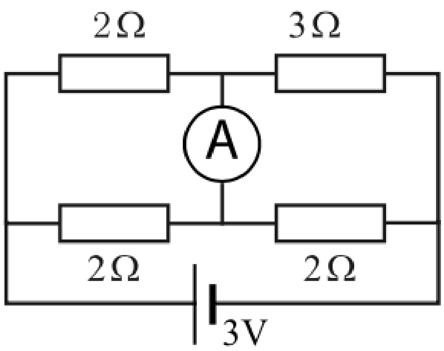
س.٤:

حدد المقاومة بين مخرجي الدائرة في الشكل.



س.٥:

حدد قراءة الأميتر في الشكل.



فكرة ٧: لو كان هنالك أميترات، فولتميترات، بطاريات، أو مصادر تيار غير مثالية موجودة في الدائرة، فحينها القواعد التالية يمكن تطبيقها: (أ) البطارية الغير مثالية بمقاومة داخلية r يمكن تمثيلها بواسطة توصيل متسلسل من بطارية مثالية (بمقاومة داخلية صفرية) ومقاومة r؛ (ب) مصدر التيار الغير مثالية ذو مقاومة داخلية r يمكن تمثيله بواسطة توصيل على التوازي لمصدر تيار مثالي (بمقاومة داخلية لانهائية) ومقاومة r؛ (ج) الفولتميتر الغير مثالي يمكن تمثيله بواسطة توصيل متوازي من فولتميتر مثالي (بمقاومة لانهائية) ومقاومة R؛ (د) الأميتر الغير مثالي يمكن تمثيله بواسطة توصيل متسلسل من أميتر مثالي (بمقاومة صفرية) ومقاومة R. لاحظ جيدا! الأميتر الغير مثالي ليس أميترا خاطئا: ما يزال يظهر التيار الذي يمر حقيقة عبره؛ الأمر سيان للفولتميتر الغير مثالي، فهو يظهر فرق الجهد الذي بينه مخرجين حقيقة.

يمكن استخدام التوجيهات الآتية فيما يخص القيم المعتادة للمقاومات الداخلية للأميترات والفولتميترات الحقيقية. الفولتميترات الرقمية الأكثر شيوعا لها مقاومة داخلية $10M\Omega$، لكن تلك الأرخص يمكن أن تكون $1M\Omega$، وتلك الغالية يمكن أن تصل لمدى الجيجا أوم؛ عادة ما تكون المقاومة الداخلية مستقلة عن مدى القياس. أما للفولتميترات التناظرية analogue، المقاومة تعتمد على مدى القياس المختار V_{max}، ويمكن تحديدها بمعرفة ما يسمى بتيار الانحراف الكلي FSDC. ببساطة، الفولتميتر التناظري عبارة عن جلفانوميتر (جهاز فيه إبرة تنحرف تناسبا مع التيار خلاله)، متصل على التوالي مع مقاومة مميزة بحيث أنه تحت فرق الجهد الأقصى V_{max}، التيار سيساوي الـ FSDC.فإذن، لو كانت $I_{FSDC} = 100\mu A$، واخترنا مدى 10-Volt، فإن المقاومة الداخلية ستكون $r = 10V/100\mu A = 100k\Omega$. القيم النموذجية لـ FSDC تتراوح بين $25\mu A$ إلى $1\mu A$.

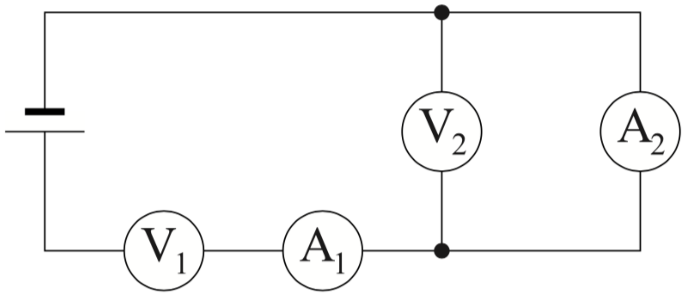
الأميترات الرقمية تقيس فرق الجهد الداخلي على مقاومة صغيرة وتترجم النتيجة إلى تيار؛ اعتمادا على مدى التيار المختار، المقاومة المستخدمة تختلف، وفرق الجهد المتحمل الأقصى (MBV) V_{MBV} يمكن استخدامه لتحديد المقاومة؛ على سبيل المثال، لمدى 20-mA و $V_{MBV} = 300mV$، المقاومة ستكون $300mV/20mA = 15\Omega$. القيم النموذجية لـ V_{MBV} تتراوح بين $100mV$ إلى $1V$. **الأميتر التناظري** عبارة عن جلفانوميتر متصل على التوازي مع مقاومة صغيرة؛

في حالة مسائل الأولمبياد النظرية، غالبا ما يفرض أن الأميترات والفولتميترات مثالية، ما عدا إذا فرض غير هذا. على كل حال، يوجد استثناء لهذه القاعدة: إذا كانت ظروف المسألة تتناقض مع فرضية المثالية، سيتوجب عليك أن تتركها. خذ بعين الاعتبار أن في حالة المسائل النظرية ليس من الحكمة أن تضع افتراضات فيما يخص قيم المقاومات الداخلية للفولتميترات والأميترات الغير مثالية: غالبا ما يتجاهل صناع المسائل منطقية قيم المقاومات.

س.٦:

فولتميتران متطابقان وأميتران متطابقان تم توصيلهم

ببطارية كما هو موضح بالشكل. القراءات على الأجهزة هي كما يلي: الأميتر $A_1 - I_1 = 200\mu A$، الفولتميتر $V_1 = 100V$، والفولتميتر $V_2 = 2V$. ماهي قراءة الأميتر A_2؟ قدر، لأي درجة هذه المقاومات الداخلية التي يمكن إيجادها عن طريق هذه المعلومات منطقية؛ لو كان هنالك شيء غريب، هل من الممكن إصلاح المسألة عبر تغيير الدائرة بحيث أن الحل سيظل سليما؟

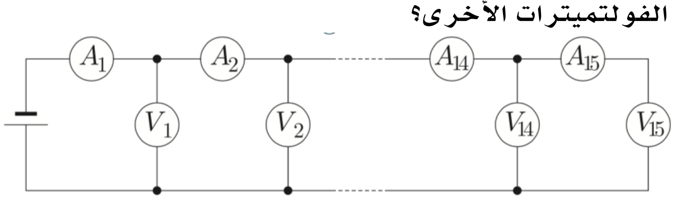


فكرة ٨: من المفيد أحيانا استخدام قانون كيرشوف للتيار لمنطقة كاملة بدلا من عقدة واحدة في الدائرة: مجموع التيارات الداخلية في المنطقة سيساوي مجموع التيارات الخارجة.

هذه الفكرة يمكن توضيحها عبر المسألة الآتية

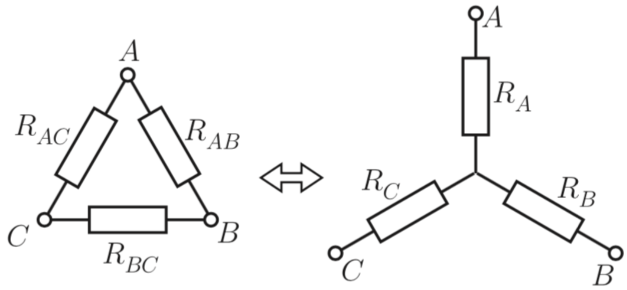
س.٧:

[EstPho-2003] ١٥ فولتميتر متماثل و ١٥ أميتر غير متماثلين وصلوا ببطارية هما هو موضح في الصورة. قراءة أول فولتميتر هي $V = 9V$، قراءتا أول أميترين هما $I_1 = 2.9mA$ و $I_2 = 2.6mA$. ما هو مجموع قراءات كل الفولتميترات الأخرى؟



في بعض الحالات، التوصيل القنطري يكون حقيقيا ولا يمكن إزالته. في حالة مسائل الأولمبياد، من النادر حدوث هذا، لأنه في هذه الحالة الصعوبة تكون رياضية فقط في حل نظام من معادلات كيرشوف الخطية. هنالك العديد من الطرق التي تبسط هذا العمل الرياضي وستعرض فيما يلي.

فكرة ٩: أي دائرة مكونة فقط من مقاومات ولها ثلاث مخارج ستكون مكافئة لتوصيل Δ أو توصيل Y لثلاث مقاومات مختارة بشكل مناسب[٧]. وبشكل خاص، توصيل Y يمكن تعويضه بتوصيل Δ والعكس صحيح [٨].



لاحظ أن توصيل Δ يسمى أيضا مثلثي، وتوصيل Y يسمى نجمي. إذن، فالفكرة هي أن نعوض أيا من التوصيل المثلثي بتوصيل نجمي أو العكس حتى تكون الدائرة الناتجة أسهل للتحليل من الدائرة الأصلية. أثناء هذا، كل المخارج الثلاثة يجب أن تظل نفسها. لنعتبر أسهل حالة عندما تكون كل المقاومات الثلاثة متساوية: لتوصيل Δ r، ولتوصيل $Y - R$. حينها، المقاومة بين مخرجين في توصيل Y ستكون $2R$ (مقاومتان على التوالي)، ولتوصيل Δ ستكون $\frac{2}{3}r$ ($2r$ متوازية مع r). بالتالي، توجد صلة بين هاتين الدائرين لو كانت $2R = \frac{2}{3}r$، أي $r = 3R$: توصيل Δ يجب أن يمتلك ثلاث أضعاف مقاومات توصيل Y. هذه القاعدة – لو نسيت– يمكن بسهولة اشتقاقها متى ما أحتيجت.

في الحالة العامة عند مقاومات غير متساوية، معادلات تعويض $\Delta - Y$ تشتق بحل نظام من ثلاث معادلات تفرض تكافؤ آزواج المقاومات بين المخارج r_{AB}, r_{BC}، و r_{CA}: النتيجة هي كما يلي: لتعويض Δ إلى Y

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}},$$

وبشكل مماثل لـR_B و R_C (العلامات ستعوض دوريا)؛ لتعويض Y إلى Δ،

$$\frac{1}{R_BC} = \frac{\frac{1}{R_B}\cdot\frac{1}{R_C}}{\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}},$$

وبشكل مماثل لـR_{BC} و R_{CA}.

اشتقاق هذه المعادلات خلال الأولمبياد سيأخذ وقتا طويلا جدا، لذا من الأفضل تذكرهم. تذكرها في الحقيقة ليست صعبا؛ بداية، لنتحدث عن تعويض Δ إلى Y الذي غالبا ما يكون أكثر نفعا من التحويل العكسي (توجد استثناءات) بما أنه يزيل حلقة من الدائرة – الحلقات يمكن أن تكون توصيلات قنطرية يصعب تحليلها. حتى لو لم تكن هذه هي الحالة، فإن تعويض Δ إلى Y يميل لأن يقلل عدد التوصيلات على التوازي (التعويض العكسي يميل لأن يزيدها)، مما يقود إلى حسابات أبسط بما أن المقاومات هي المعطاة عادة وليست الموصليات. مقام المعادلة بسيط جدا – مجرد مجموع المقاومات. البسط بسيط أيضا، ضرب مقاومتين، سيتوجب علينا فقط أن نعرف أي من المقاومات سنتجاهلها من الضرب. على كل حال من السهل معرفة هذا عبر اعتبار التماثل: لذا، لمقاومة موصلة بالعقدة B في توصيل Y، سنقوم باستثناء المقاومة المقابلة AC في توصيل Δ.

لو كنا فعليا بحاجة تعويض Y إلى Δ، يمكن استنباط الصيغة بسهولة أيضا من تركيب توصيل Δ إلى Y: كل ما يجب القيام به هو تغير المقاومات إلى موصليات.

لاحظ أن فكرة ٩ لا يمكن تعميمها لدوائر تتكون من مقاومات لها أكثر من ٣ مخارج [٩]. استثناء لهذه الحالة هو عندما تكون كل أزواج المقاومات متساوية (لـR)، حيث تكون الدائرة مكافئة لتوصيل نجمي له n مقاومة، كل لها مقاومة $R/2$ (على الرغم من أنها ليست مكافئة لتوصيل n−ضلعي بمقاومات متساوية، لأن ثنائيات العقد القريبة لبعضها بينها مقاومات أصغر من الثنائيات البعيدة عن بعض).

كتوضيح، لنعتبر المسألة القادمة.

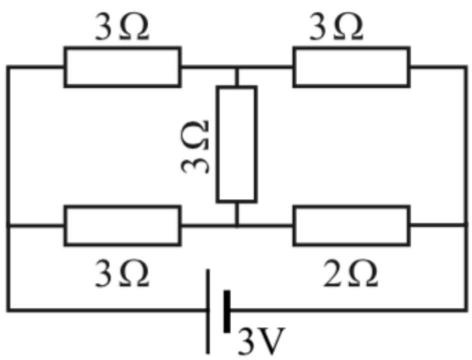
س.٨:

حدد التيار الذي يمر بالبطارية.

[٧] الإثبات معطى في ملحق ١.

[٨] A.E.Kennelly, 1899

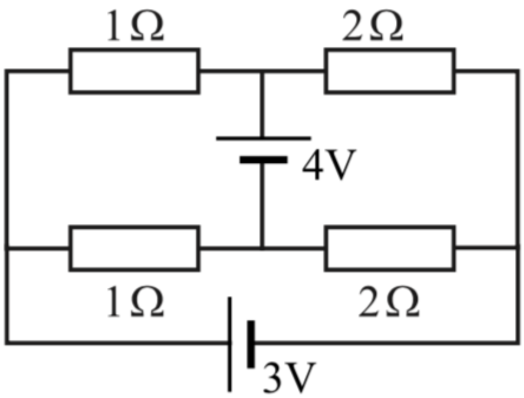
[٩] فعلا، يوجد عدد $n(n-1)/2$ زوج مخارج مختلفة، التي يمكن أن يكون لها مقاومات مختلفة؛ لحالة عامة، المعادلات الـ $n(n-1)/2$ لا يمكن لها بالنسبة للمقاومات الـn لتوصيل نجمي (أو مضلع) طالما أن $n(n-1)/2 > n$ أي $n > 3$.



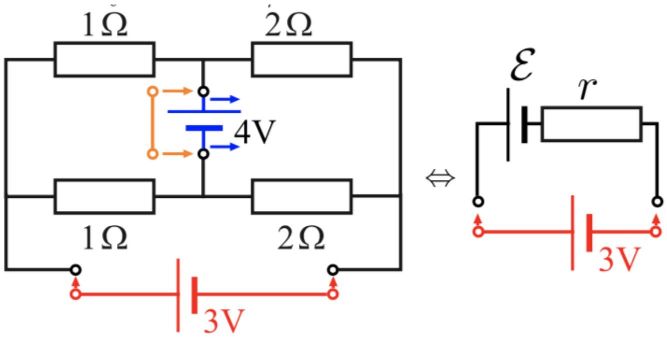
فكرة ١٠: أي دائرة متكونة من مقاومات وبطاريات فقط ولها مخرجان A وB تكافئ بطارية ومقاومة موصلتين على التوالي (نظرية ثفينين)[١٠] القوة الدافعة الكهربائية ε للبطارية يمكن أن نجدها عبر إيجاد فرق الجهد بين المخرجين A وB عندما لا يوجد هنالك أي حمل متصل خارجيا على المخرجين (هذا بسبب أن الدائرة الأصلية والمعوضة يجب أن يتصرفا بشكل مماثل عندما لا يكون هنالك ثقل). المقاومة r (المقاومة الداخلية للبطارية) يمكن أن توجد كـε/I_0، حيث I_0 هو التيار الذي يمر خلال سلك يقصر دائرة المخرجين.

س.٩:

احسب التيار المار خلال البطاريتين.



من أجل أن نجعل تطبيق فكرة ١٠ أكثر وضوحا، لنقم بحل الجزء الأول من المسألة الأخيرة، ولنجد التيار المار في بطارية الـ$3V$. في الشكل أدناه، الجزء الأسود والأزرق من الدائرة سيعوض ببطارية بقوة دافعة كهربائية ε ومقاومة داخلية r (أنظر إلى الشكل). سنفترض بداية أنه لا يوجد أي ثقل، أي أن الجزء المرسوم بالأحمر غير مفقود. بعدها، البطارية الزرقاء ستكون تيارين $4V/4\Omega = 1A$ و$4V/2\Omega = 2A$ في الدائرتين اليسرى واليمنى، على التوالي. بالتالي، فروق الجهد على المقاومات أسفل الشكل (1Ω و2Ω) ستساوي $2A\cdot 1\Omega = 2V$ و$1A\cdot 2\Omega = 2V$، بالتوالي. بالتالي، فرق جهد التوصيلة ستكون $2V - 2V = 0V$، أي أن $\varepsilon = 0$. الآن لنحسب المقاومة الداخلية r للبطارية المكافئة، سنعوض السلك البرتقالي بالبطارية الزرقاء (أنظر إلى الشكل) ونحسب المقاومة بين المخرجين: التوصيلة المتوازية لمقاومتي الـ1Ω والتوصيلة المتوازية لمقاومتي الـ2Ω متصلتان على التوالي، بالتالي $r = (\frac{1}{2}+1)\Omega = 1.5\Omega$. نهاية، نعيد الجزء الأحمر من الدائرة لمكانه للدائرة المكافئة على اليمين (مع تذكر أن $\varepsilon = 0$ و$r = 1.5\Omega$): التيار المار خلال بطارية الـ$3V$ سيكون $I = 3V/1.5\Omega = 2A$.



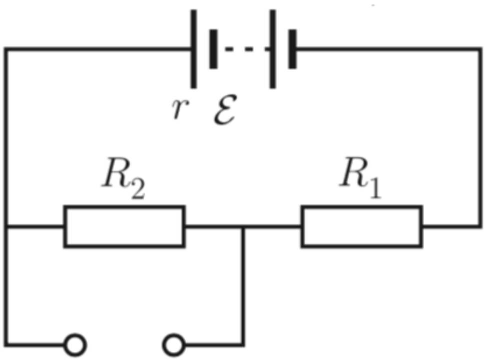
الحقيقة الآتية يسهل اشتقاقها، لكن معرفتها ستساعد على حفظ بعض الوقت في الأولمبياد.

حقيقة ٧: حتى نسحب أكثر مقدار ممكن من القدرة من بطارية، مقاومة الحمل يجب أن تكون مساوية للمقاومة الداخلية للبطارية.

فعلا، التيار المار خلال الحمل هو $I = \varepsilon/(r+R)$، حيث R هي مقاومة الحمل. بالتالي، القدرة المستهلكة على الحمل ستساوي $P = R*I^2 = \varepsilon^2 R/(R+r)^2$. سيكون من الأسهل أن نحلل $\frac{1}{P} = \varepsilon^{-2} r(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}+2)$. لو كانت P القيمة عظمى، ستكون $1/P$ القيمة الصغرى؛ لذا سنحتاج لأن نجد القيمة الصغرى لـ$\frac{1}{P}$. عند أخذ المشتقة بالنسبة لـR سنحصل على $\frac{d}{dR}\frac{1}{P} = \varepsilon^{-2}(1-(r/R)^2) = 0$، بالتالي $R = r$. (طريقة أخرى ستكون استخدام حقيقة أن جمع عدد x ومقلوبة $1/x$ له قيمة دنيا عندما $x = 1$، بالتالي $R/r = 1$). بالتالي، $P_{max} = \varepsilon^2/4r$.

س.١٠:

أوجد أقصى مقدار ممكن من الطاقة التي يمكن استهلاكها في حمل موصل لمخرجي الدائرة في الشكل (القدرة تعتمد على مقاومة الحمل، المطلوب منك هو إيجاد أكبر مقدار ممكن لهذه القدرة).



فكرة ١١: أحيانا يكون من المفيد التعامل مع مصادر تيار ثابت بدلا من البطاريات. بطارية بقوة دافعة كهربائية ε ومقاومة داخلية r ستكون مكافئة لمصدر تيار ثابت بتيار $I = \varepsilon/r$ موصل علي التوازي مع المقاومة r[١١].

مصدر التيار الثابت عبارة عن جهاز يكون تيارا ثابتا I غضا عن الحمل الموصل لمخرجيه–طالما أن مقاومة الحمل ليست لانهائية. صلاحية هذه النظرية يمكن تأكيدها بسهولة: يكفي أن نتحقق من أنه لنفس جهدي المخرجين، التيارات ستكون نفسها. لنفترض أن بطارية (بقوة دافعة كهربائية ε ومقاومة داخلية r) لها فرق جهد مخرجين V؛ حينها، فرق الجهد على مقاومتها الداخلية سيكون $\varepsilon - V$ وبالتالي، التيار سيكون $I_{battery} = (\varepsilon - V)/r$. لو كان نفس فرق الجهد مطبقا على مصدر تيار ثابت (بتيار ثابت $I = \varepsilon/r$)، فإن التيار المار بالمقاومة بسبب فرق الجهد سيكون V/r، أي أن محصلة التيارين سيكون $I_{current-source} = I - V/r = (\varepsilon - V)/r$. فعلا، $I_{battery} = I_{current-source}$ لأي جهد حمل V، بالتالي هذه

(١٠)
(١١) لو طبقنا هذا التكافؤ على نظرية ثفينين، سنحصل على ما يسمى بنظرية نورتن [E.L. Norton (1926), H.F. Mayer (1926)].

البطارية ومصدر التيار هذا يتصرفان بشكل متكافئ.

المسألة التالية توضح فكرة ١١ (على الرغم من أنه يمكن حلها أيضا باستخدام فكرة ١٠).

س.١١:

n بطارية بقوى دافعة كهربائية ε_i ومقاومات داخلية r_i (حيث $i = 1, 2, ..., n$) وصلت على التوالي. ما هي القوة الدافعة الكهربائية المكافئة والمقاومة الداخلية لهذا النظام؟

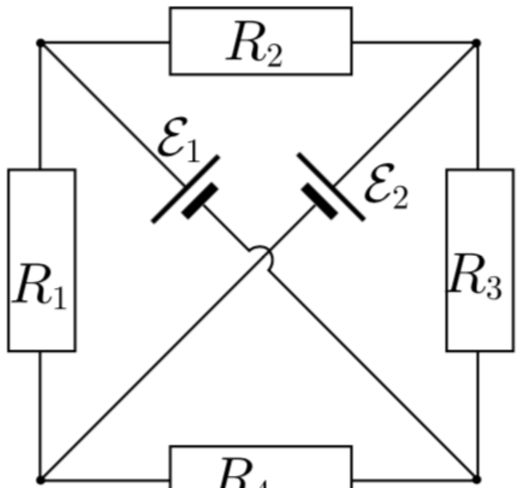
فكرة ١٢: قانون أوم ومعادلتا كيرشوف خطية (أي أن كل حد يحوي فقط التيار أو فرق الجهد مرفوعين للقوة واحد)، بالتالي مبدأ التراكب صالح. بشكل أكثر تحديدا، افترض أنه كانت لدينا دائرة تحتوي على مقاومات، n بطارية مثالية، و m مصدر تيار مثالي فقط. حينها التيار في السلك الـj يمكن إيجاده كالتالي

$$I_j = \sum_{k=1}^{n+m} I_j(k)$$

حيث $I_j(k)$ هو التيار الذي يمر في هذا السلك عندما تكون البطارية الـk الوحيدة (أو مصدر التيار) الموجودة في الدائرة (كل البطاريات الأخرى تقصر دائرتها، وكل مصادر التيار الأخرى تحذف عبر قطع توصيلها بالدائرة).

س.١٢:

[EstPhO-2012] في الشكل أدناه، البطاريات مثالية، $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ و $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. أوجد التيراتا في المقاومات (أي I_1, I_2, I_3 و I_4)، معبرة بواسطة R و ε).



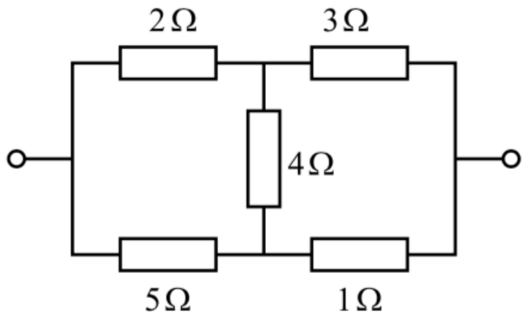
(لاحظ أن هذه المسألة يمكن حلها بواسطة فكرة ١٩ أيضا).

فكرة ١٣: يمكن تقليل عدد المعادلات الخطية والمجاهيل باستخدام طريقة **التحليل الشبكي**، التي تتحقق فيها أول مجموعة من معادلات كيرشوف تلقائيا. أول خطوة هي اختيار مجموعة كاملة من شبكات مستقلة خطيا $l_1, l_2, ...l_n$ (مفهوم الاستقلال الخطي سيشرح أدناه)؛ الخطوة الثانية هي تحديد تيارات للشبكات $I_1, I_2, ...I_n$، والتعبير عن التيارات في المقاومات باستخدام تيارات الشبكات هذه. الخطوة الأخيرة هي التعبير عن المجموعة الثانية من معادلات كيرشوف بدلالة تيراتا المقاومات باستخدام قانون أوم، وحل نظام المعادلات الناتجة بالنسبة للتيارات الشبكية.

لنقم بتوضيح الطريقة ومبدأ الشبكات المستقلة خطيا باستخدام المسألة التالية.

س.١٣:

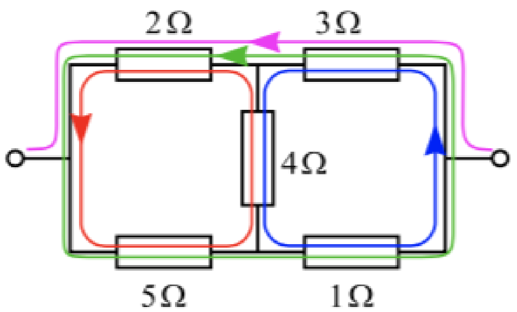
حدد المقاومة بين مخرجي الدائرة باستخدام طريقة التحليل الشبكي.



يمكن حل هذه المسألة باستخدام فكرة ٩ – وربما هذا هو أسهل حل. لكننا هنا نريد أن نقدم حل المسألة باستخدام فكرة ٣١. حتى نبدأ سنحتاج فكرة إضافية.

فكرة ١٤: لو كانت المهمة هي إيجاد مقاومة دائرة بين مخرجين، سيكون من المفيد غالبا افتراض اما أن فرق جهد V مطبق بين مخرجيها، أو أن تيارا I يتحرك عبر هذين المخرجين. حينها سيتوجب إيجاد الكمية المفقودة (I أو V)، وحساب $R = V/I$.

وبالتالي، سنفترض أن تيارا I يسري خلال الدائرة. لنأخذ نظرة على الأشكال الممكنة للتيارات الشبكية في الشكل أدناه.



لنرمز للشبكة الزرقاء بـi_1، الحمراء بـi_2، الخضراء بـi_3، والبنفسجية بـi_4. لو جعلنا التيار في الشبكة الحمراء مساويا للتيار في الشبكة الزرقاء، فسيتلاشيان عند السلك المار بمقاومة الـ4Ω، بالتالي جمعهما سيكون مكافئا لتيار الشبكة الخضراء. كنتيجة، تيار الشبكة الخضراء سيكون غير مستقل خطيا عن تياري الشبكتين الحمراء والزرقاء: من هذه التيارات الشبكية الثلاث، فقط اثنتان يمكن إبقاؤهما كمجهول (لو أبقينا ثلاثتهم مجاهيلا فسيكون عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات). ليس من المهم أي زوج من التيارات الشبكية سنختار؛ سنختار i_1 و i_2 في هذا المثال. على كل حال، بالشبكتين الحمراء والزرقاء فقط، لا يمكننا إيجاد أي تيار يسري خلال مدخل ومخرج الدائرة، مما يعني أن النظام الشبكي ليس مغلقا حتى الآن: نحتاج شبكة تمر خلال مخرجي النظام. أي شكل لهذه الشبكة سيكون كافيا؛ لنقم باستخدام الشبكة الموضحة بالمنحنى البنفسجي (يمكن اعتبارها مغلقة بواسطة بطارية خارجية). لنلاحظ أن i_4 يجب أن تساوي I – التيار الساري في الدائرة.

الآن أصبح لدينا مجموعة كاملة من التيارات الشبكية، i_1، i_2 و $i_4 = I$، ومن المتطلب أن نكتب معادلات كيرشوف لفروق الجهد. التيار المار خلال مقاومة الـ3Ω هو $i_1 + I$، لذا فرق الجهد عليه سيكون $V_3 = 3\Omega(i_1 + I)$؛ بشكل مماثل $V_4 = 4\Omega(i_1 - i_2)$ (الإشارة السالبة ترتبط بحقيقة أن التيارين i_1 و i_2 متعاكسان في هذه المقاومة)، و $V_1 = 1\Omega i_1$. لاحظ أن إشارات فروق الجهد هذه تم أخذها بالنسبة للتيار الشبكي الأزرق: فرق جهد موجب يعني أنه عند التحرك على طوال الشبكة الزرقاء، فرق الجهد يقل. طبقا لقانوني كيرشوف عند إكمال دورة كاملة، هبوط الجهد يجب أن يكون صفرا: $0 = V_3 + V_4 + V_1 \Rightarrow 3(i_1 + I)) + 4(i_1 - i_2) + i_1 = 8i_1 - 4i_2 + 3I = 0$.
يمكننا أن نكتب معادلة مماثلة لهبوط جهد الشبكة الحمراء: $i_2(2 + 4 + 5) - 4i_1 + 2I = 0$.
من المعادلة الأولى، $4i_1 = 2i_2 - \frac{3}{2}I$، تعويضها في

المعادلة الثانية سيقودنا إلى $9i_2 + \frac{7}{2}I = 0$، بالتالي $i_2 = -\frac{7}{18}I$ و $i_1 = -\frac{1}{4}(\frac{7}{9}+\frac{3}{2})I = -\frac{41}{72}I$. بالتالي، $V_3 = (1-\frac{41}{72})I \cdot 3\Omega = \frac{93}{72}\Omega \cdot I$، و $V_2 = \frac{22}{18}\Omega \cdot I$؛ فرق الجهد الكامل على الدائرة هو $V = V_2 + V_3 = \frac{181}{72}\Omega \cdot I$، مما يعني أن المقاومة $R = V/I = \frac{181}{72}\Omega$.

فكرة ١٥: يمكن تقليل عدد المجاهيل وعدد المعادلات الخطية باستخدام طريقة **الجهود** التي تكون فيها المجموعة الثانية من قوانين كيرشوف (للجهود) محققة تلقائيا. الخطوة الأولى هي إعطاء كل عقدة (نقطة اتصال بين الأسلاك) جهدا φ_n (حيث الرمز n يرمز للعقدة الـn). الخطوة الثانية هي التعبير عن مجموعة المعادلات الأولى بدلالة الجهود باستخدام قانون أوم، وحل نظام المعادلات الناتج.

س.١٤:

حل المسألة السابقة باستخدام طريقة الجهود.

بشكل مشابه لما قمنا به من قبل، سنفترض أن مخارج الدائرة موصلة ببطارية. مرجع الجهد يمكن اختياره اعتباطيا، لذا من المفيد جعل جهد أحد مخرجي الدائرة صفرا (لتكن اليسرى)؛ حينها سيكون جهد اليمنى مساويا لجهد البطارية V. هنالك عقدتان إضافيتان في الدائرة، لتكن جهودهم φ_1 (العليا)، وφ_2. التيار المار بالعقدة العليا قادما من السلك الأيمن $I_3 = (V-\varphi_1)/3\Omega$؛ التيار القادم من العقدة العليا للسلك الأيسر $I_2 = \varphi_1/2\Omega$؛ التيار من العقدة العليا للأسفل $I_4 = (\varphi_1-\varphi_2)/4\Omega$. طبقا لقانون كيرشوف للتيارات، $I_3 = I_2 + I_4$، بالتالي

$$(V-\varphi_1)/3\Omega = \varphi_1/2\Omega + (\varphi_1-\varphi_2)/4\Omega \Rightarrow$$
$$13\varphi_1 - 3\varphi_2 = 4V.$$

بشكل مشابه، العقدة الصفلية، $I_4 + I_1 = I_5$، حيث $I_1 = (V-\varphi_2)/1\Omega$ و $I_5 = \varphi_2/5\Omega$. هذا سيقودنا إلى

$$(\varphi_1-\varphi_2)/4\Omega + (V-\varphi_2/1\Omega = \varphi_2/5\Omega) \Rightarrow$$
$$-5\varphi_1 + 29\varphi_2 = 20V.$$

حل نظام المعادلات الخطي هذا سيعطي $\varphi_1 = \frac{88}{181}V$ و$\varphi_1 = \frac{140}{181}V$؛ التيار الكامل يمكن حسابه باستخدام قانون كيرشوف للعقدة اليسرى، $I = I_2 + I_5 = \frac{44+28}{181}V/\Omega$، بالتالي $R = V/I = \frac{181}{72}\Omega$. يمكننا التأكد من هذه النتيجة لو حسبنا التيار الكامل بناء على العقدة اليمنى.

هذا المثال يوضح أن صعوبة كل الطريقتين (أنظر إلى فكرة ٣١ و٥١) تقريبا متساري، لذا فالاختيار يعتمد عادة على التفضيل الشخصي. في حالة التيارات الشبكية، اختيار مجموعة جيدة من الشبكات الخطية المستقلة قد يبدو كخطوة إضافية في الحل، لكن في حالة الدوائر المستوية (أي الدوائر التي يمكن رسمها على ورقة بحيث أن الأسلاك لا تتقاطع وتتلاقى فقط عند العقد)، هذه الخطوة ليس ضرورية لو استخدمنا إضافة صغيرة لطريقة التيار الشبكي التي سيرجع لها كطريقة الدالة البَارية *streamfunction*.

مفهوم الدالة التيارية $\psi(x,y)$ يمكن استخدامه للتدفقات ثنائية البعد اللامنضغطة التي ستتبع فيها خطوط التيار خطوط القيمة الثابتة $\psi(x,y) = const$، وفيض التدفق[١٢] بين خطين يساوي الفرق قيمتي ψ المرتبطة. في حالة تدفق المائع ثنائي البعد، فيض التدفق هو مجموع التيارات الكهربائية المارة خلال مقطع عرضي. في حالة الدوائر المستوية، التيار يتدفق فقط عبر الأسلاك، بالتالي الدالة التيارية ثابتة بين الأسلاك، وتقفز عند موقع الأسلاك.[١٣]

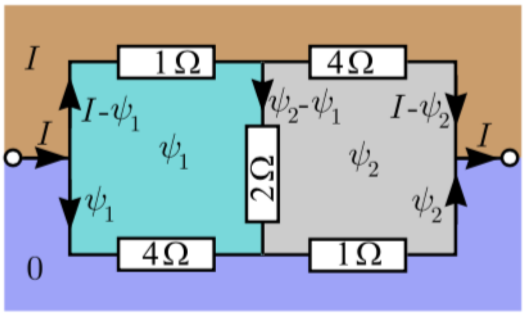
فكرة ١٦: للدوائر المستوية، بدلا من استخدام طريقة التيارات الشبكية، يمكن استخدام طريقة الدوال التيارية. كل وجه (المساحة الفارغة بين الأسلاك) للدائرة سيعطى قيمة للدالة التيارية: الوجه الـi سيعطى قيمة ψ_i التي ستوجد باستخدام قانون كيرشوف لفروق الجهد. التيار في السلك الفاصل بين الوجهين الـi والـj سيكون $I_{ij} = \psi_i - \psi_j$؛ إشارة I_{ij} هنا ستختار بحيث أن لو تحركنا مع اتجاه I_{ij}، الوجه i سيكون على اليسار.

الآن يمكننا أيضا استنباط استنتاج مهم فيما يخص عدد الشبكات المستقلة خطيا للدوائر المستوية:

حقيقة ٨: عدد درجات الحرية (وبالتالي، العدد الأكبر للتيارات الشبكية المستقلة خطيا) لتوزع التيار في الدائرة المستوية يساوي عدد الوجوه في الشكل الناتج (باستثناء الوجه اللانهائي).

بالفعل، توزع التيار يمكن وصفه بالكامل باستخدام قيم الدوال التيارية عند الأوجة، والوجه اللانهائي يمكن التسليم بأن له $\psi = 0$، لذا فعدد درجات الحرية يساوي عدد الأوجة النهائية للشكل.

من أجل أن نوضح فكرة ١٦، لنعتبر مجددا مسألة ١٣؛ القيم المجهولة للدالة التيارية (ψ_1 وψ_2) رسمت مع التيارات في الشكل أدناه (مقارنة بمسألة ١٣، أخذنا قيم مقاومات مختلفة). مجموعة قوانين كيرشوف لفرق الجهد ستكون مشابهة جدا لما حصلنا عليه من طريقة التيارات الشبكية، لذا سنتخطى هذا الجزء من الحل.



فكرة ١٧: بسبب التماثل في قانوني فرق الجهد والتيار لكيرشوف، توجد ثنائية بين التيارات الكهربائية وفروق الجهد[١٤] مما يعني أننا يمكننا تبديل فروق الجهد بالتيارات، وكنتيجة سنحصل على مسألة مشابهة جدا. هذا سيعمل بشكل جيد في حالة الدوائر المستوية حيث تتحول قيم فروق الجهد لقيم الدالة التيارية، والعكس؛ الدائرة نفسها ستتحول لدائرتها المزدوجة (أنظر أدناه). غالبا ما نحول مسألة دائرة ما إلى مسألة دائرة أخرى، لكن في حالة الدوائر المزدوجة ذاتيا (عندما تكون الدائرة مطابقة لدائرتها المزدوجة)، التماثل قد يكون نافعا جدا.[١٥]

لنقم بتطبيق مبدأ الازدواجية للتوصيل القنطري المرسوم أعلاه؛ يمكن الحصول على الدائرة الازدواجية عبر وضع عقدة في كل وجه في الدائرة الأصلية، وتوصيل العقد الجديدة بأسلاك بحيث أن كل سلك قديم يقطع بسلك جديد واحد، أنظر أدناه.

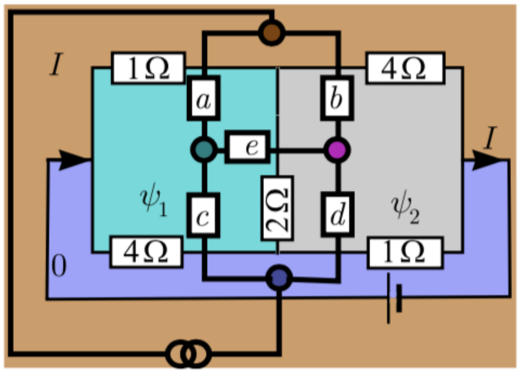
---

[١٢] لتدفق المائع، فيض التدفق هو كمية المائع المنتقلة خلال مقطع عرضي لوحدة الزمن؛ في حالة التيار الكهربائي، هو فقط مجموع التيار.

[١٣] هذه العبارة صالحة للدوائر اللامستوية كذلك، لكن حينها سيكون هنالك أوجه لا تكون فيها قيمة الدالة التيارية معاملا مستقلا (تعرف بقيم الدوال التيارية للأوجه المقاربة) لذا سيكون تطبيق فكرة ٦١ أقل بساطة.

[١٤] A. Russell 1904

[١٥] L.A. Zadeh 1951



كان لدينا في الدائرة الأصلية بطارية أبقت فرق الجهد بين المخرجين مساويا لـ ε، وفي دائرتنا الجديدة، لدينا مصدر تيار يبقي فرق الدالة التيارية بسن العقدتين العلوية والسفلية مساوية لـI. عندما استخدمنا طريقة الجهود مع دائرتنا القديمة، كان لكل عقدة جهد؛ الآن لكل عقدة سيكون هنالك قيمة للدالة التيارية. للدائرة القديمة، تم إيجاد الجهود φ_i عن طريق كتابة قوانين كيرشوف للتيار لكل عقدة؛ للعقدة الـj

$$\sum_i (\psi_i - \psi_j) R_{ij} = 0$$

حيث R_{ij} هي المقاومة على السلك (في الدائرة القديمة) التي تتقاطع مع سلك الدائرة الجديدة الواصلة بين العقدتين الـi والـj. سنحصل على نفس مجموعة المعادلات بالضبط لو كنا نعتبر الدائرة الجديدة كشبكة مقاومات معتادة بمقاومات تساوي موصليات الدائرة القديمة (لذا ففي الشكل أعلاه، مقاومة المقاومة a هي $1\Omega^{-1}$، مقاومة المقاومة b هي $0.25\Omega^{-1}$، إلخ). هذه العملية تفترض أيضا أن فرق الجهد الجديد المطبق بين العقدتين العليا والسفلى للدائرة الجديدة هي I، وأن التيار الكلي (مجموع التيارات في المقاومات a وb) يساوي فرق الجهد ε بين مخرجي الدائرة القديمة. بالتالي، المقاومة $R*$ لدائرتنا المزدوجة يعبر عنها كـ

$$R^* = \frac{I}{\varepsilon} = \frac{1}{R}$$

حيث R هي المقاومة المكافئة للدائرة القديمة (كل شيء على ما يرام فيما يخص الوحدات، حيث أن R^* والمقاومات في الدائرة الجديدة تقاس بـ(Ω^{-1}).

حتى نلخص، عملية استخدام الدوائر المزدوجة لحساب مقاومة دائرة معطاة ستقام كالتالي: اصنع الدائرة المزدوجة بحيث أنه لكل سلك في الدائرة الجديدة، سيكون هنالك مقاومة لها مقدار يساوي موصلية مقاومة السلك المرتبط في الدائرة القديمة (لو كان هنالك بطارية في سلك البطارية القديمة، استخدم مصدر تيار جديد). احسب مقاومة الدائرة المزدوجة وخذ المقلوب حتى تحصل على مقاومة الدائرة الأصلية.

لاحظ أن التوصيل القنطري المعتبر أعلاه مزدوجة ذاتيا توبولوجيا، لأن دائرتها المزدوجة لها نفس التركيب—مكونة من خمس مقاومات صانعة قنطرة. وأيضا القيم الرقمية للمقاومات مميزة بحيث أنه لو ضربنا كل المقاومات بنفس المعامل ($4\Omega^2$)، ستصبح الدائرة المزدوجة مكافئة للدائرة الأصلية؛ هذه الخاصية هي التي تجعل الدائرة مزدوجة ذاتيا.

س.١٥:

أوجد مقاومة التوصيل القنطري موضحا فكرة 16؛ استخدم فكرة 17 والازدواج الذاتي لهذا التوصيل القنطري.

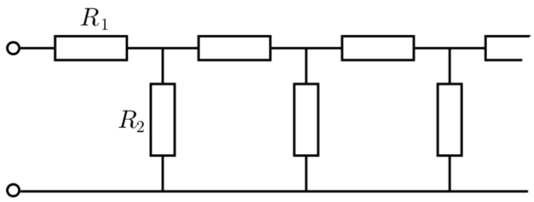
التوصيل القنطري البسيط أعلاه مزدوج ذاتيا، لأن دائرتها المزدوجة عبارة عن توصيل قنطري من نفس النوع.

(١٦) في [IPhO-1967]، كل المقاومات كانت تساوي r.

فكرة ١٨: السلاسل اللانهائية الدورية من العناصر الإلكترونية (كالمقاومات، المكثفات، إلخ) يمكن دراستها عبر استخدام التشابه الذاتي للسلسلة: حذف الدورة الأولى لا يؤثر على خصائص السلسلة.

س.١٦:

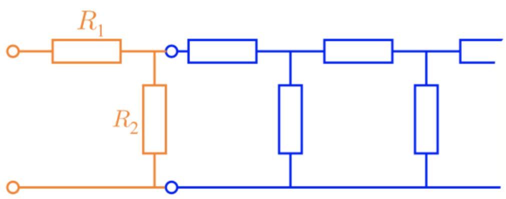
[IPhO-1967](١٦) حدد مقاومة الدائرة الدورية اللانهائية.



طبقا لفكرة ٨١، سنقطع أول دورة من السلسلة اللانهائية (مرسومة بالبرتقالي في الشكل أدناه)؛ الجزء المتبقي (الأزرق) سيكافئ الدائرة الأصلية التي مقاومتها R (التي ما زالت مجهولة). بسبب هذا، يمكننا كتابة

$$R = R_1 + \frac{RR_2}{R + R_2}$$

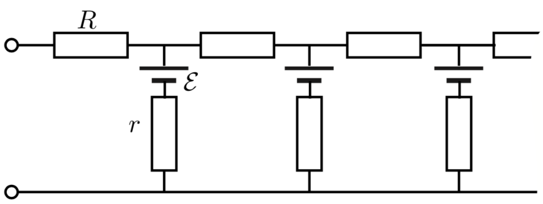
التي يمكن حلها للحصول على R.



هذه الفكرة يمكن ضمها مع أفكار أخرى - وبالتحديد مع فكرة ١٠ في المسألة القادمة.

س.١٧:

حدد القوة الدافعة الكهربائية والمقاومة الداخلية لنظام البطاريات أدناه.

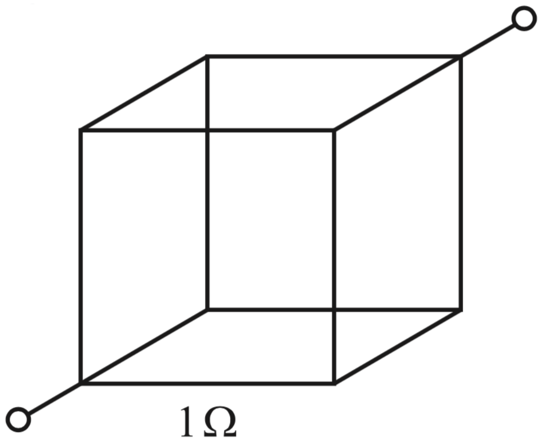


فكرة ١٩: عندما تجد تماثلا في المسألة، حاول أن تستغله.

المسألة القادمة يمكن حلها باستخدام تماثلها، بالشراكة مع فكرة ٤١.

س.١٨:

حدد المقاومة بين الرأسين المتقابلين في مكعب، حواف المكعب مصنوعة من أسلاك ومقاومة كل حافة هي 1Ω.



بعض الأحيان من المفيد استخدام هذه الفكرة مع لوغارتمية معينة لاختزال الدائرة إلى تركيب من توصيلات على التوالي وعلى التوازي.

فكرة ٢٠: طريقة دمج العقد: لو كان لعقدتين جهدان متساويان (بسبب التماثل على سبيل المثال) يمكن قصرها.

فكرة ٢١: طريقة فصل الحافة: يمكن تمثيل مقاومة بين عقدتين A و B كتوصيل على التوازي من مقاومتين، والعقدة A يمكن فصلها إلى عقدتين، لو كان جهدا العقدتين الجديدتين A' و A'' متساويتين.

وضحت الأفكار هذه بالمسألة القادمة.

س.١٩:

السداسي $ABCDEF$ فيه ستة أسلاك (تصل بين مركزه ورؤوسه) مصنوع من ٢١ سلك، كلها لها مقاومة كهربائية R. أوجد المقاومة بين الرأس A والمركز O باستخدام الطريقتين ٢٠ و ١٢.

فكرة ٢٢: المسائل عديمة التماثل يمكن أن تحول إلى متماثلة باستخدام مبدأ التراكب.

س.٢٠:

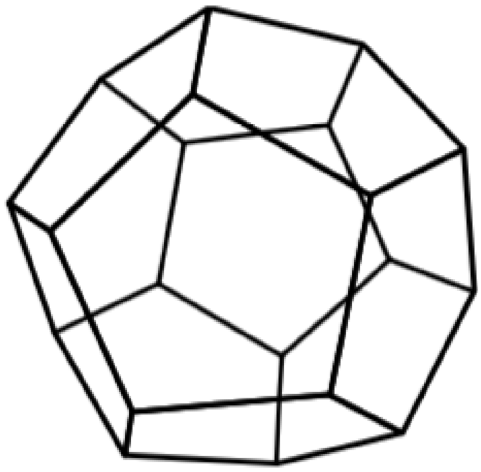
حدد المقاومة بين رأسين متجاورين A و B في شبكة مربعية لانهائية بافتراض أن حواف الشبكة مكونة من أسلاك، بحيث أن كل سلك مقاومته R.

لا يوجد تماثل كافي في هذه المسألة لحلها مباشرة: لو أدخلنا تيارا I عند الرأس A وسحبناه من الرأس B، هندسة المسألة سيكون لها تماثل انعكاسي، الذي لن يكون كافيا لمعرفة كيف يتوزع التيار I بين الأسلاك الموصلة مباشرة بالرأس A. لكن ما زال من الممكن صنع مسألة متماثلة دورانيا: افترض أن التيار I أدخل إلى الرأس A وتم سحبه بشكل متماثل عند الرؤوس البعيدة (عند اللانهاية البعد) من الشبكة. حينها من الواضح أن التيار I سيوزع بالتساوي على الأسلاك الأربعة الخارجة : التيار في كل منها هو $I/4$. بشكل مماثل، يمكننا إدخال تيار بشكل متماثل دورانيا عند اللانهاية، وسحبه من الرأس B. تراكب هاتين الحالتين المتماثلتين سيعطينا ما نريد بالضبط: التيار يدخل من A ويخرج من B؛ أما عند المالانهاية، بالتيار سيتلاشى. في السلك الواصل بين A و B، كلا التراكبين لهما نفس التيار بنفس الاتجاه الذي يساوي $I/4$، بالتالي المحصلة هي $I/2$، التي ترتبط بفرق جهد $V = RI/2$. بالتالي المقاومة هي $r = v/I = R/2$.

يبدو أن طريقة فرض التماثل هذه يمكن تطبيقها على الشبكات النهائية، أنظر إلى المسألة الآتية.

س.٢١:

حدد المقاومة بين رأسين متجاورين في ذو اثني عشر سطحا خماسي (دوديكاهيدرون) (أنظر إلى الشكل)، حروفه مصنوعة من أسلاك، وكل سلك مقاومته R.



فكرة ٢٣: بعض الأحيان، جعل المسألة متماثلة يتطلب تقديم مقاومات تخيلية سالبة: لا توجد أي مشكلة مع تطبيق قوانين كيرشوف للمقاومات السالبة [١٧]. بشكل خاص، R و $-R$ على التوازي ترتبط بمقاومة لانهائية، وعلى التوالي ترتبط بمقاومة صفرية.

س.٢٢:

حدد المقاومة بين رأسين مجاورين A و B في ذو اثني عشر سطحا خماسيا حروفه مصنوعة من أسلاك وكل سلك مقاومته R، ما عدا الحرف الذي يصل الرأسين A و B، الذي هو مقطوع.

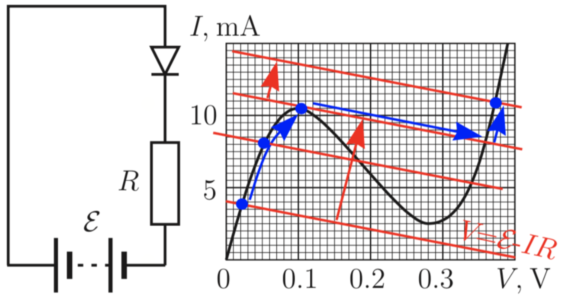
فكرة ٢٤: لو كان هنالك مقاومات غير أومية في دائرة موصوفة بعلاقة لاخطية بين التيار وفرق الجهد $I(V)$ حينها يمكن إيجاد التيار خلال العنصر اللاخطي عبر الرسم: العلاقة $I(V)$ يمكن التعبير عنها بواسطة قوانين كيرشوف، وفي الحالات البسيطة هذا سينتج قانونا خطيا $V = U_0 - Ir$. عندها سيكون الحل نقطة التقاطع بين المنحنيين، $U_0 - Ir$ و $I(V)$.

الحلول (نقاط التقاطع) في مدى المقاومة التفاضلية السالبة (أينما $R_{diff} \equiv \frac{dV}{dI} < 0$) يمكن أن تكون غير مستقرة؛ تحليل الاستقرار يتطلب معرفة بالملفات الحثية، ولهذا سنأجل مناقشتنا لهذا الموضوع.

حقيقة ٩: لو كان هنالك أكثر من حل مستقر فإن الحل سيوجد طبقا لتاريخ النظام (مثلا لو كان فرق الجهد المطبق على الدائرة متزايدا أو متناقصا) لأنه داخليا، العناصر اللاخطية تخضع للقصور (على سبيل المثال، كثافة حاملات الشحنة يمكن أن تتغير بسرعة، لكن ليس لحظيا) ولن تقفز من حالة اتزان لأخرى بدون سبب جيد (مثل خسارة الاستقرار أو اختفاء الحل الذي يعطي التيار المعين).

لنوضح فكرة ٢٤ بواسطة الديود النفقي المتصل بمقاومة وبطارية لها قوة دفع كهربائية ε.

[١٧] يجب أن تؤخذ العناية على وجه التحديد مع الدوائر المترددة التي تتضمن مكثفات وملفات: المقاومة الموجبة ترتبط بضياع الطاقة (تحلل الاهتزازة)، المقاومة السالبة تسبب عدم الاستقرار (تصاعد الاهتزازة).

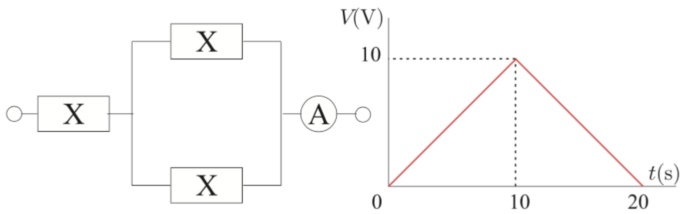


لو كانت ε صغيرة، سيكون هنالك نقطع تقاطع واحدة فقط (النقطة الزرقاء على أقصى اليسار في الشكل)؛ لو تزداد ε تدريجيا، فإنه نقطة التقاطع ستتحرك للأعلى، وحتى لو كان في نقطة ما، سيكون هنالك أكثر من نقطة تقاطع واحدة، التيار وفرق الجهد الحقيقيين سيكونان النقطة اليسرى المرتبطة بالتطور المستمر من الحالة الابتدائية. عندما تزاد ε أكثر، في لحظة معينة، هذا الحل سيختفي وسيجبر على أن يقفز لليمين كما هو موضح في الشكل بالسهم الأزرق الشبه أفقي. الآن، لو بدأت ε بالانخفاض، نقطة التقاطع المبينة للحل ستتحرك بشكل مستمر للأسفل، وطوال الفترة التي تكون فيها ثلاثة حلول، اليمنى ستمثل الحل الحقيقي. لو انخفضت ε أكثر، نقطة التقاطع هذه تختفي، والحل سيقفز لنقطة التقاطع الوحيدة المتبقية.

الظاهرة التي تعتمد فيها حالة النظام على تاريخه تسمى التخلفية. التخلفية ستظهر عادة لو كان من الممكن للنظام أن يمتلك أكثر من حالة داخلية؛ سيعرض مثال بسيط في المسألة الآتية.

س.٢٣:

[EstOPhC-2009] العنصر X في الدائرة أدناه له مقاومة R_X التي تعتمد على فرق الجهد V_X عليه: لـ $V_X \leq 1V$، $R_X = 1\Omega$، و لـ $V_X > 1V$، $R_X = 2\Omega$. ثلاث من هذه العناصر وصلت ببعضها البعض مع أميتر مثالي كما هو موضح في الشكل. ارسم قراءة الأميتر كدالة في الزمن.



هذه المسألة بسيطة لولا أنه لبعض فروق الجهد، حالة عناصر الدائرة ستعتمد على التاريخ. خطأ شائع هنا سيكون حل المسألة بشكل صحيح لأول ١٠ ثواني، ثم افتراض تماثل انعكاسي للتيار الكهربائي. كيف نتفادى أخطاء مثل هذه؟ أول وأفضل طريقة هي البعد الدائم عن الاستنتاجات المستعجلة (في هذه الحالة المعطاة – استنتاج التماثل الانعكاسي للثواني العشر الأخيرة من الثواني العشر الأولى). طريقة أخرى لمعرفة أن الأمور ليست بسيطة كما يبدو صيغت كفكرة.

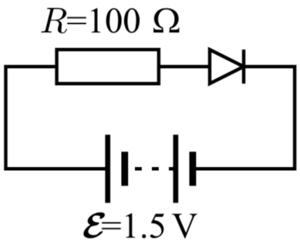
فكرة ٢٥: حاول أن تفكر، ماذا كان تفكير مؤلف المسألة. لو كان لمسألة أولمبياد أجزاء متعارف عليها ومتشابهة، فإنه عادة سيكون هنالك فرق جوهري ما. (كاستثناء هذه الفكرة ليست فيزيائية).

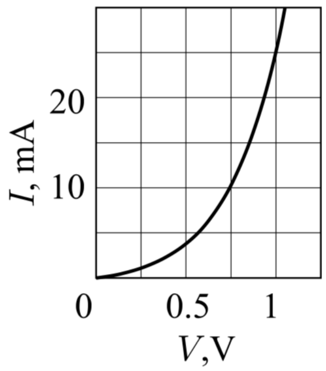
في الحالة المعطاة، هل كان سيكون هنالك أية شيء مثير للاهتمام لو كان من الممكن الحصول على النتيجة عن طريق الاستنتاج من التماثل العكسي؟

رجوعا للفكرة ٢٤، توضيح بسيط موضح عبر المسألة الآتية.

س.٢٤:

أوجد التيار في الدائرة المعطاة أدناه؛ علاقة الـ $I(V)$





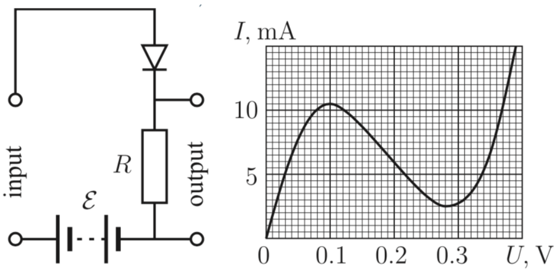
فكرة ٢٦: في حالة التباين الصغير في فرق الجهد $\tilde{V} \equiv V - V_0$ على عنصر غير خطي، وتباين صغير في التيار $\tilde{V} \equiv I - I_0$ خلاله، يمكن للشخص أن يصنع يجعل منحنى الـ $V - I$ خطيا كـ $\tilde{V} = R_{diff}\tilde{I}$، حيث $R_{diff} = \frac{dV}{dI}$ تسمى بالمقاومة التفاضلية. V_0 و I_0 هنا هما قيمتا فرق الجهد والتيار الكهربائي الغير مضطربين (المتزنين). حينها سيكون فرق الجهد الكامل على العنصر الغير خطي $V = V_0 + R_{diff}\tilde{I}$. لو قمنا الآن بكتابة قانون فرق الجهد لكيرشوف بدلالة تباين التيار $\tilde{I}$، بالإضافة إلى قانون أوم لتباين فرق الجهد $R_{diff}\tilde{I}$، سيكون لدينا حد ثابت إضافي V_0 الذي يمكن اعتباره كالقوة الدافعة الكهربائية الفعالة. على أي مقاومة خطية R، فرق الجهد سيكون أيضا مجموع الحد الثابت I_0R والحد المتباين $R\tilde{I}$. كل الحدود الثابتة اللامضطربة يجب أن تتلاشى مع بعضها البعض من قانون فرق الجهد لكيرشوف بما أن V_0 و I_0 يفترض أن يكونا حلين صحيحين لقوانين كيرشوف. بالفعل، لو قمنا بجعل كل الاضطرابات صفرا، فإن $\tilde{I} = 0$ و $\tilde{V} = 0$ يجب أن يعطيا حلا لقوانين كيرشوف، بالتالي كل الثوابت يجب أن تتلاشى معا.

حتى نلخص، بدلا من دراسة فروق الجهد والتيارات، سندرس الاضطرابات $\tilde{V}$ و $\tilde{I}$ لهذه الكميات؛ الدائرة الفعالة التي تصف القيم المضطربة يمكن إيجادها عن طريق إبعاد كل مصادر فرق الجهد والتيار اللامضطربة (مثل البطاريات التي لها قوة دافعة كهربائية ثابتة)، وبتعويض عناصر لاخطية مع مقاوماتها التفاضلية. لاحظ جيدا أن مقاومات العناصر اللاخطية تعتمد على التيار؛ يجب أن نستعمل قيمتها الغير مضطربة.

فائدة هذه الفكرة ستوضح عبر المسألة الآتية.

س.٢٥:

[EstFin-2003] [١٨] في الشكل أدناه توضح دائرة من مضخم مبني على ديود نفقي. أوجد معامل التضخيم لإشارة مدخلة سعتها منخفضة باستخدام القيم الآتية: $R = 10\Omega$، $\varepsilon = 0.25V$.



فكرة ٢٧: من الممكن إيجاد حد علوي وحد سفلي لمقاومة دائرة عن طريق استخدام النظريات الآتية.

(I) لدائرة اعتباطية تتكون من مقاومات ولها مخرجان، A و B، لو أدخل تيار عبر A وسحب من B، فإن توزع التيار بين المقاومات في الدائرة سيكون بحيث أن القدرة المهدرة ستكون أقل ما يمكن. بعبارة أخرى، القدرة المهدرة بواسطة

[١٨] فقط جزء من المسألة الكاملة

توزع التيار الحقيقي سيكون دائما أصغر من أي توزع تيار وهمي يحقق فقط قانون كيرشوف للتيارات. [19]

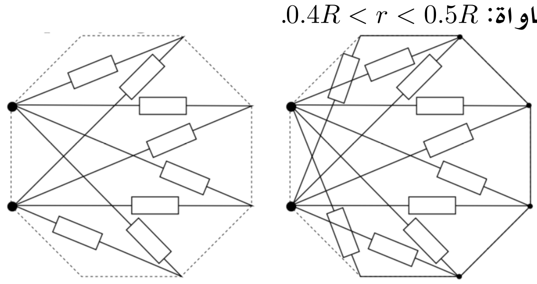
(II) لنفس الدائرة لو كان هنالك فرق جهد V بين المخرجين A و B، فإن توزع فروق الجهد بين عقد الدائرة سيكون بحيث أن القدرة المهدرة إجمالا أقل ما يمكن. بعبارة أخرى، القدرة المهدرة بواسطة توزع فروق الجهد الحقيقي سيكون دائما أصغر من أي توزع فرق جهد تخيلي مخالف لقانون كيرشوف للتيارات. [20]

الاستنتاجات التطبيقية من هذه النظريات هي: قطع سلك سيزيد المقاومة، وقصر دائرة سلك سيقلل المقاومة. بالفعل، لو قطعنا سلكا، سنقطع التيار فيه وهذا سيؤدي إلى ما يمكن اعتباره توزع تيار تخيلي زادت فيه القدرة المهدرة الكلية I^2R، وبالتالي المقاومة R ازدادت. وبشكل مشابه، قصر دائرة سلك سيجعل قفز التيار بين عقدتين ممكنا، الذي كان مستحيلا في البداية ويناقض قانون كيرشوف للتيار للدائرة الأصلية. كنتيجة، إهدار القدرة في الدائرة الجديدة زاد بمقدار V^2/R، وبالتالي، المقاومة R قلت.

س.٢٦:

يوجد ثماني كل أوتاره مصنوعة من مقاومات متساوية R؛ أضلاع الثماني مصنوعة من عوازل. أوجد حدا أعلى وأدنى للمقاومة بين عقدتين متجاورتين.

حل هذه المسألة هو كالتالي. أولا، سنقطع عدة مقاومات، وسنترك فقط تلك الموضحة في الشكل الأيسر. مقاومة الدائرة اليسرى هي $\frac{R}{2} = \frac{2R}{4}$. لنقم أيضا بقصر دائرة ستة عقد كما هو موضح في الشكل الأيمن؛ المقاومة ستكون $2\frac{R}{5}$. إذن، يمكننا أن نستنتج أن $0.4R \le r \le 0.5R$. بما أن الأسلاك التي قطعناها كان فيها تيار، والعقد التي وصلناها بأسلاك كان بينها فرق جهد، يمكننا أن نتأكد توزع التيار والفرق الجهد الجديدين لا يماثلان الأصل، فيمكننا حذف احتمالية المساواة: $0.4R < r < 0.5R$.



س.٢٧:

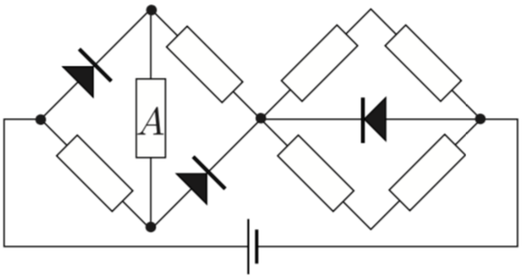
حسن الحد الأعلى $r < 0.5R$ للمسألة الماضية (لا تقطع أسلاك كثر التي قطعنا قبل)، وحسن كذلك الحد الأدنى (اقصر دائرة عدد أقل من العقد).

ختاما، لنأخذ بعين الاعتبار الدوائر التي بها صمامات ثنائية (ديودات) مثالية.

فكرة ٢٨: لو كان هنالك صمامات ثنائية في الدائرة (التي لها مقاومة صفرية للتيار الأمامي، ومقاومة لانهائية للتيارات العكسية)، ستحتاج أن تعتبر بشكل منفصل الحالتين: (a) افترض أنه يوجد تيار أمامي وأن الصمام الثنائي مفتوح، بالتالي يمكن تعويضه بسلك؛ (b) افترض أنه يوجد تيار عكسي، وبالتالي يمكن قطعه من الدائرة. اعتمادا على المسألة، يمكن أن يكون واضحا أي خيار هو الصحيح، أو قد تحتاج أن تستخدم نتائج حساباتك للتأكد من صحة افتراضك الأساسي. [21]

س.٢٨:

كم مرة ستتغير القدرة المهدرة في المقاومة A عندما تعكس قطبية البطارية؟ كل المقاومات لها نفس المقاومة، الصمامات الثنائية مثالية.

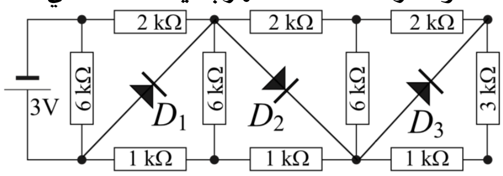


فكرة ٢٩: الصمامات الثنائية الغير مثالية التي يمكن تقريبها بمنحنى $V-I$ مُحسن (idealized) بفرق جهد فتح غير صفري V_c (لا يوجد أي تيار لـ$V < V_c$، ولأي تيار أمامي، $V = V_c$) يمكن التعامل معهم بنفس عقلية فكرة ٢٨؛ الفرق الوحيد هو أنه للتيارات الأمامية، الصمام الثنائي يجب أن يستبدل ببطارية لها قوة دافعة كهربائية $\varepsilon = V_c$. بالإضافة إلى هذا، القدرة المهدرة على الصمام الثنائي تحسب بنفس الطريقة التي يحسب بها شغل البطارية: القدرة المهدرة هي V_cI، والحرارة المهدرة ستكون $V_c\Delta Q$، حيث ΔQ هي الشحنة المارة خلال الصمام الثنائي.

لاحظ أنه يمكن تعميم الفكرة: لو قربنا منحنى $V-I$ غير خطي ما بمنحنى يتكون من n خط مستقيم (دالة خطية متعددة التعريفات) فإنه سيتوجب علينا اعتبار الحالات n بشكل منفصل؛ لكل حالة، العنصر الغير خطي يمكن تعويضه ببطارية لها مقاومة داخلية تساوي الميل $r \equiv \frac{dV}{dI}$ للخط المستقيم المتعلق بهذه الحالة، وقوة دافعة كهربائية تساوي مقطع V لهذا الخط. بدلا من بطارية، بعض الأحيان من المفيد استخدام مصدر التيار الموصل على التوالي بمقاومة داخلية r يصدر تيارا يساوي للمقطع I للخط؛ استخدم هذه الطريقة بالتحديد عندما تكون $r = \infty$.

س.٢٩:

EstOPhC-2012 أوجد القدرة المهدرة على كل صمام ثنائي في الشكل أدناه. هذه الصمامات الثنائية تفتح عند فرق جهد أمامي $V_0 = 1.0V$. من الممكن افتراض أن الصمامات الثنائية تظل على فرق جهد V_0 لأي تيار أمامي، وأنه لأي فرق جهد أقل من V_0، لا يمر أي تيار خلال الصمام الثنائي. قيمة المقاومات والقوة الدافعة الكهربائية معطاة في الشكل.



[19] البرهان موفر في ملحق ٣.

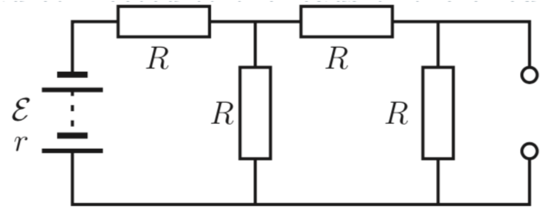
[20] الإثبات موفر في ملحق ٣.

[21] هذا مشابه لمسائل الاحتكاك الجاف بين الأجسام الصلبة عندما تعتبر بشكل منفصل الحالتين عندما (a) الجسمان ينزلقان و توجد قوة احتكاك معرفة بمعامل الاحتكاك الحركي، و (b) الجسمان لا ينزلقان

المسائل المتضمنة للأفكار ١ـ٢٨

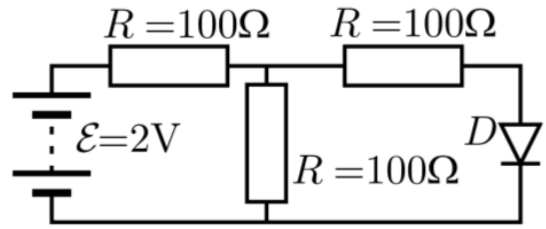
س.٣٠

حدد أكبر قدر ممكن من القدرة يمكن صرفه على حمل يوصل بنهايتي الدائرة أدناه.



س.٣١

أوجد التيار المار في الدايود المبين في الدائرة أدناه. استخدم منحنى $I(V)$ المعطى في سؤال 24 للدايود في هذه المسألة.



س.٣٢

للحماية من التيارات الضخمة، يوجد قاطعا تيار (فيوز) موصلان على التوازي: القاطع A له مقاومة $R_A = 1\Omega$ وتيار أقصى (الذي ينصهر عنده) $I_{Amax} = 1A$؛ القاطع B له مقاومة $R_B = 2\Omega$ وتيار أقصى $I_{Bmax} = 1.2A$. ما هو أقصى تيار لنظام من القواطع كهذا؟ كم سيكون التيار الأقصى لو استبدلنا القاطع B بقاطع C له مقاومة $R_C = 2\Omega$ و$I_{Cmax} = 1.7A$؟

س.٣٣

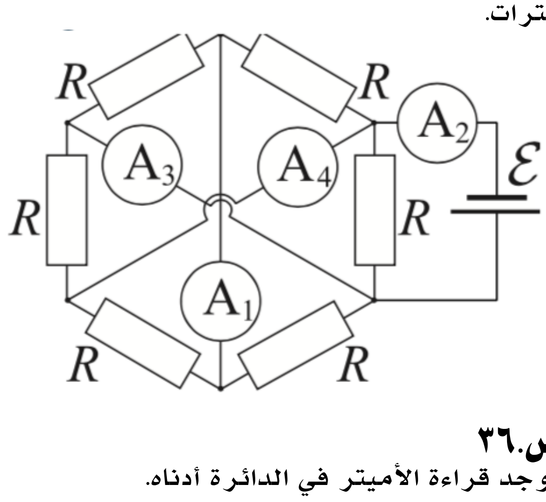
الفولتميتران في الدائرة أدناه متطابقان؛ قراءتهما هي $V_1 = 30V$ و$V_2 = 20V$. قراءة الأميتر هي $I = 750\mu A$. كل المقاومات الخمس لها مقاومج R؛ أوجد قيمة R.

س.٣٤

بافتراض أن مقاومة سلك المصباح تتناسب مع T وقدرة إشعاعه الحرارية تتناسب مع T^4، أوجد قوة (أس) قانون الـI-V الخاص به. أهمل التوصيل الحراري وافتراض أن T أكبر بكثير من درجة حرارة الغرفة.

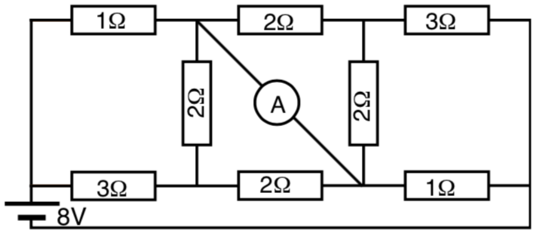
س.٣٥

[EstPho-1999] كل المقاومات لها نفس القيمة $R = 1\Omega$. الأميترات والبطارية مثالية، $\varepsilon = 1V$. حدد قراءات كل الأميترات.



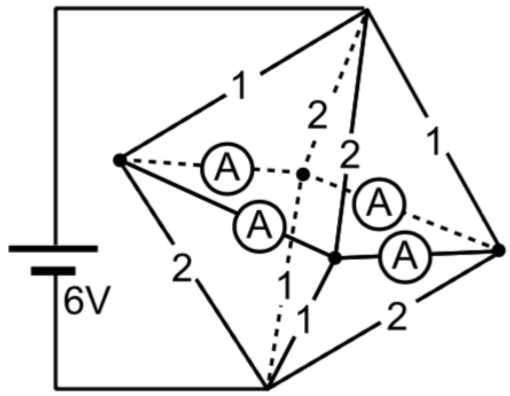
س.٣٦

أوجد قراءة الأميتر في الدائرة أدناه.



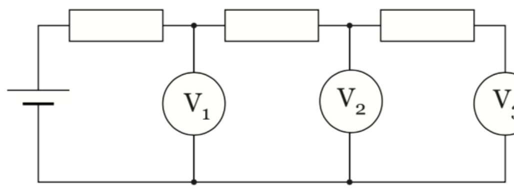
س.٣٧

الرسم أدناه يوضح ثماني أوجه مصنوع من أسلاك؛ الرقم قرب كل جانب يظهر مقاومة السلك بالأوم. مقاومة الأسلاك التي تصل بين الأميترات مهملة. أوجد قراءات الأميترات.



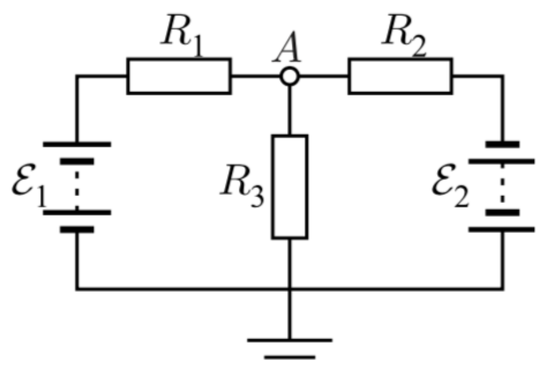
س.٣٨

في الشكل، كل الفولتميترات الثلاثة متطابقة، وكل المقاومات الثلاث متطابقة. الفولتميتر الأول يظهر $V_1 = 10V$، الثالث يظهر $V_3 = 8V$. ماذا يظهر الفولتميتر الثاني؟



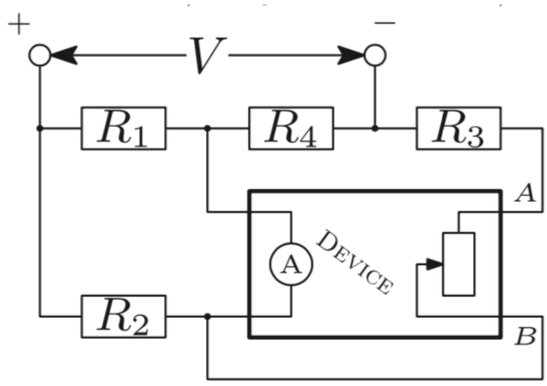
س.٣٩

حدد جهد العقدة A. (لاحظ أن الجهد الأرضي دائما ما يفرض ليكون صفرا.)



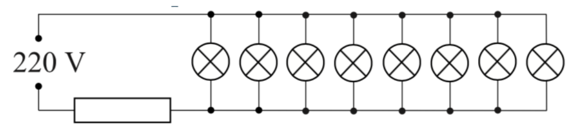
س.٤٠

في الدائرة أدناه، الجهازيDevice يأخذ قراءة الأميتر ويعدل المقاومة المتغيرة حتى تصبح قراءة الأميتر صفرا. أوجد فرق الجهد على المقاومة R_3. من المعلوم أن $V = 5V$، $R_1 = 10\Omega$، $R_2 = 1k\Omega$، $R_3 = 100k\Omega$، $R_4 = 4.99k\Omega$.



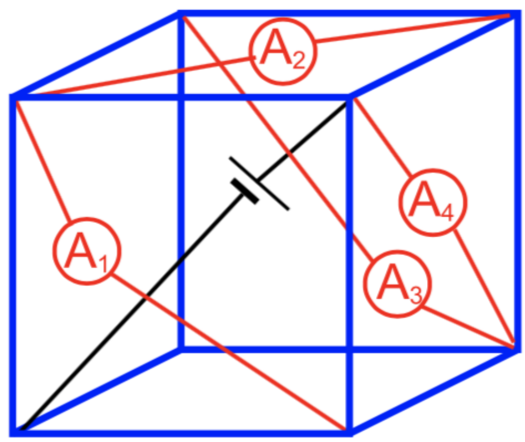
س٤١.

ثمان مصابيح متطابقة بفرق جهد شكلي $V = 4V$ وتيار شكلي $I = 0.25A$ متصلة ببطارية عبر مقاومة كما هو موضح بالشكل. تم اختيار المقاومة بحيث أن المصابيح ستعمل في النطاق الشكلي (بفرق جهد شكلي وتيار شكلي). أحد المصابيح احترقت (قمنا بإزالتها). كم مرة ستتغير القدرة المستهلكة على المصابيح؟ (القدرة المستهلكة على المقاومة ليس متضمنا) أهمل اعتماد مقاومات المصابيح على درجة الحرارة.



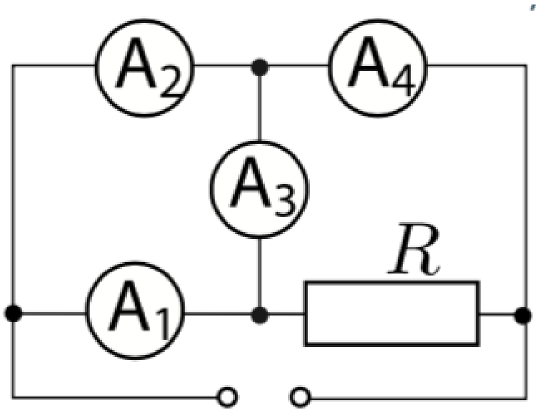
س٤٢.

الشكل أدناه يبين مكعبا أضلاعه مصنوعة من أسلاك، كل سلك مقاومته $R = 1k\Omega$. الأميترات موصلة بأسلاك نحاس مقاومتها مهملة برؤوس المكعب. فرق جهد البطارية $\varepsilon = 9V$؛ الأسلاك لا تتلاقى إلا عند رؤوس المكعب. أوجد قراءات الأميترات.



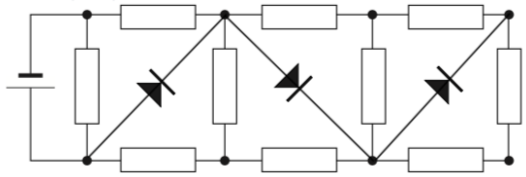
س٤٣.

أربع أميترات بمقاومات داخلية متطابقة r ومقاومة بمقاومة R موصلة بمصدر تيار كما هو موضح بالشكل. من المعلوم أن قراءة الأميتر A_1 هي $I_1 = 3A$ وقراءة الأميتر A_2 هي $I_2 = 5A$. حدد نسبة المقاومتين R/r.



س٤٤.

كم مرة سيتغير التيار الذي يمر في البطارية لو عكسنا قطبيتها؟ كل المقاومات مثالية، الدايودات مثالية، والمقاومة الداخلية للبطارية مهملة.

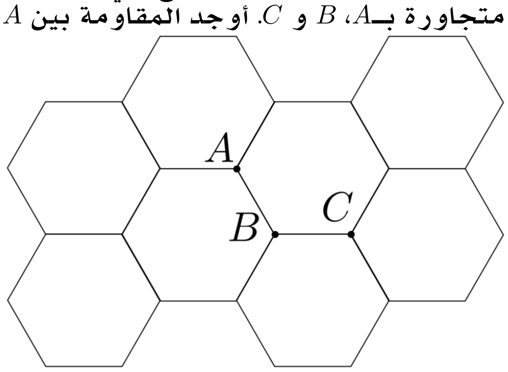


س٤٥.

حدد المقاومة بين عقدتين متجاورتين A و B في شبكة مكعبة لانهائية بافتراض أن أضلاعها مصنوعة من أسلاك، ومقاومة كل ضلع تساوي R.

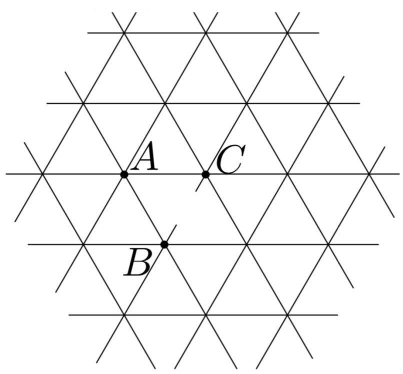
س٤٦.

توجد شبكة لانهائية مكونة من خلايا نحل؛ أضلاع الشبكة مكونة من أسلاك ومقاومة كل ضلع هي R. لنرمز لثلاث رؤوس متجاورة بـ A، B و C. أوجد المقاومة بين A و C.



س٤٧:

توجد شبكة لانهائية مثلثية؛ حواف الشبكة مصنوعة من أسلاك ومقاومة كل حافة R. لنرمز لرؤوس مثلث بـ A، B و C. السلك الواصل بين B و C مقطوع. حدد المقاومة بين A و B.

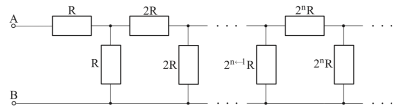


س.٤٨:
يوجد مضلع له n ضلع. كل ضلع ووتر فيه له مقاومة R. ما هي المقاومة بين عقدتيت متجاورتين في المضلع؟

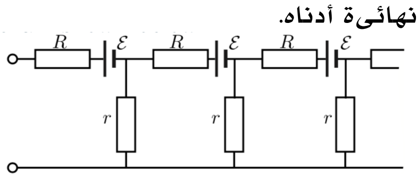
س.٤٩:
يوجد عشاري كل أضلاع وأوتاره مصنوعة من مقاومات متساوية R؛ لتكن A و C ترمزان للرأسين المجاورين لرأس B، ولتكن D رأسا لا تجاور أيا من الرؤوس الثلاثة المذكورة أعلاه. الأسلاك المرتبطة بالأضلاع AB و BC قطعت. أوجد المقاومة بين A و D.

س.٥٠
يوجد ثماني كل أوتاره مصنوعة من مقاومات متساوية R؛ أضلاع الثماني مصنوعة من عوازل. أوجد حدين أدنى وأعلى للمقاومة بين عقدتين متقابلتين بدون حساب قيمتها. تأكد من صحة حساباتك عن طريق حساب هذه المقاومة بالضبط.

س.٥١
أوجد المقاومة بين المخرجين A و B للسلسلة اللانهائية أدناه. المقاومات كما هو موضح تزداد بمعامل اثنين لكل وصلة متتالية.



س.٥٢
أوجد فرق الجهد بين المخرجين A و B للسلسلة اللانهائية أدناه.



س.٥٣:
أي متباينات يجب أن تكون صحيحة للمقاومة بين رأسين A و B لشبكة لانهائية مربعة، لو كانت أضلاع الشبكة مصنوعة من مقاومات R، لكن بعض أجزاء الشبكة تضررت، لذا تم تبديل بعض الأسلاك بأسلاك نحاسية لها مقاومة مهملة. على كل حال، ظلت الدائرة سليمة في محيط سلكين من السلك AB (هذا يتضمن ١٣ سلكا موازيا لـAB، ١٢ سلكا عموديا عليه).

س.٥٤:
الدائرة العجلية هي دائرة يمكن رسمها كمضلع له n ضلع بحيث أن حدود العجلة مصنوعة من n مقاومة R تصل بين الرؤوس المجاورة لبعضها البعض، وأشواك العجلة مصنوعة من n مقاومة r تصل بين مركز العجلة ورؤوسها. لتكن R_1 المقاومة بين رأسين متجاورين في هذه العجلة، و R_2 هي المقاومة بين أحد الرؤوس والمركز. عبر عن R_1 بدلالة R_2، R و r (بدون استخدام n).

الأجوبة

(١). $R \approx 14\Omega$

(٢). $I = 0.5A$

(٣). $R = 0.5\Omega$

(٤). $R = 2.5\Omega$

(٥). $I = \frac{3}{22}A$

(٦). $I = 196\mu A$

(٧). $V_{\sum} = 78V$

(٨). $I = \frac{21}{19}A$

(٩). $I_4 = 3A, I_3 = 2A$

(١٠). $P = \frac{1}{4}\frac{R_2}{(r+R_1+R_2)(R_1+r)}\varepsilon^2$

(١١). $r = (\sum_{i=1}^{n} r_i^{-}1)^{-1}, \varepsilon = r\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i r_i^{-1}$

(١٢). $I_2 = I_4 = 0, I_1 = I_3 = \varepsilon/R$

(١٣).

(١٤).

(١٥). $R = 2\Omega$

(١٦). $R = \frac{R_1}{2}(1+\sqrt{1+4R_2/R_1})$

(١٧). $\varepsilon' = \varepsilon$ ، $r' = \frac{R}{2}(1+\sqrt{1+4R/r})$

(١٨). $\Omega R = \frac{5}{6}$

(١٩). $R_{AO} = \frac{9}{20}R$

(٢٠).

(٢١). $r = \frac{19}{30}R$

(٢٢). $r = \frac{19}{11}R$

(٢٣). خطوط مستقيمة تربط النقاط الآتية: $(0s, 0A)$؛ $(10s, \frac{10}{3}A)$؛ $(5s, \frac{5}{3}A)$؛ $(5s, 2A)$؛ $(1.5s, 0.6A)$؛ $(1.5s, 1A)$؛ $(18.75s, \frac{5}{6}A)$؛ $(18.75s, 0.5A)$؛ $(17s, 1.2A)$؛ $(17s, 1A)$؛ $(20s, 0A)$.

(٢٤). $I \approx 8mA$

(٢٥). تقريبا 1.4 مرة.

(٢٦).

(٢٧). $\frac{2}{29}R \approx 0.414R < r < \frac{4}{9} \approx 0.444R$

(٢٨). تزداد $\frac{16}{9}$ مرة

(٢٩). $0.75mW, 0W, 0W$

(٣٠). $P_{max} = \frac{\varepsilon^2 R}{4(5R+3r)(3R+2r)}$ ، $\varepsilon' = \varepsilon\frac{R}{5R+3r}$ ، $r' = R\frac{3R+2r}{5R+3r}$

(٣١). $I \approx 3mA$

(٣٢). $I_1 = 1.5A; I_2 = 1.7A$

(٣٣). $R = 40k\Omega$

(٣٤). I $V^{0.6}$ أو بشكل آخر V $I^{5/3}$

(٣٥). $I_1 = 0, I_2 = 3\varepsilon/R, I_3 = I_4 = 1.5\varepsilon/R$

(٣٦). $4A$

(٣٧). كل الأميترات قراءتها $0.75A$

(٣٨). $V_2 \approx 8.65V$

(٣٩). $V = (\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_1)/(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3})$

(٤٠). $V_3 = 1V$

(٤١). تزداد تقريبا 1.14 مرة.

(٤٢). $3mA, 6mA, 7mA, 14mA$

(٤٣). $R/r = 9$

(٤٤). $I_1 = 0.7I_0$

(٤٥). $R_{AB} = R/3$

(٤٦). $r = R$

(٤٧). $r = \frac{3}{8}R$

(٤٨). $r = 2R/n$

(٤٩). $r = \frac{67}{315}R$

(٥٠). $\frac{R}{3} < r < \frac{5}{11}R; r = \frac{6}{17}R$

(٥١). $r = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})R$

(٥٢). $\varepsilon' = \varepsilon(1 + \frac{r}{r'})$ مع $r' = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\frac{R}{3}})$

(٥٣). $\frac{40}{87}R \leq r \leq \frac{47}{87}R$

(٥٤). $R(1 - \frac{R_2}{r})$