PROBLEMAS DE RELATIVIDAD ESPECIAL

Siim Ainsaar

Traducción al español de la versión 0.6 por Roberto Marín
Versión: 13 de noviembre de 2019

1. INTRODUCCIÓN

La relatividad se ve a menudo como una teoría compleja que es necesaria solo cuando se trata de velocidades realmente altas o mediciones ultraprecisas, sin embargo, hay algunos temas frecuentemente encontrados que son paradójicos si se tratan de manera no relativista. Estas paradojas son también algunas de las principales fuentes de problemas de la olimpiada. Piense por un momento en dos partículas inicialmente estacionarias cargadas, ellas "sienten" solo la fuerza electrostática de cada una, pero en otro marco de referencia móvil, también existe la fuerza magnética, en general, en una dirección diferente. ¿Cómo podría la fuerza depender de la elección del marco de referencia inercial? ¿Qué principios prohíben que las partículas colisionen en un marco y salgan en otro? El electromagnetismo necesita la relatividad como una explicación. Los fotones (por lo tanto, gran parte de la óptica) son siempre relativistas y otras partículas a menudo lo son. Cualquier cosa donde la velocidad de la luz sea importante, por ejemplo, el GPS que mide el tiempo que tarda una señal de radio en viajar desde satélites, utiliza la relatividad. La física de partículas necesita relatividad en varios aspectos. Las partículas no pueden controlarse en un acelerador moderno sin tener en cuenta su dinámica relativista. La única teoría cuántica exitosa que predice los resultados de las colisiones de partículas, la teoría cuántica de campos, es relativista. Los muones en los rayos cósmicos se descompondrían mucho antes de llegar al suelo, pero todavía los detectamos gracias a la dilatación del tiempo relativista.

La teoría relativista de la gravedad, la relatividad general, permite formular la física independientemente de si el marco de referencia es inercial o no, lo que unifica el tiempo y el espacio aún más estrechamente. Es necesario para la astrofísica (precesión de las órbitas de los planetas, lentes gravitacionales, agujeros negros) y cosmología (historia y futuro de las estructuras a gran escala).

A continuación, derivaremos los resultados más importantes de la teoría especial de la relatividad, a partir de los postulados fundamentales. La mayoría de los pasos de la derivación se presentan como problemas, que también son buenos ejemplos de lo que uno puede preguntar en relatividad y ejercen la capacidad del lector para utilizar la teoría. La técnica general más importante para resolver problemas es la rotación del espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas complejas, esto se describe en la sección *4*. La sección *3* muestra la manera desde los postulados a las técnicas útiles, sus problemas pueden omitirse si se concentran únicamente en la preparación de la Olimpiada. La sección *4* es principalmente sobre cinemática, las siguientes desarrollan dinámica, óptica y electromagnetismo (de manera breve) a partir de ella. Finalmente, se dan algunos problemas para practicar.

2. POSTULADOS DE LA RELATIVIDAD

Hecho 1: Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.

Un marco de referencia es inercial si y solo si los objetos sobre los que no actúa ninguna fuerza se mueven en línea recta con velocidad constante.

Hecho 2: La velocidad de la luz en el vacío (c) es la misma en cualquier marco de referencia inercial.

En SI, después de definir el segundo[1], el metro se define mediante la fijación (¡exactamente!) $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$.

3. EXPERIMENTOS MENTALES

3.1. Dilatación del tiempo

Pr 1. Considere un "reloj de luz" que funciona de la siguiente manera. Un fotón se emite hacia un espejo a una distancia conocida l y se refleja hacia atrás. Se detecta (casi) de nuevo en el emisor. El tiempo desde la emisión hasta la detección (un "tic") es t. Ahora miramos el reloj desde un marco de referencia donde todo el aparato se está moviendo con velocidad v perpendicularmente al haz de luz. Supongamos que las longitudes perpendiculares al movimiento no cambian. ¿Cuánto tiempo dura el tic para nosotros?

La respuesta está dada por el siguiente hecho:

Hecho 3: Si el intervalo de tiempo entre los eventos que suceden en un punto estacionario es t, luego en un marco de referencia donde la velocidad del punto es v el intervalo de tiempo es γt, donde el factor de Lorentz es:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Otra cantidad útil en cálculos relativistas es $\beta = v/c$. Si $\gamma > 1$, vemos que todo en un vehículo en movimiento toma más tiempo que en uno estacionario, una vez se dilata (se estira) en un marco de referencia en movimiento.

3.2. Contracción dimensional

Pr 2. Ahora considere el mismo "reloj de luz" que en el problema 1, pero moviéndose en paralelo al haz de luz, con velocidad v. ¿Cuál es la distancia al espejo en nuestro marco de referencia, si la distancia en el marco estacionario es l?

La respuesta está en el siguiente hecho.

Hecho 4: Si la longitud de una varilla estacionaria es l, entonces su longitud en un marco de referencia se mueve en paralelo a la barra con rapidez v es l/γ.

Las longitudes se contraen (comprimen) en la dirección del movimiento.

3.3. Tiempo propio

Pr 3. Una nave espacial vuela libremente desde (t_1, x_1, y_1, z_1) (evento 1) a (t_2, x_2, y_2, z_2) (evento 2). ¿Cuál es el tiempo propio τ medido por un pasajero en la nave espacial entre estos eventos?

[1] Un segundo es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio-133 en reposo a una temperatura de 0 K.

4. TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

4.1. Intervalo de espacio tiempo

En la relatividad galileana ordinaria, las longitudes y los intervalos de tiempo son absolutos. Como ya hemos visto, los postulados de la relatividad de Einstein implican que ninguno de los dos es así, una vez que las velocidades se vuelven comparables a c. Sin embargo, el tiempo propio, (tiempo en un marco de referencia en movimiento) debe ser independiente de nuestro marco de referencia, por lo tanto, podemos definir una nueva cantidad invariante.

Hecho 5: El intervalo espacio-tiempo:

$$s = \sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}$$

es independiente de la elección del marco de referencia.

Si s es un número real, el intervalo se denomina paratemporal; si s es imaginario, el intervalo es paraespacial y si s es cero, el intervalo es paralumínico.

Hecho 6: El intervalo entre dos eventos en el mismo rayo de luz (en vacío) es cero, por lo tanto, paralumínico.

4.2. Espacio-tiempo de Minkowski y transformaciones de Poincaré

Podemos decir que los puntos de espacio-tiempo están representados por cuadrivectores de posición [2] $X^\mu = (ct, x, y, z)$ y el intervalo calcula la longitud del desplazamiento cuadrivector ΔX^μ. Sin embargo, para calcular la longitud se incurrirá en el uso de signos negativos, por lo que estos cuadrivectores forman un espacio-tiempo Minkowski, a diferencia del espacio euclidiano habitual, donde las longitudes se calcularían utilizando el teorema de Pitágoras. Podemos reutilizar nuestras leyes familiares de la geometría si introducimos números complejos. La cantidad invariante $is = \sqrt{c^2(i\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ ahora se expresa al igual que el teorema de Pitágoras. Entonces, la distancia euclidiana entre dos eventos en el espacio-tiempo de (ict, x, y, z) es independiente del marco de referencia. ¿Qué transformaciones del espacio euclidiano dejan las longitudes invariantes? ¡Rotaciones, traslaciones y combinaciones!

Hecho 7: Los cambios de los marcos de referencia inerciales corresponden a rotaciones y desplazamientos en las coordenadas del espacio-tiempo ict, x, y y z.

Tales transformaciones se denominan transformaciones de Poincaré[3] y, si solo giramos y no cambiamos las coordenadas, son transformaciones de Lorentz.

4.3. Transformaciones geométricas

¿En qué ángulo debemos girar los ejes? Claramente, como un eje tiene números imaginarios, el ángulo también debe ser complejo. Afortunadamente, esto no plantea problemas para dibujar el ángulo, siempre y cuando consideremos solo el movimiento unidimensional: como es un ángulo puramente imaginario, su coseno se calcula como $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ (una proyección del vector en la dirección del vector unitario) es real (se puede dibujar en el eje x real) y su seno $\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2}$ es imaginario (se puede dibujar en el eje imaginario ict).

Pr 4. Considere dos sistemas de coordenadas, O y O', con los ejes espaciales paralelos y el origen[4] (espacial) de O' moviéndose en la dirección x con velocidad v. Calcule el angulo α entre los ejes x y x'.

Tal transformación de Lorentz que involucra el tiempo y una coordenada espacial se denomina rotación espacio-temporal (comunmente llamada *boost* por su nombre en inglés) en la dirección x. La respuesta al problema necesita el siguiente hecho:

Hecho 8: Un boost en la dirección de x desde el reposo a la velocidad v corresponde a la rotación de los ejes x y ict en un ángulo de

$$\alpha = \arctan\frac{v}{ic} = \arctan\frac{\beta}{i}.$$

Pr 5. Calcule $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$.

Hecho 9: La cantidad $\varphi = \alpha/i$ es un número real sin dimensiones llamado *rapidity* por su nombre en inglés.

4.4. Trigonometría hiperbólica

Algunas unidades imaginarias i y algunos menos pueden eliminarse mediante el uso de trigonometría hiperbólica. Empleando las fórmulas $\operatorname{senh}\alpha = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$, $\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$, $\tanh\alpha = \frac{\operatorname{senh}\alpha}{\cosh\alpha}$ y $\cosh^2\alpha - \operatorname{senh}^2\alpha = 1$ se demostrar lo siguiente.

Pr 6. Demuestre que para la rapidity φ que $\tanh\varphi = \beta$, $\cosh\varphi = \gamma$ y $\operatorname{senh}\varphi = \beta\gamma$. Utilizando la función inversa de la tangente hiperbólica, $\alpha = i\varphi = i\,\operatorname{arc\,tanh}\beta$.

4.5. Dilatación del tiempo, contracción longitudinal y suma de velocidades

Pr 7. Demuestre de nuevo la fórmula de contracción de longitud del hecho 4. Aquí utilice el boost.

Pr 8. De la misma manera demuestre la fórmula de dilatación del tiempo del hecho. 3.

Hecho 10: Si un objeto se mueve con respecto al marco de referencia O' con velocidad u y O' se mueve con respecto al marco de referencia O con velocidad v en la misma dirección, entonces la velocidad del objeto en O es

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}.$$

Pr 9. Demuestre la fórmula de suma de velocidades en el último hecho.

Pr 10. Demuestre que la fórmula de adición de velocidad implica que el postulado de la universalidad de la velocidad de la luz.

[2] Los cuadrivectores están habitualmente identificados por superíndices griegos; los subíndices denotan su versión covariante la cuál no se discutirá mucho.

[3] Las transformaciones de Poincaré también se conocen como transformaciones de Lorentz no homogéneas.

[4] En el origen espacial $x = y = z = 0$, pero ict cambia.

Pr 11. Demuestre que si u y v en la fórmula de suma de velocidades están entre $-c$ y c, entonces también lo está w.

Hecho 11: Si existe un marco de referencia donde un objeto se mueve más lento que la luz, entonces lo hace en cada marco de referencia.

4.6. Conos de luz, simultaneidad y causalidad

La trayectoria de una partícula en el espacio-tiempo se llama línea mundial. La línea mundial de un fotón corta una cuña muy especial del diagrama: el interior de la cuña puede verse afectado por un evento en la punta del cono; el exterior no puede. La región en la que un evento puede tener influencia se denomina el cono de luz del evento.

Hecho 12: Si el diagrama del espacio-tiempo se escala para que i metros (en el eje ict) se encuentre a la misma distancia del origen que a un metro (en el eje x), entonces la línea mundial de un fotón está a 45° de ambos ejes.

Hecho 13: La simultaneidad es relativa.

Pr 12. En el marco de referencia O, dos eventos tienen lugar al mismo tiempo $t = 0$, pero con separación espacial Δx. ¿Cuál es el tiempo $\Delta t'$ entre ellos en el marco de referencia O', que se mueve en la dirección x con velocidad v?

Hecho 14: El orden de dos eventos con separación paratemporal o paralumínica es absoluto. Para la separación en paraespacial, el orden depende del marco de referencia.

Esto significa que solo la separación paratemporal o paralumínica permite que un evento sea la causa de otro. Al exigir que se mantenga la causalidad y, por lo tanto, no se puede enviar información al pasado, obtenemos el siguiente hecho.

Hecho 15: La información no puede propagarse más rápido que la luz en el vacío.

Esto significa, entre muchas otras implicaciones, que la materia debe ser deformable: si empujamos un extremo de una varilla larga, entonces el empuje se propagará al otro extremo más lento que c (probablemente mucho más lento).

4.7. Transformaciones de Lorentz algebraicas

Hecho 16: Al ir a un marco de referencia que se mueve en la dirección x con velocidad v, las coordenadas de tiempo y espacio de un evento se transforman bajo las transformaciones de Lorentz de la siguiente manera: $t' = \gamma(t - vx/c^2)$, $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$ y $z' = z$.

Pr 13. Demuestre el último hecho.

Pr 14. Demuestre algebraicamente que si aplica el boost en ambas direcciones x y y, el orden de los boosts importa.

Intuitivamente, como los boosts son rotaciones, su orden debería ser igual al orden de las rotaciones espaciales ordinarias: intente girar un libro en torno a dos ejes diferentes, recuerde el resultado y luego repita, cambiando el orden los ejes. El resultado de dos boosts sucesivos en diferentes direcciones no es en realidad solo un boost en una tercera dirección, sino que agrega cierta rotación que depende del orden de los boosts.

5. DINÁMICA

5.1. Cuadrivelocidad y cuadriaceleración

Generalizando del cuadrivector de posición $X^\mu = (ct, x, y, z)$ introducido en la sección *4.2*, definimos un cuadrivector como una colección de cuatro números $q^\mu = (q^t, q^x, q^y, q^z)$ que se transforma bajo las transformaciones de Lorentz. Los componentes espaciales. $\vec{q} \equiv (q^x, q^y, q^z)$ rotar como un vector habitual. El tiempo y los componentes espaciales son mezclados por los boost que actúan como rotaciones en el espacio cuadridimensional $(iq^t, \vec{q})$. Un boost en la dirección de x se da igual que en el hecho 16 $q^{t'} = \gamma(q^t - \beta q^x)$ $q^{x'} = \gamma(q^x - \beta q^t)$. La magnitud invariante de Lorentz del cuadrivector es $|q^\mu| = \sqrt{(q^t)^2 - (q^x)^2 - (q^y)^2 - (q^z)^2}$. Ya sabemos que los períodos de tiempo propio $\mathrm{d}\tau$ sin invariantes de Lorentz. Así, se pueden formar las siguientes derivadas.

Hecho 17: Cuadrivelocidad $U^\mu = \frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ y cuadriaceleración $A^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ de una partícula son cuadrivectores.

Pr 15. Demuestre que la cuadrivelocidad de una partícula que se mueve con velocidad v en la dirección x es $(\gamma c, \gamma v, 0, 0)$.

Pr 16. ¿Cuál es la cantidad invariante de Lorentz de la cuadrivelociad del último problema?

Como la dirección en x era arbitraria, podemos generalizar la respuesta de la siguiente manera.

Hecho 18: El módulo de la cuadrivelocidad es c.

Pr 17. Demuestre que la cuadriaceleración de una partícula que se mueve y acelera en la dirección x con una aceleración de magnitud $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ es $(\beta\gamma^4, \gamma^4 a, 0, 0)$ con una magnitud invariante a.

5.2. Masa, momento y energía

Algunos textos de relatividad distinguen la masa en reposo o la masa invariante m de la masa relativista γm, pero esto sería engañoso a la hora de describir el movimiento en varias dimensiones. Por lo tanto, en esta guía, nos referimos a m como solo la masa. Esta masa es una propiedad intrínseca de cualquier objeto y no depende del marco de referencia.

Hecho 19: El cuadrimomento de una partícula con masa m es $P^\mu = mU^\mu$.

Hecho 20: $P^\mu = (E/c, \vec{p})$ donde la energía total es $E = \gamma mc^2$ y el momento relativista es $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$.

Nótese que aquí $\vec{v}$ es la velocidad habitual (clásica) y no la parte espacial de la cuadrivelocidad que tiene un γ adicional en ella.

Hecho 21: La magnitud del cuadrimomento es mc, sin importar la velocidad. Por lo tanto, $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$.

Para partículas sin masa (como los fotones), $E = pc$.

Hecho 22: El cuadrimomento se conserva en las interacciones (colisiones).

Esto abarca tanto la conservación de la energía como la conservación del momento.

Hecho 23: El producto punto entre cuadrivectores se define como: $q^\mu j_\mu = q^t j^t - \vec{q} \cdot \vec{j}$.

Al "elevar al cuadrado" (multiplicar por su versión *covariante*[5]) la ecuación de conservación de cuadrimomentos se puede recurrir a expansiones que resultan en términos con productos punto fácilmente simplificables con la fórmula anterior (recuerde que un cuadrivector "al cuadrado" es el producto punto de ese cuadrivector con sí mismo, es decir, su magnitud cuadrada o invariante de Lorentz), por lo que aislar un término en la conservación de cuadrimomentos y luego elevar al cuadrado puede ser de mucha ayuda.

Hecho 24: La energía total puede ser separada en energía de reposo $E_{\text{reposo}} = mc^2$ y la energía cinética $K = (\gamma - 1)mc^2$.

Pr 18. Demuestre que, para rapideces pequeñas, $K \approx \frac{mv^2}{2}$.

Tenga en cuenta que si un objeto tiene una estructura interna y, por lo tanto, energía interna, entonces debe tenerse en cuenta en su energía de reposo y, por lo tanto, su masa (en reposo). Por otro lado, para cualquier objeto ultrarelativista que se mueva casi con una velocidad de c, la energía de reposo y la masa de reposo se pueden despreciar; así, $E \approx pc$. Como la rapidez de la luz, c, corresponde a $\gamma = \infty$, podemos deducir lo siguiente.

Hecho 25: Se necesita infinita energía para acelerar un objeto masivo hasta c. Las partículas sin masa se mueven solo con una velocidad de c.

5.3. Fuerza

Hecho 26: $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\gamma m \vec{v})}{\mathrm{d}t}$.

Hecho 27: $F^\mu = mA^\mu = \frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau}$.

Pr 19. Demuestre que si el movimiento está en la dirección x, entonces $F^\mu = (\beta\gamma F, \gamma F, 0, 0)$.

En general, $F^\mu = (\gamma \vec{v} \cdot \vec{F}/c, \gamma \vec{F})$ donde $\vec{v} \cdot \vec{F} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ es la potencia.

6. EFECTOS ÓPTICOS

Pr 20. ¿Cuál es la longitud aparente de una varilla con una longitud en reposo l moviéndose con velocidad v paralela a la varilla, si se tienen en cuenta los tiempos de viaje finitos de los fotones desde sus extremos hasta nuestros ojos?

Hecho 28: Efecto Doppler: $\nu' = \nu_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$.

Pr 21. Demuestre la fórmula anterior considerando las líneas mundiales de dos crestas de las ondas.

Pr 22. Demuestre otra vez esta fórmula usando $E = h\nu$.

Al menos dos efectos ópticos relativistas importantes se han dejado fuera de esta guía, pero todavía vale la pena pensar en: la medición de la unidad astronómica a través de la aberración y la dispersión de Compton.

7. ELECTROMAGNETISMO

La fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula con carga q que se mueve en un campo electromagnético es $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$. Si separamos los campos en componentes paralelos y perpendiculares a $\vec{v}$, se puede demostrar que los campos eléctrico y magnético se transforman entre sí con las transformaciones de Lorentz.

Hecho 29: Las transformaciones de campos eléctricos y magnéticos son:

$$\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||}, \quad \vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}\right), \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \frac{\vec{E}_{\perp}}{c^2}\right).$$

8. CONCLUSIÓN

Algunos de los siguientes problemas han sido traducidos de un libro estonio[6].

Pr 23. Una varilla con longitud en reposo l_0 se está moviendo de forma traslacional con una velocidad v de tal manera que la línea que conecta sus puntos finales en un instante forma un ángulo φ con la dirección del movimiento. Encuentre su longitud.

Pr 24. Un cuerpo se mueve uniformemente en un círculo, una órbita toma $t = 3\,\mathrm{h}$ en completarse. A un reloj dentro del cuerpo le toma $\tau = 30\,\mathrm{min}$. Encuentre el radio R de la órbita.

Pr 25. El tiempo de vida característico de un muón en reposo es $\tau = 2{,}2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$. ¿Cuánta distancia s puede recorrer desde su creación, si su velocidad es $v = 0{,}999c$?

Pr 26. Un pión en reposo se desintegra en un muón y un neutrino. Encuentre la energía total E y la energía cinética T del muón, si las masas en reposo del pión y el muón son, respectivamente, m_n y m_μ, la masa en reposo del neutrino se desprecia.

Pr 27. Un muón en reposo se desintegra en un electrón y dos neutrinos. La masa del muón en reposo es μ, tla masa del electrón es m, la masa del neutrino se desprecia. Encuentre la máxima energía posible $E_{\text{máx}}$ del electrón.

Pr 28. Al menos, ¿cuán grande debe ser la energía E de un pión, si su colisión con un nucleón en reposo produce un par nucleón-antinucleón y el pión se absorbe? Las masas en reposo del nucleón y el pión son, respectivamente, M y m.

[5] El vector covariante se define con un subíndice que denota sus componentes, estas componentes no difieren debido a sus vectores base (unitarios), al multiplicarse un vector con subíndice y otro con superíndice los vectores base de ambos definen la métrica del espacio que es la que determina los signos (por convención $+---$ en espacio-tiempo plano), además las componentes pasan a su versión con superíndices.

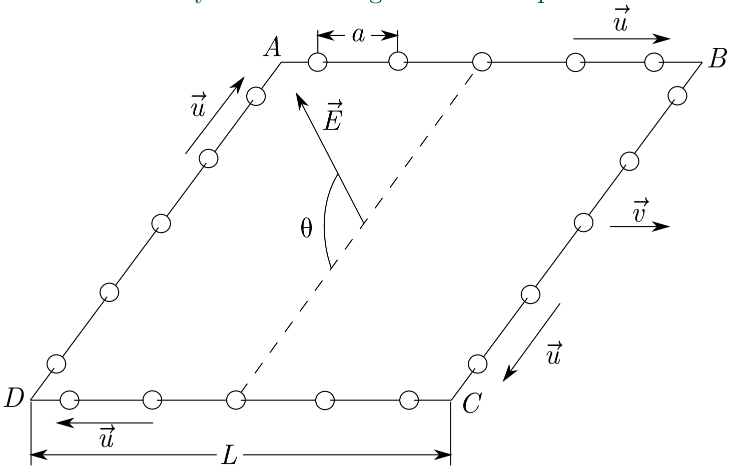
[6] Paul Kard, "Elektrodünaamika ja spetsiaalse relatiivsusteooria ülesannete kogu" ("Una colección de problemas en electrodinámica y relatividad especial"), Universidad de Tartu 1961. Los problemas usados son: 200, 201, 202, 234, 235, 244, 245, 248 y 249.

Pr 29. ¿Cuán grande debe ser la energía E de un nucleón, si su colisión con un nucleón en reposo produce un par nucleón-antinucleón y los nucleones originales quedan intactos? La masa en reposo del nucleón es M.

Pr 30. Un átomo quieto con masa en reposo m, irradia un fotón con frecuencia ν. ¿Cuál es la masa restante m_0 del átomo después del proceso?

Pr 31. La diferencia entre un nivel de energía excitado y estado fundamental de un átomo es ΔE. ¿Cuál debería ser la velocidad v del átomo excitado? si queremos que un fotón se irradie en la dirección del movimiento y tenga una frecuencia de $\Delta E/h$. La masa en reposo del átomo en su estado fundamental es m.

Pr 32. En un bucle cuadrado con lado L, una gran cantidad de pelotas de radio insignificante y cada una con una carga q se mueven a una velocidad de u con una separación constante entre ellas visto desde el marco de referencia del bucle, L es mucho mayor que a. El cable no conductor que forma el bucle tiene una densidad de carga homogénea por unidad de longitud en el marco del bucle. Su carga total es igual y opuesta a la carga total de las bolas en ese marco. Considere la situación en la que el bucle se mueve con velocidad v paralela a su lado AB a través de un campo eléctrico homogéneo de magnitud E que es perpendicular a la velocidad del bucle y forma un ángulo θ con el plano del bucle.



Teniendo en cuenta los efectos relativistas, calcule las siguientes magnitudes en el marco de referencia de un observador que ve que el bucle se mueve con velocidad v:

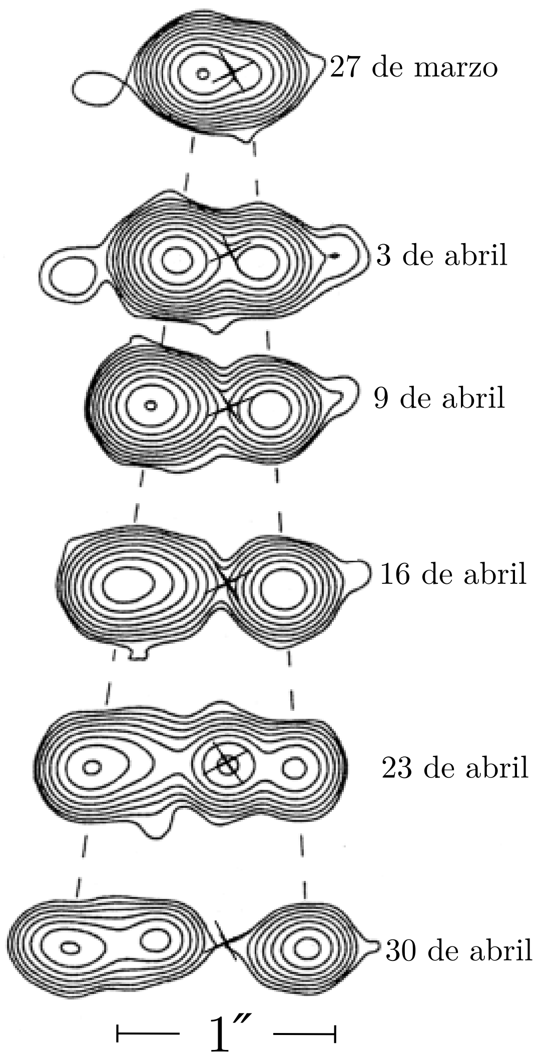
a) El espacio entre las pelotas en cada uno de los lados del bucle, a_{AB}, a_{BC}, a_{CD} y a_{DA}.

b) El valor de la carga neta del bucle más el de las pelotas en cada uno de los lados del bucle: Q_{AB}, Q_{BC}, Q_{CD} y Q_{DA}. c) El módulo M del par (torque) producido eléctricamente que tiende a rotar el sistema del bucle.

d) La energía W debido a la interacción del sistema, que consiste en el bucle y las pelotas con el campo eléctrico.

Todas las respuestas deben darse en términos de cantidades especificadas en el problema. Nota: la carga eléctrica de un objeto aislado es independiente del marco de referencia en el cual las mediciones se llevan a cabo. Cualquier efecto de radiación electromagnética debe ser ignorado.

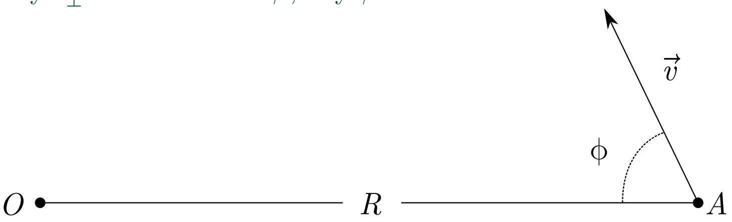
Pr 33. En este problema analizaremos e interpretaremos mediciones hechas en 1994 de emisiones de ondas de radio de una fuente compuesta en nuestra galaxia. El receptor estaba ajustado a una banda ancha de ondas de radio de varios centímetros. La siguiente figura muestra una serie de imágenes tomadas en tiempos diferentes, los contornos indican intensidad de radiación constante de manera similar a los contornos de altitud en los mapas geográficos. En la figura los dos máximos se interpretan como dos objetos que se alejan de su centro inicial marcado con una “×” .(Este centro se asume estacionario, también emite radiación, pero en otras longitudes de onda). Las mediciones en diferentes fechas se hicieron a la misma hora del día.



La escala de la figura es dada por un segmento que muestra un arcosegundo (as $= (1/3600)^\circ$). La distancia al cuerpo celeste central la “×” es $R = 12{,}5\,\mathrm{kpc}$, donde el kilopársec es $3{,}09 \times 10^{19}\,\mathrm{m}$ y la velocidad de la luz se considera como $3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$. Para la solución no se necesitará cálculo de incertidumbres.

a) Denotaremos las posiciones angulares de las fuentes de radio relativo al centro como $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ (de aquí en adelante los subíndices 1 y 2 denotan los objetos izquierdo y derecho respectivamente) donde t es el tiempo de observación. Las velocidades angulares vistas desde la Tierra son ω_1 y ω_2 que corresponden a las rapideces transversales $v'_{\perp,1}$ y $v'_{\perp,2}$. Con la figura elabore un gráfico para determinar las velocidades angulares en miliarcosegundos por día, también determine las rapideces.

b) Para resolver la paradoja de los resultados de a) considere una fuente de luz moviéndose con velocidad $\vec{v}$ a un ángulo ϕ $(0 \leq \phi \leq \pi)$ con respecto a la línea que la conecta con el observador O. La rapidez se denota como $v = \beta c$ y la distancia medida por el observador es R. La velocidad angular de la fuente es ω y la velocidad transversal aparente es $v'_{\perp}$. Exprese ω y $v'_{\perp}$ en términos de β, R y ϕ.



c) Asumimos que los dos objetos expulsados descritos en la introducción se mueven con rapideces iguales $v = \beta c$ por lo que los resultados de las dos partes anteriores se podrán combinar para calcular β y ϕ con las velocidades angulares ω_1, ω_2 y R. Derive fórmulas para β y ϕ en términos de cantidades conocidas y dé sus valores numéricos.

d) Para la situación de un cuerpo en b), encuentre la condición para una rapidez transversal aparente $v'_{\perp}$ más grande que c. Escriba la condición de la forma $\beta > f(\phi)$ y dé la expresión analítica de f, grafique f y muestre las partes importantes para el problema.

e) Siguiendo en el caso de un cuerpo, encuentre una expresión para el máximo valor de la rapidez transversal aparente $v'_{\perp,\text{máx}}$ para una β dada. Nótese que esta rapidez crece sin límite cuando $\beta \to 1$.

f) La estimación de R anteriormente dada en la introducción no es muy confiable por lo que científicos han estado empezando en especular una manera de determinar R de una manera directa. Una idea puede ser la siguiente: asuma que podemos identificar y medir el efecto Doppler de las longitudes de onda λ_1 y λ_2 de los dos objetos expulsados que corresponden a la misma longitud de onda λ_0 en marcos de referencia en los que los objetos estén en reposo. Con el corrimiento Doppler relativista $\lambda = \lambda_0 \frac{1-\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y asumiendo nuevamente que ambos objetos tiene la misma rapidez v, demuestre que β se puede expresar en términos de λ_0, λ_1 y λ_2 como:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha\lambda_0^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}}.$$

Determine el valor numérico de α.

Pr 34. Un neutrón libre en reposo de masa m_n se desintegra en el marco de referencia del laboratorio en tres partículas que no interactúan: un protón, un electrón y un antineutrino. La masa en reposo del protón es m_p, mientras que la masa de reposo del antineutrino es m_ν y se supone que es distinta de cero y mucho menor que la masa de reposo del electrón m_e. Los valores medidos de masa son los siguientes: $m_n = 939{,}565\,63\,\mathrm{MeV/c^2}$, $m_p = 938{,}272\,31\,\mathrm{MeV/c^2}$ y $m_e = 0{,}510\,990\,7\,\mathrm{MeV/c^2}$. A continuación, todas las energías y velocidades se refieren al marco del laboratorio. Sea E la energía total del electrón que sale de la desintegración.

a) Encuentre el valor máximo posible $E_{\text{máx}}$ de E y la velocidad v_m del antineutrino cuando $E = E_{\text{máx}}$. Ambas respuestas deben expresarse en términos de las masas en reposo de las partículas y la velocidad de la luz. Dado que $m_\nu < 7{,}3\,\mathrm{eV/c^2}$, calcule $E_{\text{máx}}$ y la razón v_m/c con 3 cifras significativas.

Pr 35. En la teoría de la relatividad especial, la relación entre la energía E y el momento p de una partícula libre con masa en reposo m_0 es:

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2} = mc^2.$$

Cuando tal partícula está sujeta a una fuerza conservativa, la energía total de la partícula, que es la suma de $\sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$ y la energía potencial se conserva. Si la energía de la partícula es muy alta, la energía en reposo de la partícula puede ser ignorada (tal partícula se llama partícula ultrarelativista).

a) Considere el movimiento unidimensional de una partícula de energía muy alta (en la cual la energía de reposo puede ser despreciada) sujeta a una fuerza central atractiva de magnitud constante f. Supongamos que la partícula está ubicada en el centro de la fuerza con el momento inicial p_0 en el momento $t = 0$. Describa el movimiento de la partícula graficando para al menos un período del movimiento: x contra el tiempo t y el momento p contra la coordenada de espacio x. Especifique las coordenadas de los “puntos de inflexión” en términos de los parámetros dados p_0 y f. Indique, con flechas, la dirección del progreso de la partícula en el diagrama (p, x). Puede haber intervalos cortos de tiempo durante los cuales la partícula no es ultrarelativista, sin embargo, estos deben ser despreciados.

b) Un mesón es una partícula formada por dos quarks. La masa en reposo M del mesón es igual a la energía total del sistema de dos quarks dividida por c^2. Considere un modelo unidimensional para un mesón en reposo, en el que se supone que los dos quarks se mueven a lo largo del eje x y se atraen entre sí con una fuerza de magnitud constante f. Se supone que pueden pasar a través del otro libremente. Para el análisis del movimiento de alta energía de los quarks, la masa en reposo de los quarks se puede despreciar. En el momento $t = 0$ los dos quarks se encuentran en $x = 0$. Demuestre por separado el movimiento de los dos quarks gráficamente mediante un diagrama de (x, t) y un diagrama de (p, x) especifique las coordenadas de los “puntos de inflexión” en términos de M y f, indique la dirección del proceso en su diagrama (p, x) y determine la distancia máxima entre los dos quarks.

c) El marco de referencia utilizado en la parte b) se denominará marco S, el marco de referencia del laboratorio, denominado S, se mueve en la dirección x negativa con una velocidad constante $v = 0{,}6\,\mathrm{c}$. Las coordenadas en los dos marcos de referencia se eligen de modo que el punto $x = 0$ en S coincida con el punto $x' = 0$ en S'' en el momento $t = t' = 0$. Grafique el movimiento de los dos quarks gráficamente en un diagrama (x', t'). Especifique las coordenadas de los puntos de inflexión en términos de M, f y c y determine la distancia máxima entre los dos quarks observados en el marco de laboratorio S'.

d) Para un mesón con energía de reposo $Mc^2 = 140\,\mathrm{MeV}$ y velocidad $0{,}6c$ con relación al marco del laboratorio S'', determine su energía E' en el marco de referencia del laboratorio S''.

Pr 36. a) Un fotón de frecuencia f posee una masa inercial efectiva m determinada por su energía. Supongamos que tiene una masa gravitatoria igual a esta masa inercial. En consecuencia, un fotón emitido en la superficie de una estrella perderá energía cuando se escapa del campo gravitatorio de la estrella. Demuestre que el cambio de frecuencia Δf del fotón cuando escapa de la superficie de la estrella al infinito está dado por:

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}$$

para $\Delta f \ll f$.

b) Se lanza una nave no tripulada en un experimento para medir tanto la masa M como el radio R de una estrella en nuestra galaxia. Los fotones se emiten desde iones de helio He^+ en la superficie de la estrella. Estos fotones pueden controlarse mediante la absorción resonante de los iones He^+ contenidos en una cámara de prueba en la nave espacial. La absorción resonante se acentúa solo si a los iones He^+ se les da una velocidad hacia la estrella para contrarrestar exactamente el corrimiento al rojo. A medida que la nave espacial se acerca radialmente a la estrella, la velocidad relativa a la estrella ($v = \beta c$) de los iones He^+ en la cámara de prueba de resonancia de absorción se mide como una función de la distancia d (la más cercana) desde la superficie de la estrella. Los datos experimentales se muestran en la tabla adjunta. Utilice completamente los datos para determinar gráficamente la masa M y el radio R de la estrella. No hay necesidad de estimar las incertidumbres en su respuesta.

β ($\times 10^{-5}$)	3,352	3,279	3,195	3,077	2,955
d ($\times 10^{8}$m)	38,90	19,98	13,32	8,99	6,67

c) Para determinar R y M en tal experimento, es usual considerar la corrección de frecuencia debida al retroceso del átomo emisor. Nota: el movimiento térmico hace que las líneas de emisión se amplíen sin desplazar los máximos de emisión, por lo que podemos suponer que se han tenido en cuenta todos los efectos térmicos.

i) Supongamos que el átomo se desintegra en reposo, produciendo un fotón y un átomo de retroceso. Obtenga la expresión relativista para la energía hf de un fotón emitido en términos de ΔE (la diferencia en energía de reposo entre los dos niveles atómicos) y la masa de reposo inicial m_0 del átomo.

ii) Haga una estimación numérica del cambio de frecuencia relativista Δf del retroceso para el caso de los iones He^+. Su respuesta debe resultar mucho más pequeña que en el desplazamiento gravitacional al rojo obtenido en la parte b).

Pr 37. Un electrón inicialmente en reposo, se acelera con un voltaje $U = km_0c^2/e$, donde m_0 es la masa en reposo del electrón, e la carga elemental, c la velocidad de la luz y k un número adimensional. El electrón golpea un positrón inmóvil y se aniquilan creando dos fotones. La dirección de un fotón emitido define la dirección del otro. Encuentre el valor más pequeño $\alpha_{\text{mín}}$ posible del ángulo α entre las direcciones de los dos fotones emitidos (exprese la respuesta en términos de k y proporcione un valor numérico para $k = 1$).

9. SUGERENCIAS

1. El haz de luz sigue un trayecto en zigzag.

4. Haga un diagrama con ict en un eje y x en otro. Agregue los ejes ict' y x'. Calcule las coordenadas x e ict de un punto arbitrario por el que pasa el origen espacial de O'. La razón de estas coordenadas es $\tan\alpha$.

9. $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ y $\tanh(\alpha+\beta) = \frac{\tanh\alpha+\tanh\beta}{1+\tanh\alpha\tanh\beta}$.

10. $u = \pm c$.

11. Demuestre que $\frac{dw}{du} > 0$, por lo tanto w es monótono y use el resultado del último problema, $u = \pm c$ corresponde a $w = \pm c$.

18. Use la fórmula de la magnitud de cuadrivectores.

17. Use el hecho 17 y el hecho 1 para determinar el diferencial del tiempo propio, luego utilice la regla del producto en la derivada. Use la fórmula de la magnitud de cuadrivectores.

22. Use la transformación de Lorentz en el cuadrimomento de la luz.

37. Use el hecho 23 en la conservación del cuadrimomento, ¿cómo se maximiza la expresión resultante?

10. RESPUESTAS

1.

2.

3. $c^2\tau^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$.

4.

5. $\cos\alpha = \gamma$, $\sin\alpha = \beta\gamma/i$.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12. $\Delta t' = -\gamma v\Delta x/c^2$.

13.

14.

15.

16. c.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23. $\frac{l_0}{\gamma\sqrt{1-\beta^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$.

24. $R = \frac{c\sqrt{t^2-\tau^2}}{2\pi}$.

25. $s = \gamma v\tau = 14{,}7\,\mathrm{km}$.

26. $E = \frac{(m_\pi^2+m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$, $T = \frac{(m_\pi-m_\mu)^2c^2}{2m_\pi}$.

27. $mc^2\,\frac{1+(\mu/m)^2}{2\mu/m}$.

28. $\frac{(8M^2-m^2)c^2}{2M}$.

29. $7Mc^2$.

30. $m\sqrt{1-\frac{2h\nu}{mc^2}}$.

31. $\left(\frac{\gamma+\frac{3}{4}\gamma^2}{2+3\gamma+\frac{5}{4}\gamma^2}\right)c$.

32.

33.

34.

35.

36. b) $R = 1{,}11\times10^8\,\mathrm{m}$ y $M = 5{,}2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$, i) $hf = \Delta E\left(1-\frac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$, ii) para $\frac{\Delta f}{f}$ atómico y gravitacional respectivamente $5{,}44\times10^{-12} \ll 10^{-5}$.

37. $\alpha_{\text{mín}} = \arccos\frac{k-2}{k+2} \approx 109{,}5^\circ$.