Fórmulas para la IPhO

Versión: 13 de noviembre de 2019

I. Matemática

1. Series de Taylor (omita órdenes mayores para aproximar):

$$F(x) = F(x_0) + \sum F^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n/n!.$$

Caso especial, aproximación lineal:

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0).$$

Algunos ejemplos para $|x| \ll 1$:

$$\operatorname{sen} x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - x^2/2, \quad e^x \approx 1 + x,$$
$$\ln(1 + x) \approx x, \quad (1 + x)^n \approx 1 + nx.$$

2*. Método de perturbaciones: encuentre la solución de forma iterativa utilizando la solución del problema “no perturbado” (solución directa) como la aproximación de orden cero; las correcciones para la siguiente aproximación se calculan con base en la anterior.

3. Solución a la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes $ay'' + by' + cy = 0$:

$$y = A\exp(\lambda_1 x) + B\exp(\lambda_2 x),$$

donde $\lambda_{1,2}$ es la solución a la ecuación característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$; si esta solución es compleja y a, b y c son números reales, entonces $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\omega$ y

$$y = Ce^{\gamma x}\operatorname{sen}(\omega x + \varphi_0).$$

4. Números complejos:

$$z = a + bi = |z|e^{i\varphi}, \quad \bar{z} = a - ib = |z|e^{-i\varphi},$$
$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2, \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arc\,sen}\frac{b}{|z|},$$
$$\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2, \quad \operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2,$$
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2,$$
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi,$$
$$\cos\varphi = \tfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \tfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

5. Los productos punto y cruz entre vectores son distributivos $[a(b + c) = ab + ac]$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + \ldots = ab\cos\varphi,$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\operatorname{sen}\varphi, \quad \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \perp (\vec{a} \text{ y } \vec{b}),$$
$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\imath} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\jmath} + \ldots,$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

Producto mixto (volumen del paralelepípedo definido por tres vectores):

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \equiv (\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}]) = ([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}).$$

6. Ley de senos y ley de cosenos:

$$a/\operatorname{sen}\alpha = b/\operatorname{sen}\beta = 2R,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi.$$

7. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$,
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$,
$\tan(\alpha \pm \beta) = (\tan\alpha + \tan\beta)/(1 \mp \tan\alpha\tan\beta)$,
$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$,
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$,
$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$,
$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$,
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,
$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,
$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

8. Un ángulo inscrito en un círculo es la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco en el círculo. *Conclusiones:* la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el diámetro de su circuncírculo; si los ángulos de un cuadrilátero son suplementarios, es un cuadrilátero cíclico.

9. Área de un triángulo $= \frac{1}{2}ah_a = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = abc/4R$.

10. Centroide del triángulo: punto de intersección de las medianas, divide las medianas a 2:1.

11*. Enfoque vectorial en geometría.

12. Derivadas:

$$(fg)' = fg' + f'g, \quad f[g(x)]' = f'[g(x)]g',$$
$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x,$$
$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = 1/x, \quad (x^n)' = nx^{n-1},$$
$$(\arctan x)' = 1/\left(1 + x^2\right),$$
$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = -(\arccos x)' = 1/\sqrt{1 - x^2}.$$

13. Integración: las fórmulas son las mismas que, para las derivadas, pero con el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación intercambiados, de hecho, es la ¡operación inversa! por ejemplo:

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = x^{n+1}/(n + 1).$$

Caso especial del método de sustitución:

$$\int f(ax + b)\, \mathrm{d}x = F(ax + b)/a.$$

14. Secciones cónicas: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1 x + a_2 y + a_0 = 0$ con $a_{11} = a_{22}$ es un círculo; con $a_{11}\cdot(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) > 0$ es una elipse, $\ldots < 0$ es una hipérbola, con $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ es una parábola. Elipse: $l_1 + l_2 = 2a$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $A = \pi ab$; hipérbola: $l_1 - l_2 = 2a$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$; parábola: $l + h = \text{const}$, $\alpha_1 = \alpha_2$.

15. *Métodos numéricos:* Método iterativo de Newton para encontrar raíces $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

Regla del trapecio para aproximar integrales:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

16. Derivadas e integrales de vectores: derive o integre cada componente; alternativamente, derive aplicando la regla del paralelogramo para la diferencia de dos vectores infinitesimalmente cercanos.

II. Recomendaciones generales

1. Verifique todas las fórmulas para comprobar: **a)** dimensiones; **b)** casos especiales simples (dos parámetros son iguales, un parámetro tiende a 0 o a ∞); **c)** la verosimilitud del comportamiento cualitativo de la solución.

2. Si hay una coincidencia extraordinaria en el texto del problema (por ejemplo, dos cantidades son iguales) entonces la clave de la solución podría estar allí.

3. Lea atentamente las recomendaciones en el texto del problema. Preste atención a la formulación del problema, los detalles insignificantes pueden tener información vital. Si no ha resuelto el problema en una cantidad considerable de tiempo, entonces lea el texto nuevamente, tal vez haya malinterpretado el problema.

4. Posponga los cálculos matemáticos largos hasta el final (cuando todo esté hecho) mientras escribe todas las ecuaciones iniciales que deben simplificarse.

5. Si el problema parece ser irremediablemente difícil, generalmente tendrá una solución simple (y una respuesta simple). Esto es válido solo para problemas de la olimpiada, que definitivamente tienen soluciones.

6. En los experimentos: **a)** dibuje el esquema experimental incluso si no tiene tiempo para realizar mediciones; **b)** piense cómo aumentar la precisión de los resultados y **c)** anote en una tabla todas sus mediciones directas.

III. Cinemática

1. Para el movimiento de traslación de un cuerpo rígido o un punto (integral $\to$ área bajo la curva):

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{x} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t \quad \left(x = \int v_x\,\mathrm{d}t \quad \text{etc.}\right),$$
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2}, \quad \vec{v} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}t,$$
$$t = \int v_x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int a_x^{-1}\,\mathrm{d}v_x, \quad x = \int \frac{v_x}{a_x}\,\mathrm{d}v_x.$$

Si $a = \text{const}$, entonces las integrales anteriores se pueden encontrar fácilmente, por ejemplo:

$$x = v_0 t + at^2/2 = (v^2 - v_0^2)/2a.$$

2. El movimiento de rotación es análogo al de traslación: $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, $\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$,

$$\vec{a} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t\,\hat{\theta} - v^2/R\,\hat{r}.$$

3. Movimiento curvilíneo: igual que el punto 1, pero los vectores deben reemplazarse por velocidades lineales, aceleraciones y longitudes de trayectoria.

4. *Movimiento de un cuerpo rígido.*
a) $v_A\cos\alpha = v_B\cos\beta$ donde $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ son las velocidades de los puntos A y B. α y β son los ángulos formados por $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ con la línea AB. **b)** El centro de rotación instantánea ($\neq$ centro de curvatura de las trayectorias del punto material) se puede encontrar como el punto de intersección de líneas perpendiculares a $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$, o (si $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B \perp AB$) como el punto de intersección de AB con la línea que conecta las puntas de $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$.

5. Marcos de referencia no inerciales:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1, \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \omega^2\vec{R} + \vec{a}_{Cor}.$$

Nota: $\vec{a}_{Cor} \perp (\vec{v}_1 \text{ y } \vec{\omega})$, $\vec{a}_{Cor} = 0$ si $\vec{v}_1 = 0$.

6*. Problema balístico: región accesible

$$y \le v_0^2/(2g) - gx^2/2v_0^2.$$

Para una trayectoria balística óptima, las velocidades iniciales y finales son perpendiculares.

7. Los principios de Fermat y Huygens se pueden usar para encontrar los trayectos más cortos.

8. Para encontrar un vector (velocidad, aceleración) es suficiente con encontrar su dirección y una proyección a una solo (posiblemente inclinado) eje.

IV. Mecánica

1. Para el equilibrio 2D de un cuerpo rígido hay dos ecuaciones para fuerza y una para torque. Una (o dos) ecuaciones para fuerza se pueden sustituir con una (o dos) de torque. El torque a menudo es mejor ya que las fuerzas "aburridas" pueden eliminarse mediante una elección óptima del origen. Si las fuerzas se aplican solo a dos puntos, las líneas de aplicación de fuerza (netas) coinciden; para tres puntos, las tres líneas se encuentran en un solo punto.

2. La fuerza normal y la fuerza de fricción se pueden combinar en una sola fuerza, aplicada al punto de contacto, esta hace un ángulo $\arctan\mu$ con respecto a la fuerza normal.

3. Segunda ley de Newton para movimientos traslacionales y rotacionales:
$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad \vec{\tau} = I\vec{\varepsilon} \quad (\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}).$$
Para geometría 2D $\vec{\tau}$ y $\vec{\varepsilon}$ son esencialmente escalares y $\tau = Fl = F_t r$, donde l es el brazo de una fuerza.

4. *Coordenadas generalizadas.* Deje que el estado del sistema sea definido por un solo parámetro ξ y su derivada con respecto al tiempo $\dot{\xi}$ de manera que la energía potencial sea $\Pi = \Pi(\xi)$ y la cinética sea $K = \mu\dot{\xi}^2/2$; entonces $\mu\ddot{\xi} = -\mathrm{d}\Pi(\xi)/\mathrm{d}\xi$. (Por lo tanto para movimiento traslacional: la fuerza es la derivada de la energía potencial).

5. Si el sistema consta masas puntuales m_i:
$$\vec{r}_{cm} = \sum m_i\vec{r}_i/\sum m_j, \quad \vec{p} = \sum m_i\vec{v}_i,$$
$$\vec{L} = \sum m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i, \quad K = \sum m_i v_i^2/2,$$
$$I_z = \sum m_i(x_i^2+y_i^2) = \int (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m.$$

6. En un marco de referencia donde la velocidad del centro de masa es $\vec{v}_{cm}$ (el subíndice cm denota cantidades relativas al centro de masa:
$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + M_\Sigma\vec{R}_{cm}\times\vec{v}_{cm}, \; K = K_{cm} + M_\Sigma v_{cm}^2/2,$$
$$\vec{p} = \vec{p}_{cm} + M_\Sigma\vec{v}_{cm}.$$

7. El teorema de los ejes paralelos es análogo (b es la distancia desde el centro de masa hasta el eje de rotación): $I = I_{cm} + mb^2$.

8. La segunda ley de Newton con $\vec{p}$ y $\vec{L}$ del punto 5:
$$\vec{F}_\Sigma = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t, \quad \vec{\tau}_\Sigma = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t.$$

9*. Adicionalmente en el punto 5 el momento de inercia relativo al eje z a través del centro de masa se encuentra como:
$$I_{z0} = \sum_{i,j} m_i m_j[(x_i-x_j)^2 + (y_i-y_j)^2]/2M_\Sigma.$$

10. Momento de inercia relativo al origen $\theta = \sum m_i\vec{r}_i^{\,2}$ es útil para calcular I_z de cuerpos 2D o cuerpos con simetría central usando $2\theta = I_x + I_y + I_z$.

11. Péndulo físico con longitud reducida $\tilde{l}$:
$$\omega^2(l) = g/(l + I/ml),$$
$$\omega(l) = \omega(\tilde{l}-l) = \sqrt{g/\tilde{l}}, \quad \tilde{l} = l + I/ml.$$

12. Coeficientes de momentos de inercia: cilindro $\frac{1}{2}$, esfera sólida $\frac{2}{5}$, cascarón esférico $\frac{2}{3}$, barra $\frac{1}{12}$ (relativo a un extremo $\frac{1}{3}$), cuadrado $\frac{1}{6}$.

13. Leyes de conservación a menudo aplicables:
energía (cuerpos elásticos, sin fricción);
momento lineal (sin fuerza externa neta, puede aplicarse solo a lo largo de un eje);
momento angular (sin torque externo neto, por ejemplo, los brazos de las fuerzas externas son 0 (puede ser escrita en relación con 2 o 3 puntos luego los sustituyen las ecuaciones de conservación del momento lineal).

14. Fuerzas adicionales en marcos de referencia no inerciales: fuerza inercial $-m\vec{a}$, fuerza centrífuga $m\omega^2\vec{R}$ y fuerza de Coriolis* $2m\vec{v}\times\vec{\Omega}$ (mejor evitarla; si es $\perp$ a la velocidad no hace ningún trabajo).

15. Coordenadas inclinadas: para un movimiento en un plano inclinado, a menudo es práctico alinear los ejes a lo largo y $\perp$ al plano; la aceleración de la gravedad tendría dos componentes en x y y. Los ejes pueden ser oblicuos (no son $\perp$ entre ellos), pero con $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$, $v_x \neq$ a la proyección en x de $\vec{v}$.

16. Colisión entre dos cuerpos: se conservan **a)** momento lineal, **b)** momento angular, **c)** *momento angular de uno de los cuerpos con respecto al punto de impacto*, **d)** energía (colisiones elásticas); si hay fricción, la energía cinética se conserva a lo largo del eje $\perp$ a la fricción. También: **e)** si el deslizamiento se detiene durante el impacto, las velocidades finales de los puntos de contacto tendrán proyecciones iguales respecto al plano de contacto; **f)** si el deslizamiento no se detiene, el impulso entregado de un cuerpo a otro forma un ángulo $\arctan\mu$ con la normal del plano de contacto.

17. El movimiento de un cuerpo rígido puede representarse como una rotación alrededor del centro instantáneo de rotación C (en términos de velocidades de los puntos del cuerpo). ¡Nótese bien! la distancia del punto de un cuerpo P desde $C \neq$ al radio de curvatura de la trayectoria de P.

18. Tensión en una cuerda: para una cuerda colgante masiva, la componente horizontal de la tensión es constante y los cambios verticales van de acuerdo con la masa de la cuerda debajo. La fuerza de presión (por unidad de longitud) de una cuerda que descansa sobre una superficie lisa está determinada por su radio de curvatura y tensión: $N = T/R$. Analogía: presión de tensión superficial $P = 2\sigma/R$; para derivarla estudie la fuerza de presión a lo largo del diámetro.

19. Las superficies de los líquidos toman formas equipotenciales (despreciando σ); en líquidos incompresibles, $P = P_0 - w$, w es la densidad de energía potencial (para un gas, ver X-6).

20. Ley de Bernoulli para fluidos incompresibles:
$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi = \text{const};$$
el potencial gravitacional en campos homogéneos $\varphi = gh$. Para un gas con calor específico c_P [J/kg],
$$\frac{1}{2}v^2 + c_P T = \text{const}.$$

21*. Continuidad del momento lineal en líneas de corriente rectas: $P + \rho v^2 = \text{const}$.

22*. Invariante adiabática: si el cambio relativo de los parámetros de un sistema oscilante es pequeño durante un período, el área del bucle dibujado en el plano de fase (es decir en las coordenadas $p-x$) se conserva con gran precisión.

23. Para estudiar la estabilidad **a)** principio de energía potencial mínima o **b)** principio del desplazamiento virtual.

24*. Teorema de Virial para movimientos finitos:
a) Si $F \propto |\vec{r}|$, entonces $\langle K\rangle = \langle\Pi\rangle$ (temporalmente promediados);
b) Si $F \propto |\vec{r}|^{-2}$, entonces $2\langle K\rangle = -\langle\Pi\rangle$.

25. Ecuación del cohete de Tsiolkovsky:
$$\Delta v = u\ln\frac{M}{m}.$$

V. Ondas y oscilaciones

1. Oscilador amortiguado:
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\gamma < \omega_0).$$
La solución de esta ecuación es (ver I-3):
$$x = x_0 e^{-\gamma t}\,\text{sen}\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} - \varphi_0\right).$$

2. Ecuación de movimiento para un sistema de osciladores acoplados: $\ddot{x}_i = \sum_j a_{ij}x_j$.

3. Un sistema de N osciladores acoplados tiene N modos propios diferentes cuando todos los osciladores oscilan con la misma frecuencia ω_i, $x_j = x_{j0}\,\text{sen}(\omega_i t + \varphi_{ij})$ y N frecuencias propias ω_i (que pueden ser múltiples, $\omega_i = \omega_j$). La solución general (con $2N$ constantes de integración, X_i y ϕ_i) es una superposición de todos los movimientos propios:
$$x_j = \sum_i X_i x_{j0}\,\text{sen}(\omega_i t + \varphi_{ij} + \phi_i).$$

4. Si un sistema descrito con una coordenada generalizada ξ (ver IV-4) con $K = \mu\dot{\xi}^2/2$ tiene un estado de equilibrio en $\xi = 0$, para pequeñas oscilaciones $\Pi(\xi) \approx \kappa\xi^2/2$ [donde $\kappa = \Pi''(0)$] de manera que $\omega^2 = \kappa/\mu$.

5. La fase de una onda en el punto (x,t) es $\varphi = kx - \omega t + \varphi_0$, donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda. El valor en (x,t) es $a_0\cos\varphi = \mathrm{Re}(a_0 e^{i\varphi})$. La velocidad de fase es $v_f = \nu\lambda = \omega/k$ y velocidad de grupo $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$.

6. Para ondas lineales (electromagnéticas, sonoras con amplitud pequeña y olas de agua) cualquier pulso puede considerarse como una superposición de ondas sinusoidales; una onda estacionaria es la suma de dos ondas idénticas propagándose en direcciones contrarias:
$$e^{i(kx-\omega t)} + e^{i(-kx-\omega t)} = 2e^{-i\omega t}\cos kx.$$

7. Rapidez del sonido en un gas:
$$c_s = \sqrt{(\partial P/\partial\rho)_\text{adiab}} = \sqrt{\gamma P/\rho} = \bar{v}\sqrt{\gamma/3}.$$

8. Rapidez del sonido en un material elástico:
$$c_s = \sqrt{E/\rho}.$$

9. Rapidez de las olas en aguas poco profundas ($h \ll \lambda$): $v = \sqrt{gh}$; en una cuerda: $v = \sqrt{T/\rho_\text{lin}}$.

10. Efecto Doppler: $\nu = \nu_0 \frac{1+v_\parallel/c_s}{1-u_\parallel/c_s}$.

11. Método de Huygens: el frente de onda puede construirse paso a paso, colocando una fuente de onda imaginaria en cada punto del frente de onda anterior. Los resultados son curvas separadas por la distancia $\Delta x = c_s \Delta t$, donde Δt es tiempo transcurrido y c_s es la velocidad en el punto dado. Las ondas viajan perpendicularmente al frente de onda.

VI. Óptica geométrica y fotometría

1. Principio de Fermat: el trayecto de ondas desde el punto A al punto B es tal que la onda viaja el menor tiempo.

2. Ley de Snell:

$$\operatorname{sen}\alpha_1/\operatorname{sen}\alpha_2 = n_2/n_1 = v_1/v_2.$$

3. Si el índice de refracción cambia continuamente, entonces dividiremos imaginariamente los medios en capas de n constante y aplicamos la ley de Snell. El rayo de luz puede viajar a lo largo de una capa de n constante, si el requisito de reflexión interna total se satisface marginalmente: $n' = n/R$ (donde R es el radio de curvatura).

4. Si el índice de refracción depende solo de z, el momento lineal del fotón p_x, p_y y la energía se conservan:

$$k_x, k_y = \text{const}, \quad |\vec{k}|/n = \text{const}.$$

5. La ecuación de la lente fina (preste atención a los signos):

$$1/a + 1/b = 1/f \equiv D.$$

6. Ecuación de Newton (x_1, x_2 son las distancias de la imagen y el objeto desde los planos focales): $x_1 x_2 = f^2$.

7. Método de paralaje para encontrar la posición de una imagen: encuentre una posición para la punta de un lápiz tal que su posición no cambie con respecto a la de su imagen cuando mueva perpendicularmente la posición de su ojo con respecto al lápiz.

8. Construcciones geométricas para encontrar los trayectos de los rayos de luz a través de lentes:
a) el rayo que pasa por el centro de la lente no se refracta;
b) rayos $\parallel$ al eje óptico pasan por el foco;
c) después de la refracción, rayos inicialmente $\parallel$ se encuentran en el plano local;
d) la imagen de un plano es un plano; estos dos planos se encuentran en el plano de la lente.

9. Flujo luminoso Φ [lumen (lm)] mide la energía de la luz (emitida, pasando por un contorno, etc.), ponderada según la sensibilidad de un ojo. Intensidad luminosa [candela (cd)] es el flujo luminoso (emitido por una fuente) por ángulo sólido: $I = \Phi/\Omega$. Iluminancia [lux (lx)] es el flujo luminoso (que impacta una superficie) por unidad de área: $E = \Phi/A$.

10. Ley de Gauss para el flujo luminoso: el flujo a través de una superficie cerrada que rodea las fuentes puntuales de intensidad I_i es $\Phi = 4\pi \sum I_i$; caso de una sola fuente a una distancia r, $E = I/r^2$.

11. Una sugerencia experimental: si hay una mancha de grasa en un papel y es tan brillante como el papel circundante, entonces el papel está igualmente iluminado desde ambos lados.

VII. Óptica física

1. Difracción basada en el método de Huygens: si los obstáculos cortan el frente de onda en fragmentos, el frente de onda se puede dividir en pequeñas partes que sirven como fuentes de luz imaginarias (como puntos); la amplitud de la onda en el sitio de observación será la suma de las contribuciones de estas fuentes.

2. Interferencia de doble rendija (el ancho de la rendija $d \ll a, \lambda$): ángulos de máximos $\varphi_{\text{máx}} = \arcsen(n\lambda/a)$, $n \in Z$; $I \propto \cos^2(\frac{a}{2} k \operatorname{sen}\varphi)$, donde $k = 2\pi/\lambda$.

3. Una rendija: ángulos de *mínimos* $\varphi_{\text{mín}} = \arcsen(n\lambda/d)$, $n \in Z$, $n \neq 0$. ¡Nótese bien! el máximo central es el doble ancho. $I \propto \operatorname{sen}^2(k\frac{d}{2}\operatorname{sen}\varphi)/\varphi$.

4. Rejilla de difracción: los máximos principales son los mismos que en el punto 2, el ancho de los máximos principales es el mismo que en el punto anterior con una longitud de rejilla d. Poder de resolución espectral $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN$, donde n es número del orden del máximo principales y N es el número de rendijas.

5. Resolución espectral: $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{L}{\lambda}$, donde L es la diferencia de trayectos ópticos entre los haces más cortos y más largos.

6. Poder de resolución de un prisma: $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = a\frac{dn}{d\lambda}$.

7. Distancia angular cuando dos puntos se resuelven en un telescopio (lente) ideal: $\varphi \approx 1{,}22\,\lambda/d$. Para ese ángulo, el centro de un punto cae sobre el primer mínimo de difracción del otro punto.

8. Ley de Bragg: un conjunto de planos $\parallel$ formados por iones de la red que reflejan rayos X si $2a \operatorname{sen}\alpha = k\lambda$; donde a es la distancia entre planos contiguos y α es el ángulo de impacto.

9. Reflexión desde medios dieléctricos ópticamente más densos: cambio de fase π. Para películas delgadas semitransparentes, $\phi_\to + \phi_\leftarrow = \pi$; $\phi_\to$ y $\phi_\leftarrow$ son los cambios de fase entre las ondas reflejadas y transmitidas (las flechas denotan la dirección de incidencia).

10. Interferómetro de Fabry-Pérot: dos espejos $\parallel$ semitransparentes con gran reflectividad r ($1 - r \ll 1$). Poder de resolución $\frac{\nu}{\Delta\nu} \approx \frac{2a}{\lambda(1-r)}$. El espectro de transmisión se puede encontrar introduciendo 5 ondas planas (para las ondas que se propagan hacia la izquierda y hacia la derecha antes del dispositivo, en el dispositivo y después del dispositivo) y adaptando estas en los límites de la región.

11. Ondas electromagnéticas coherentes: se suman campos eléctricos usando un diagrama vectorial, el ángulo entre vectores es el cambio de fase; ¡nótese bien! el índice de refracción: $n = n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ (para $\mu \cong 1$). Intensidad: $I = cn\varepsilon_0 E^2 = \frac{c}{n\mu_0}B^2$ (E, B son valores RMS).

12. Ley de Malus: para luz polarizada linealmente $I = I_0 \cos^2\varphi$, donde φ es el ángulo entre los planos de polarización.

13. Lámina de $\lambda/4$: cambo de fase $\pi/2$ entre componentes de ondas linealmente polarizadas.

14. Ángulo de Brewster: rayos refractados y reflejados son $\perp$; el rayo reflejado está completamente polarizado; el ángulo de incidencia $\tan\varphi_B = n$.

15. Difracción con elementos ópticos: no hay necesidad de calcular longitudes de trayectoria óptica a través de lentes, prismas, etc.: trabaje solo con imágenes. Conclusión particular: el biprisma da la misma difracción que una doble rendija.

16*. Fibras ópticas: el interferómetro de Mach-Zehnder es análogo a una difracción de doble rendija; el resonador circular al interferómetro de Fabry-Pérot; los filtros de Bragg funcionan de manera similar al caso de rayos X. Fibras de un modo: $\Delta n/n \approx \frac{1}{2}(\lambda/d)^2$.

VIII. Circuitos

1.
$$U = IR, \quad \mathcal{P} = UI$$
$$R_{\text{serie}} = \sum R_i, \quad R_\parallel^{-1} = \sum R_i^{-1}.$$

2. Leyes de Kirchhoff:

$$\sum_{\text{nodo}} I = 0, \quad \sum_{\text{malla}} U = 0.$$

3. Para reducir el número de ecuaciones del punto anterior: *análisis de nodos; análisis de mallas;* circuitos equivalentes (con 3 terminales $\Rightarrow \Delta$ o Y; 2 terminales con fem $\Rightarrow r$ y $\mathcal{E}$ en serie).

4. Resistencia de una cadena infinita: use la similitud; la resistencia entre nodos vecinos de cuadrícula infinita: método generalizado de imágenes eléctricas.

5. CA: aplique los puntos del 1 al 3 cuando sustituya R con Z:

$$Z_R = R, \quad Z_C = 1/i\omega C, \quad Z_L = i\omega L,$$
$$\varphi = \arg Z, \quad U_{\text{ef}} = |Z| I_{\text{ef}},$$
$$\mathcal{P} = |U||I| \cos(\arg Z) = \sum I_i^2 R_i.$$

6. Tiempos característicos: $\tau_{RC} = RC$, $\tau_{LR} = L/R$, $\omega_{LC} = 1/\sqrt{LC}$. La reducción de la corriente es exponencial $\propto e^{-t/\tau}$.

7. Conservación de la energía para circuitos eléctricos: $\Delta W + Q = Uq$, donde q es la carga que ha cruzado una caída de potencial U; el trabajo de la fem es $W_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}q$.

8. $W_C = CU^2/2, \quad W_L = LI^2/2.$

9. $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt = -d(LI)/dt, \quad \Phi_B = BA.$

10. Elementos no lineales: para el método gráfico encuentre la solución en el plano $U - I$ como el punto de intersección de la curva no lineal y la línea que representa las leyes de Ohm y Kirchhoff. En el caso de muchos puntos de intersección, estudie la estabilidad de las soluciones, algunas suelen ser inestables.

11. Haga uso de límites a corto y largo plazo. Para $t_{\text{observación}} \gg \tau_{RC}$ o τ_{LR}, se alcanza el equilibrio cuasiestático: $I_C \approx 0$ (el alambre se "rompe" cerca de C) y $\mathcal{E}_L \approx 0$ (L es efectivamente cortocircuitado). Para $t_{\text{observación}} \ll$

τ_{RC} o τ_{LR}, la fuga de carga de C y la caída de corriente en L son pequeñas, $\Delta Q \ll Q$ y $\Delta I \ll I$: C se "cortocircuita" y L se "rompe".

12. Si $L \neq 0$, entonces $I(t)$ es una función continua.

13. A través de un contorno superconductor el flujo magnético: $\Phi_B = \text{const}$. Sin B externo, en particular $LI = \text{const}$.

14. Inductancias mutuas: el flujo magnético en un contorno $\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$ (I_2 es la corriente en un contorno secundario). Teoremas: $L_{12} = L_{21} \equiv M$; $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$.

IX. Electromagnetismo

1. $F = kq_1q_2/r^2$, $\Pi = kq_1q_2/r$, se pueden aplicar las leyes de Kepler (ver XII).

2. Ley de Gauss: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$, $\oint \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$, $\oint \vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -4\pi GM$.

3. Teorema de la circulación: $\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \dot{\Phi}_B$, $\oint \frac{\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\mu\mu_0} = I + \dot{\Phi}_D$, $\oint \vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$.

4. Campo magnético causado por una corriente elemental:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2};$$

entonces, en el centro de un círculo con una corriente I rotativa: $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$.

5. $\vec{F} = e(\vec{v}\times\vec{B} + \vec{E})$, $\quad \vec{F} = \vec{I}\times\vec{B}l$.

6. De las leyes de Gauss y de Ampère: alambre cargado: $E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}$, CD: $B = \frac{I\mu_0}{2\pi r}$; superficie cargada $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, corriente en lámina $B = \frac{\mu_0 J}{2}$; dentro de una esfera (o superficie cilíndrica infinita) de carga superficial homogénea $E = 0$, el campo magnético interior debido a una corriente superficial de un cilindro $\parallel$ al eje $B = 0$, dentro de una esfera ($d = 3$), cilindro ($d = 2$) o lámina ($d = 1$) de ρ y $\vec{J}$ homogéneas:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{d\varepsilon_0}\vec{r}, \quad \vec{B} = \frac{1}{d\mu_0}\vec{J}\times\vec{r}$$

($\vec{r}$ es el radiovector desde el centro).

7. Solenoide largo: dentro $B = In\mu\mu_0$, fuera 0; flujo $\Phi_B = NBA$ e $\left(\text{con } n = \frac{N}{l}\right)$ inductancia $L = \Phi_B/I = Vn^2\mu\mu_0$. Solenoide corto $B_\parallel = \frac{In\mu\mu_0\Omega}{4\pi}$ (Ω es un ángulo sólido).

8. Medición del campo magnético con una pequeña bobina y un galvanómetro balístico: $q = \int \frac{\mathcal{E}}{R}\,\mathrm{d}t = NA\Delta B/R$.

9. Energía potencial de un conjunto de cargas:

$$\Pi = k\sum_{i>j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\int \varphi(\vec{r})\,\mathrm{d}q,\ \mathrm{d}q = \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V.$$

10. Fuerza entre partes de una esfera cargada uniformemente o una superficie cilíndrica: sustituya la fuerza debido a cargas con fuerza debida a la presión hidrostática.

11. Si todas las cargas están a una distancia R (por ejemplo, en el centro de una esfera o anillo cargados heterogéneamente), $\varphi = kQ/r$.

12. Para encontrar la carga neta (o el potencial) inducido por cargas externas, use el principio de superposición: "propague" las cargas para hacer el problema simétrico.

13. Un conductor "blinda" cargas y campos eléctricos, por ejemplo, la distribución de carga dentro de una esfera hueca no se puede ver desde afuera (parece que hay una esfera conductora que lleva una carga total Q).

14. Capacitancias: $C = \varepsilon\varepsilon_0 A/d$ (plano), $4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$ (esfera), $2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l(\ln R/r)^{-1}$ (coaxial).

15. Momento dipolar:

$$\vec{d}_e = \sum q_i\vec{r}_i = \vec{l}q, \quad \vec{d}_\mu = I\vec{A}.$$

16. Energía y torque de un dipolo:

$$W = -\vec{d}\cdot\vec{E}\ (\vec{B}), \quad \vec{\tau} = \vec{d}\times\vec{E}\ (\vec{B}).$$

17. Campo dipolar: $\varphi = k\vec{d}\cdot\hat{r}/r^2$; E y $B \propto \frac{1}{r^3}$.

18. Fuerzas actuando en un dipolo: $F = (\vec{E}\cdot\vec{d}_e)'$, $F = (\vec{B}\cdot\vec{d}_\mu)'$; interacción entre dos dipolos: $F \propto r^{-4}$.

19. Carga puntual como dipolo magnético: $d_\mu \propto \Phi \propto v_\perp^2/B$ que es una invariante adiabática (ver IV-22).

20. Imágenes eléctricas y magnéticas: láminas puestas tierra (superconductividad para imanes) actúan como espejos. El campo de una esfera puesta a tierra (o aislada) se puede encontrar como el campo de una (o dos) carga(s) ficticia(s) dentro de la esfera. El campo en una guía de onda plana (rendija entre dos láminas metálicas) se puede obtener como la superposición de ondas electromagnéticas planas.

21. La polarización de una esfera (cilindro) en un campo (eléctrico) homogéneo: superposición de dos esferas (cilindros) homogéneamente cargadas ($+\rho$ y $-\rho$), $d \propto E$.

22. Corrientes parásitas: densidad de disipación de potencia $\sim B^2v^2/\rho$; momento brindado en un acercamiento: $F\tau \sim B^2a^3d/\rho$ (donde d es el grueso y a el tamaño).

23. Para un superconductor y procesos rápidos dentro de un conductor $B = 0$ y por lo tanto $I = 0$ (la corriente fluye en la capa superficial, efecto pelicular).

24. Cargas en campos magnéticos homogéneos $\vec{B} = B\hat{k}$ se mueven a lo largo de un cicloide con velocidad de deriva $v = E/B = F/eB$; el momento generalizado se conserva:

$$p_x' = mv_x - Byq,\ p_y' = mv_y + Bxq,$$

de la misma manera que el momento angular generalizado $L' = L + \frac{1}{2}Bqr^2$.

25. Generador magnetohidrodinámico (a es la longitud a lo largo de $\vec{E}$):

$$\mathcal{E} = vBa, \quad r = \rho a/bc.$$

26. Histéresis: Curva (un bucle) con forma de S en el plano $B-H$ (para una bobina con un núcleo el plano $B-I$): el área del bucle da la densidad de disipación de energía térmica por ciclo.

27. Campos en la materia: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, donde $\vec{P}$ es la polarización del dieléctrico (densidad de momentos dipolares); $\vec{H} = \vec{B}/\mu\mu_0 = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$, donde $\vec{M}$ es la magnetización (densidad de momentos magnéticos).

28. En la interfaz entre dos sustancias E_t, D_n ($= \varepsilon E_\tau$), H_τ ($= B_\tau/\mu$) y B_n son continuos.

29. Densidad de energía: $W = \frac{1}{2}(\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + B^2/\mu\mu_0)$.

30. Para $\mu \gg 1$, las líneas de campo de B son atraídas a un material ferromagnético (actúa como un pozo de potencial, ver punto 28).

31. Densidad de corriente $\vec{J} = ne\vec{v} = \sigma\vec{E} = \vec{E}/\rho$.

32. Ley de Lenz: el sistema responde para oponerse a los cambios.

X. Termodinámica

1. $PV = \frac{m}{\mu}RT$.

2. Energía interna de un mol $U = \frac{i}{2}RT$.

3. El volumen de un mol en condiciones estándar es 22,4 l.

4. Procesos adiabáticos: lentos en comparación con la velocidad del sonido, no hay transmisión de calor: $PV^\gamma = \text{const}$ (y $TV^{\gamma-1} = \text{const}$).

5. $\gamma = c_P/c_V = (i+2)/i$.

6. Distribución de Boltzmann:

$$\rho = \rho_0 e^{-\mu gh/RT} = \rho_0 e^{-U/kT}.$$

7. Distribución de Maxwell: (cuántas moléculas tienen rapidez v) $\propto e^{-mv^2/2kT}$.

8. Presión atmosférica: si $\Delta P \ll P$, entonces $\Delta P = \rho g\Delta h$.

9. $P = \frac{1}{3}mn\overline{v^2} = nkT$, $v_{\text{rms}} = \sqrt{3kT/m}$, $\nu = vnA$.

10. Ciclo de Carnot: dos procesos adiabáticos y dos isotérmicos. $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$; derive usando un gráfico $S - T$.

11. Bomba de calor, ciclo de Carnot inverso: $\eta = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$.

12. Entropía: $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$.

13. Primera ley de la termodinámica: $\delta U = \delta Q + \delta W$.

14. Segunda ley de la termodinámica: $\Delta S \geq 0$ (y $\eta_{\text{real}} \leq \eta_{\text{Carnot}}$).

15. Trabajo en un gas (ver punto 10)

$$W = \int P\,\mathrm{d}V, \quad \text{adiabático:} \quad W = \frac{i}{2}\Delta(PV).$$

16. Ley de Dalton: $P = \sum P_i$.

17. Evaporación: presión del vapor saturado $P_v = P_0$; en la interfaz entre dos líquidos: $P_{v1} + P_{v2} = P_0$.

18. Corriente de calor $\mathcal{P} = kA\Delta T/l$ (k es la conductividad térmica); análogo a circuitos CD ($\mathcal{P}$ corresponde a I, ΔT a U, k a $1/\rho$).

19. Capacidad calorífica: $Q = \int c(T)\,\mathrm{d}T$. Sólidos: para temperaturas bajas, $c \propto T^3$; para temperaturas T altas, $c = 3Nk$, donde N es el número de iones en una red cristalina.

20. Tensión superficial:

$$U = A\sigma, \quad F = l\sigma, \quad P = 2\sigma/R.$$

21. Ley de Stefan-Boltzmann (cuerpo gris): $I = \varepsilon\sigma T^4$.

22. Ley de desplazamiento de Wien:

$$f_{\text{máx}} = Ck_BT/h \quad (C \approx 2{,}8),$$

$$\lambda_{\text{máx}} = hc/C'k_BT \quad (C' \approx 5).$$

XI. Mecánica cuántica

1. $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ($|\vec{p}| = h/\lambda$), $E = \hbar\omega = h\nu$.

2. Interferencia como en óptica física.

3. Indeterminación (como teorema matemático):

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}.$$

Para estimaciones cualitativas de figuras "irregulares", h sirve mejor ($\Delta p \Delta x \approx h$, etc.).

4. Espectros: $h\nu = E_n - E_m$; el ancho de las líneas espectrales está relacionado con el tiempo de vida: $\Gamma\tau \approx \hbar$.

5. Los niveles de energía de los osciladores cuánticos (por ejemplo una molécula) (con frecuencias propias ν_0): $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0$. Para muchas frecuencias propias: $E = \sum_i hn_i\nu_i$.

6. Efecto túnel: una barrera Γ con un grosor l es fácilmente penetrable, si $\Gamma\tau \approx \hbar$, donde $\tau = l/\sqrt{\Gamma/m}$.

7. Modelo de Bohr: $E_n \propto -1/n^2$. En una orbita circular (clásica), hay un número entero de longitudes de onda $\lambda = h/mv$.

8. Efecto Compton: Si un fotón se dispersa de un electrón, el cambio en la longitud de onda del fotón es $\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$.

9. Efecto fotoeléctrico: $W + mv^2/2 = h\nu$ (W es el trabajo para expulsar los electrones). En un plano $I - U$: la fotocorriente comienza a pasar cuando el voltaje contrario $U = -(h\nu - W)/e$ y se comienza a saturar para altos valores de U en la dirección a favor.

10. Ley de Stefan-Boltzmann: $I = \sigma T^4$.

XII. Leyes de Kepler

1. $F = GMm/r^2, \quad \Pi = -GMm/r.$

2. Interacción gravitacional de dos masas puntuales (primera ley de Kepler): la trayectoria de cada uno de ellas es una elipse, parábola o hipérbola con el foco en el centro de masa del sistema. Derive del vector de Runge-Lenz (ver punto 9).

3. Segunda ley de Kepler (conservación del momento angular): para una masa puntual en un campo de fuerza central, el radiovector cubre áreas iguales en tiempos iguales

4. Tercera ley de Kepler: para dos masas puntuales en órbitas elípticas en un campo de fuerza proporcional a r^{-2}, los períodos de revolución se relacionan como los semiejes más largos elevados a la $\frac{3}{2}$:

$$T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3.$$

5. Energía mecánica total ($K + \Pi$) de un cuerpo en un campo gravitatorio:

$$E = -GMm/2a.$$

6. Para elipticidades pequeñas $\varepsilon = d/a \ll 1$, las trayectorias se pueden considerar como círculos con un foco desplazado.

7. Propiedades de una elipse: $l_1 + l_2 = 2a$ (l_1, l_2 son las distancias a los focos), $\alpha_1 = \alpha_2$ (luz proveniente de un foco se refleja hasta el otro foco), $A = \pi ab$.

8. Un círculo y una elipse con un foco en el centro del círculo pueden tocarse solo en el eje más largo.

9*. Vector de Runge-Lenz (el vector de elipticidad):

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{L} \times \vec{v}}{GMm} + \hat{r} = \text{const.}$$

XIII. Teoría de la relatividad

1. Transformaciones de Lorentz (rotaciones del espacio-tiempo de Minkowski), $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2),$$
$$p'_x = \gamma(p_x - mv), \quad m' = \gamma(m - p_x v/c^2).$$

2. Magnitud de un cuadrivector:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$
$$m_0^2c^2 = m^2c^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2.$$

3. Suma de velocidades relativistas:

$$w = (u + v)/(1 + uv/c^2).$$

4. Efecto Doppler:

$$\nu' = \nu_0\sqrt{(1 - v/c)/(1 + v/c)}.$$

5. El espacio de Minkowski se puede convertir en euclidiano si el tiempo es imaginario ($t \to it$). Entonces, para ángulos de rotación α, $\tan\alpha = v/ic$. Exprese $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ mediante $\tan\alpha$ y aplique las fórmulas geométricas euclidianas.

6. Contracción dimensional: $l' = l_0/\gamma$.

7. Dilatación del tiempo: $t' = t_0\gamma$.

8. Relatividad de la simultaneidad:

$$\Delta t = -\gamma v \Delta x/c^2.$$

9. $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ $[= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$, donde $m = m_0\gamma]$.

10. Aproximación ultrarelativista: $v \approx c$, $p \approx mc$, $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \sqrt{2(1 - v/c)}$.

11*. Transformación de Lorentz para $E - B$:

$$\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel, \quad \vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel$$

$$\vec{E}'_\perp = \gamma\left(\vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}_\perp\right), \quad \vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B}_\perp - \vec{v} \times \frac{\vec{E}_\perp}{c^2}\right).$$

El asterisco (*) denota temas avanzados.

Autor: Jaan Kalda
Traducción al inglés por U. Visk y J.K.
Sugerencias en inglés ⇒ kalda@ioc.ee
Traducción al español de la versión 1.1 por Roberto Marín