TARTU ÜLIKOOL

Tartu Ülikooli Teaduskool

Veaarvutus ja määramatus

Urmo Visk

Tartu 2005

Sisukord

1 Tähistused

Sümbolid on toodud tähestiku järjekorras. Kreeka tähed on järjestatud vastavalt eestikeelsele hääldusele. Tähiste alaindeksid sõltuvad kontekstist, ülaindeksid mitte.

$2{,}71\underline{8}28$	viimane oluline tüvenumber; alakriipsu pole märgitud, kui parempoolseim number on viimane oluline tüvenumber;
δ	suhteline viga;
δ^k	korduvmõõtmise suhteline viga;
Δ	absoluutne viga; sümbolile võib järgneda füüsikalise suuruse tähis;
Δ^k	korduvmõõtmise absoluutne viga;
n	mõõtmiste arv;
∂	osatuletis; tuletis mitme muutujaga funktsioonist üle ühe muutuja;
σ	standardhälve;
t	Studenti kordaja;
u^A	A-tüüpi määramatus; väike u tähistab määramatust 68 $\%$ usaldusnivool;
u^B	B-tüüpi määramatus;
u^C	liitmääramatus;
U	laiendmääramatus; suur U tähistab määramatust 95 $\%$ usaldusnivool; ülaindeksid tähistavad sama mis 68 $\%$ usaldusnivoo korral;
$\bar{x}$	aritmeetiline keskmine; ülakriips füüsikalise suuruse tähise kohal märgib selle suuruse keskmist
x^t	tõeline väärtus

2 Sissejuhatus

Eksperimendis ei piisa tulemuseks üksnes vastusest. Kui katses mõõdeti keha kukkumise kiirust, siis pole üksnes arvuline vastus kuigi usaldusväärne, sest raskuskiirenduse väärtust ümardati ja korra jäi eksperimendis stopper hoopiski seisma. Lisaks vastuse arvväärtusele on eksperimendi tulemuseks ka viga või määramatus. Need iseloomustavad kõiki katses tehtud lihtsustusi, ümardamisi ja apsakaid. Veata vastuse korral pole võimalik hinnata vastuse täpsust. Äkki mõõdeti voolutugevust valel skaalal ja ampermeetri osuti vaevu reageeris voolule? Või oli katse teostatud nii kehvade mõõteriistadega, et viga on vastuse väärtusest suurem? Sarnaste küsimuste vältimiseks lisataksegi eksperimendi tulemusele määramatus või viga.

Enamasti teostatakse katsetes mitu mõõtmist. Ühelt poolt suureneb vastuse täpsus ja teisest küljest vähendatakse nii kogemata tehtud eksimuste mõju. Korduvmõõtmiste tulemused võivad üksteisest erineda ja neist ükski pole teistest parem. Katse kõige täpsemaks vastuseks on kõigi mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine (tähistusi vaata peatükist "‘1 Tähistused"’.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1}$$

3 Viga

Viga on mõõtmistulemuse ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse erinevus. Tõeline väärtus on füüsikalise suuruse ideaalselt täpne väärtus. Kahjuks jääb selle leidmine vaid unelmaks. Ükski mõõtmistulemus pole täpne ja igal mõõtmisel on alati tehtud viga. Vigade suuruse hindamine on eksperimendis sama tähtis kui füüsikalise suuruse enda mõõtmine, mõnikord tähtsamgi (näiteks metroloogias). Vigade arvutamine on töömahukam kui katsetulemuse leidmine, kuid see-eest lihtne toiming.

Enamasti mõistetakse vea all põhiviga. See on suurim erinevus eksperimendis leitud väärtuse ja tõelise väärtuse vahel. Edaspidi on ka siin vea all mõeldud põhiviga. Kui 1 kg kaalupommi (põhi)viga on 1 g, siis ei või vihi mass erineda massist 1 kg rohkem kui 1 g võrra. Vea tähistamiseks lisatakse füüsikalise suuruse tähise ette täht Δ. Pikkuse l viga on niisiis Δl. Mõõtetulemus võib tõelisest väärtusest olla nii suurem kui ka väiksem, mistõttu võib viga olla nii positiivne kui ka negatiivne. Seepärast on vea ees märk "„$\pm$"".

Mõõtetulemust on korrektne kirjutada koos veaga. Kui mikromeetriga mõõdetud lõigu pikkus on 15,0 μm ja viga on 0,2 μm, siis kirjutatakse mõõtetulemus järgmiselt:

$$l = (15{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} = (15{,}0 \pm 0{,}2)\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Ühik μm (või 10^{-6} m) on toodud sulgudest välja, sest pikkuse ja selle vea ühikud on ühesugused (sulge võib ka avada, korrutades ühikuga läbi mõõtetulemuse ja selle vea, kuid nii tavaliselt siiski ei tehta).

Vastuses võib tüvenumbreid olla maksimaalselt niipalju, kui väikseima tüvenumbrite arvuga algandmetes. Seda reeglit tuleb aga eirata, kui mõni suurus on antud väiksema tüvenumbrite arvuga kui kõik teised. Näiteks on kõik andmed esitatud kolme - nelja tüvenumbriga ning üks füüsikaline suurus vaid kahega. Taolistel juhtudel on mõistlik esitada vastus siiski kolme tüvenumbriga.

Suhteline viga on vea ja mõõtetulemuse jagatis.

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} \tag{2}$$

Suhteline viga näitab, kui suure osa mõõtetulemusest moodustab viga. Kui suhteline viga on 0,01 , siis on viga 1% mõõtetulemusest. Suhteline viga on alati ühikuta suurus. Rõhutamaks suhtelise vea δ ja vea Δ erinevust, nimetatakse viimast absoluutseks veaks.

3.1 Mõõteriistade vead

- **Suhtviga**

$$\delta_s = \frac{\Delta x}{x} \tag{3}$$

Suhtviga on mõõteriista suhteline viga. Kui voolutugevus eksperimendis on 0,5 A ja ampermeetri suhtviga on 5, siis on voolutugevuse absoluutne viga 0,5 A $\cdot$ 5 % = $= 0,025$ A. Mõõteriistale kirjutatud suhtviga on ümbritsetud ringiga.

- **Taandviga**

$$\delta_t = \frac{\Delta x}{x_{norm}} \tag{4}$$

Taandviga näitab, kui suure osa moodustab viga normeerivast väärtusest x_{norm}. Enamasti on selleks mõõteriista skaala maksimaalne väärtus. Kui pinget mõõdetakse voltmeetri skaalal (0 - 300) V ja seadme taandviga on 1, siis on kõigi sellel skaalal mõõdetud pingete viga 300 V $\cdot$ 1 % = 3 V. Absoluutne viga on 3 V siis, kui voltmeetri näit on 4 V ja ka siis kui näit on 287 V. Mõõteriistale kirjutatud taandviga pole ümbritsetud ringiga.

- **Digitaalse mõõteriista viga**

$$\Delta_d = \pm(0{,}5\% \text{ reading} + 2 \text{ digits}) \tag{5}$$

See oli näide valemist absoluutse vea leidmiseks digitaalse mõõteriista korral. Tegelikkuses võivad arvud erineda valemis tooduist. Valemis tähistab *rdg* mõõteriista näitu (*reading* tähendab inglise keeles näitu) ja *digits* (inglise keeles numbrid) mõõteriista ekraanil näidatavate numbrite väikseimait järku (näiteks sajalised). Sõnade *reading* ja *digits* asemel kasutatakse ka nende lühendeid (näiteks *rdg* ja *dgts*).

Vaatlen näitena oommeetrit, mille vea saab leida valemiga (5). Kui oommeetriga mõõdetakse takistust piirkonnal $(0-2000)\,\Omega$ ja oommeetri ekraanil on näit 1578, siis on väikseim ekraanil näidatav järk ühelised. Seega digits=2 Ω ja reading=1578 Ω. Takistuse absoluutne viga Δ on

$$\Delta = 0{,}5\,\% \cdot 1578\,\Omega + 2\,\Omega = 10\,\Omega$$

3.2 Tehted vigadega

Eksperimendis piisab harva vaid mõõdetud suuruse väärtusest, enamasti tuleb katseandmete põhjal midagi arvutada (vähemalt Skinneri konstandi võiks leida). Järgnevalt on selgitatud, kuidas muutuvad arvutustes sõltuvad vead. Sõltuvatel vigadel on vähemalt osa tekkepõhjusest ühine (näiteks on kasutatud sama mõõteriista; kõik eksperimendid tehti allpool mõõteriista tööks ettenähtud temperatuuri jne).

- **Liitmine ja lahutamine**

Olgu muutuja K viga ΔK ja muutuja L viga ΔL. Summa $Y = K + L$ väärtus koos veaga on sel juhul:

$$\begin{aligned} Y + \Delta Y &= (K \pm \Delta K) + (L \pm \Delta L) = (K + L) \pm (\Delta K + \Delta L), \text{kus} \\ Y &= K + L \\ \Delta Y &= \pm(\Delta K + \Delta L) \end{aligned} \tag{6}$$

Summa viga on liidetavate absoluutsete vigade summa. Kui liidetavaid on üle kahe, tuleb liita ka teiste liidetavate absoluutsed vead.

Oleks loogiline, kui lahutamistehte $Z = K - L$ viga oleks $\Delta Z = \pm(\Delta K - \Delta L)$. Tegelikkuses tuleb veaarvutuses eeldada kõige hullemat: vead muudavad tulemuse alati ebatäpsemaks, suurendades vastuse viga. Seepärast tuleb vigade märgid alati valida nii, et viga tuleks võimalikult suur (vea ülehindamine on väike viga, mõnikord kasutatakse seda ebatäpse tulemuse varjamiseks). Nii on ka lahutamistehte viga $\Delta Z = \pm(\Delta K + \Delta L)$.

- **Korrutamine**

  Leian korrutise $Y = (K \pm \Delta K) \cdot (L \pm \Delta L)$ koos veaga.

$$\begin{aligned} Y &= (K \pm \Delta K) \cdot (L \pm \Delta L) = KL + K\Delta L + L\Delta K + \Delta K\Delta L, \text{kus} \\ Y &= K + L \\ \Delta Y &= K\Delta L + L\Delta K + \Delta K\Delta L \approx K\Delta L + L\Delta K \end{aligned} \tag{7}$$

  Üldjuhul on vead ΔK ja ΔK palju väiksemad kui K ja L, mistõttu on liige $\Delta K\Delta L$ palju väiksem teistest liidetavatest valemis (7) ja selle võib võrdsustada nulliga. Leian korrutise suhtelise vea $\delta_\times$.

$$\delta_\times = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{K\Delta L + L\Delta K}{KL} = \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta L}{L} = \delta_K + \delta_L \tag{8}$$

  Korrutise suhteline viga on tegurite suhteliste vigade summa. Kui tegureid on üle kahe, siis tuleb summeerida kõigi tegurite suhtelised vead.

  Jagamistehte suhteline viga on jagaja ja jagatava suhteliste vigade summa. Põhjus on sama mis lahutamise juures: eeldame halvimat.

- **Astendamine ja juurimine**

  Kui muutuja K võetakse astmele n, siis korrutatakse muutujat K iseendaga n korda. Seega tuleb astendamise suhtelise vea leidmiseks vastavalt valemile (8) liita muutuja K suhtelist viga n korda ehk korrutada K suhtelist viga astendajaga n. Astendamise suhteline viga on

$$\delta_{\wedge} = n\frac{\Delta K}{K} = n \cdot \delta_K \tag{9}$$

  Kuna $\sqrt[n]{A} = A^{1/n}$, siis on juurimistehte suhteline viga

$$\delta_{\sqrt{}} = \frac{1}{n}\frac{\Delta K}{K} = \frac{\delta_K}{n} \tag{10}$$

- **Keerulisemad funktsioonid**

  Ka keerulisemate funktsioonide jaoks saab tuletada valemid, mis kirjeldavad vea muutust funktsiooni rakendamisel. Kuna funktsioone on aga palju, siis tuleks ka palju uusi valemeid. Lihtsam on ära õppida algoritm, mille abil saab leida vea iga funktsiooni jaoks.

  Olgu funktsiooniks $y = \log x$, argumendi väärtuseks $x = 124$ ja veaks $\Delta x = 5$. Logaritmfunktsiooni väärtus on $y = \log 124 = 2{,}09$. Nüüd leian logaritmfunktsiooni väärtused $x + \Delta x$ ja $x - \Delta x$ korral.

$$y_{max} = \log(124 + 5) = 2{,}11 \quad y_{min} = \log(124 - 5) = 2{,}08$$

  Leian, kumb on suurem: kas erinevus y ja y_{max} $(2{,}11 - 2{,}09 = 0{,}02)$ või y ja y_{min} vahel $(|2{,}08 - 2{,}09| = 0{,}01)$. Suurim erinevus ongi y viga: $\Delta y = \pm 0{,}02$. $y = 2{,}09 \pm 0{,}02$

Sõltumatud vead

Sõltumatute vigade korral on vead tekkinud üksteisest sõltumatult, juhuslikult. Taolised vead muudavad ka tulemust juhuslikult: üks viga teeb vastust suuremaks, aga teine väiksemaks. Kokkuvõttes vead kompenseerivad üksteist osaliselt ning vastuse viga on väiksem kui sõltuvate vigade korral.

Vigade leidmine sõltumatute vigade korral on sarnane eelpoolkirjutatuga: kõikjal tuleb vaid summa asendada ruutjuurega ruutude summast (ruutsumma). Tulemuse viga on sõltumatute vigade korral väiksem kui sõltuvate vigade korral, sest ruutsumma on väiksem või võrdne tavalisest summast.

Sõltumatute suuruste summa ja vahe viga on

$$\Delta = \sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2} \tag{11}$$

Sõltumatute suuruste korrutise ja jagatise suhteline viga on

$$\delta_\times = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2} = \sqrt{{\delta_A}^2 + {\delta_B}^2} \tag{12}$$

Astendamisel ei eksisteeri sõltumatut viga. Astendamine on arvu korrutamine iseendaga, mistõttu on korrutatavatel arvudel ühised vead ja astendamisel saab olla vaid sõltuv viga.

Korduvmõõtmised

Korduvmõõtmiste tulemuseks on mõõdetud suuruse aritmeetiline keskmine (1). Korduvad mõõtmised on sõltumatud. Seega on aritmeetilise keskmise viga üksikute mõõtmiste vigade ruutsumma. Viimane on aga väiksem vigade summast, võimaldades eksperimendi kordamisega vähendada tulemuse viga. Kuna valemid on selgitusest asjalikumad, siis toon ära ka tõestuse.

Olgu tehtud n mõõtmist ja saadud tulemused $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Kõigi mõõtmiste suhteline viga olgu p. Absoluutsed vead on siis $px_1, px_2 \ldots, px_n$. Mõõdetud tulemuste aritmeetiline keskmine on $\bar{x} = \sum x/n$, mille vea leian valemi (11) järgi.

$$\Delta_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sqrt{(px_1)^2 + (px_2)^2 + \ldots + (px_n)^2} = \frac{1}{n}p\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Kuna kõik katses mõõdetud tulemused on ligikaudu võrdsed aritmeetilise keskmisega, siis asendan üksikud tulemused $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aritmeetilise keskmisega $\bar{x}$.

$$\Delta_{\bar{x}} = \frac{1}{n}p\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \frac{1}{n}p\sqrt{n\bar{x}^2} = \frac{p\bar{x}}{\sqrt{n}}$$

Leian aritmeetilise keskmise suhtelise vea.

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\Delta_{\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}}\frac{p}{\sqrt{n}} = \frac{p}{\sqrt{n}} \tag{13}$$

Mida rohkem mõõtmisi teha, seda väiksemaks muutub viga. Kunagi pole mõtet teha ühte mõõtmist, sest juba kahe mõõtmisega väheneb viga 1,4 korda. Kahjuks pole võimalik korduvmõõtmistega viga olematuks muuta: vaja oleks lõpmatult palju katseid.

3.3 Näide

Katses mõõdeti kuuli veeremise kiirust laual, mõõtes vahemaa, mille kuul läbis, ja selle läbimiseks kulunud aja. Teepikkust mõõdeti sellest lühema joonlauaga, nii et pikkust tuli mõõta kahes osas: l_1 ja l_2. Joonlaua absoluutne viga oli 0,1 cm. Aega mõõdeti stopperiga, mille absoluutne viga oli 0,03 s. Katsetulemused on toodud järgnevas tabelis.

	Tulemused					Mõõtmisi	Keskmine
l_1	30,0 cm	30,0 cm	-	-	-	2	$30,\underline{0}0$ cm
l_2	25,2 cm	25,0 cm	25,3 cm	25,2 cm	-	4	$25,\underline{1}8$ cm
t	5,54 s	5,48 s	5,68 s	5,50 s	5,59 s	5	$5,5\underline{5}8s$

Ülesande lahendus

Kuuli keskmine kiirus on

$$v = \frac{l_1 + l_2}{t} = 9{,}9\underline{2}7 \text{ cm/s} \approx 9{,}93 \text{ cm/s}.$$

Vea leidmine

	Δ (viga)	Δ^k (korduvmõõtmise viga)	δ^k (korduvmõõtmise suhteline viga)
l_1	0,1 cm	$0{,}1 \text{ cm}/\sqrt{2} = 0{,}0\underline{7}1 \text{ cm}$	$0{,}071 \text{ cm}/30{,}00 \text{ cm} = 0{,}\underline{2}0\ \%$
l_2	0,1 cm	$0{,}1 \text{ cm}/\sqrt{4} = 0{,}0\underline{5} \text{ cm}$	$0{,}05 \text{ cm}\ /25{,}18 \text{ cm} = 0{,}\underline{2}8\ \%$
t	0,03 s	$0{,}03 \text{ s}\ /\sqrt{5} = 0{,}0\underline{1}3 \text{ s}$	$0{,}013 \text{ s}\ \ /5{,}558 \text{ s}\ \ = 0{,}\underline{2}4\ \%$

Teepikkuse kahte osa mõõdeti sama joonlauaga, mistõttu on osade mõõtmisel tehtud viga sõltuv ja kogu vahemaa vea leidmiseks tuleb kasutada valemit (6).

$$\Delta(l) = \Delta^k(l_1) + \Delta^k(l_2) = 0{,}071 \text{ cm} + 0{,}05 \text{ cm} = 0{,}\underline{1}21 \text{ cm}$$

Kogu teepikkuse suhteline viga on

$$\delta(l) = 0{,}121 \text{ cm}/(30{,}00 \text{ cm} + 25{,}18 \text{ cm}) = 0{,}\underline{2}2\ \%.$$

Leian kiiruse vea. Aja mõõtmisel tehtud viga on sõltumatu pikkuse veast, mistõttu on jagatise viga leitav valemist (12).

$$\delta_v = \sqrt{\delta(l)^2 + \delta^k(t)^2} = 0{,}\underline{3}3\ \%$$

Kiiruse absoluutne viga on

$$\delta_v \cdot v = 0{,}0\underline{3}2 \text{ cm/s} \approx 0{,}03 \text{ cm/s}.$$

Vastus

Kuuli keskmine kiirus oli $(9{,}93 \pm 0{,}03)$ cm/s.

3.4 Skinneri konstandi viga

Kui korrutada kõik lähteandmed omavahel ja seejärel Skinneri konstandiga, siis on tulemuseks õige vastus. Tegu on väga lihtsa ja meeldiva lahendusmeetodiga. Korrektses vastus tuleb esitada ka viga, mistõttu on väga oluline Skinneri konstandi vea teadmine.

Ülesannete lahendamisel pole teada, kas leitud vastus on ka õige. Seega peab Skinneri konstandi viga olema selline, et ülesande lahendamisel leitud vastus oleks vea piires õige vastus. Kuna õige vastus võib asuda kogu füüsikalise suuruse määramispiirkonnas (tihti on selleks $-\infty \ldots \infty$), siis peab Skinneri konstandi viga olema lõpmatult suur.

Toon ära ka matemaatilise tõestuse, kus $\prod x$ tähistab kõigi algandmete omavahelist korrutist, C Skinneri konstanti ja y vastuse määramispiirkonda.

$$\begin{aligned}
(C \pm \Delta C) &\cdot \prod x = y \\
C \pm \Delta C &= \frac{y}{\prod x} \\
\Delta C &= \lim_{y \to \infty} \frac{y}{\prod x} \pm C = \infty \pm C = \infty
\end{aligned}$$

4 Määramatus

Lisaks veale kasutatakse mõõtetulemuse täpsuse iseloomustamiseks ka määramatust. Viimane neist kahest on eelistatum, kuid nõuab palju enam arvutusi.

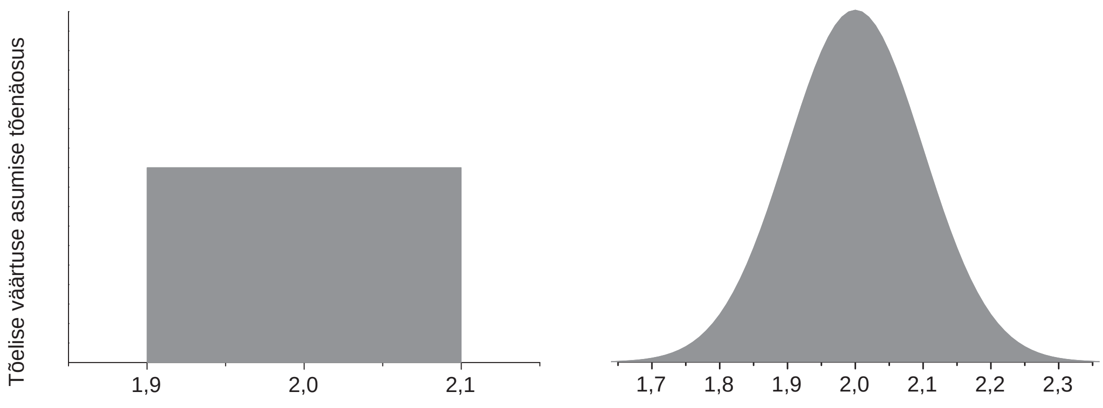
Määramatus kirjutatakse arvulise vastuse järele sulgudesse, nii et vastuse ja määramatuse parempoolseimad numbrid (mitte tüvenumbrid) on sama järguga. Järelikult peab määramatus olema esitatud samasuguse täpsusega kui vastus ise. Kui määramatuses peaks olema koma, siis seda ei märgita. Näiteks $I = 11{,}0(12)$ A korral on voolutugevus 11,0 A ja selle määramatus on 1,2 A. Määramatus tuleb esitada alati koos usaldusnivooga (vaata peatükki "'4.4 Studenti kordajad"').

Vastuses võib tüvenumbreid olla maksimaalselt niipalju, kui väikseima tüvenumbrite arvuga algandmetes. Seda reeglit tuleb aga eirata, kui mõni suurus on antud väiksema tüvenumbrite arvuga kui kõik teised. Näiteks on kõik andmed esitatud kolme - nelja tüvenumbriga ning üks füüsikaline suurus vaid kahega. Taolistel juhtudel on mõistlik esitada vastus siiski kolme tüvenumbriga.

4.1 Määramatuse erinevus veast

Siinkohal on mõeldud jällegi põhiviga ehk mõõtetulemuse maksimaalset erinevust tõelisest väärtusest. Vea korral on mõõtetulemus alati vea piires võrdne tõelise tulemusega. Kui voolutugevus on $(2 \pm 0{,}1)$ A, siis on voolutugevuse tõeline väärtus täiesti kindlalt vahemikus $(1{,}9 \ldots 2{,}1)$ A.

Määramatus väljendab tõelise väärtuse tõenäoliseimat asukohta. Kui mõõdetud voolutugevus on 2 A määramatusega 0,1 A, siis tõeline voolutugevus on vahemikus $(1{,}9 \ldots 2{,}1)$ A tõenäosusega 68% ja vahemikus $(1{,}8 \ldots 2{,}2)$ A tõenäosusega 95% ... Saamaks 100% kindlust, et mõõtetulemus on määramatuse piires tõeline tulemus, tuleks vahemikuks anda $(-\infty \ldots \infty)$ A. Määramatus ei võimalda kindlalt öelda, et mõõdetud tulemus on tõeline.



Joonis 1: Vasakul on kujutatud voolutugevuse tõelise väärtuse võimalikke asukohti vea ja paremal määramatuse korral. Mida tõenäolisem on tõelise väärtuse asumine mingis punktis, seda kõrgem on selles punktis värvitud ala.

Viga	Määramatus
Viga väljendab mõõtmisel tehtud eksimust.	Määramatus väljendab kahtlust mõõtetulemuse õigsusesse.
Tõeline tulemus võib olla kõikjal vahemikus $(1{,}9 \ldots 2{,}1)$ A võrdse tõenäosusega. Tõeline tulemus võib olla niihästi 1,92 A, 2,01 A kui ka 2,095 A.	Tõeline tulemus on tõenäoliseimalt 2 A, teiste voolutugevuse väärtuste tõenäosused kahanevad, kui eemalduda keskmisest voolutugevusest.

4.2 A-tüüpi määramatus

Teisiti kutsutakse seda ka statistiliseks määramatuseks. A-tüüpi määramatus kirjeldab üksikute katsetulemuste hajusust. Kui katsetulemused on lähedased, siis on statistiline määramatus väike, sest tulemuste erinevused on väikesed. Tulemuste korral aga, mis erinevad üksteisest palju, on A-tüüpi määramatus suur. A-tüüpi määramatuse analoog vea korral on aritmeetilise keskmise viga, kuid päris sama asjaga tegu pole.

Katsepunktide hajusust iseloomustatakse standardhälbega σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - x^t)^2 + (x_2 - x^t)^2 + \ldots + (x_i - x^t)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x^t)^2}{n-1}} \tag{14}$$

Standardhälve on katsetulemuste keskmine ruuterinevus tõelisest väärtusest: katsetulemuste ja tõelise väärtuse erinevuste ruudud liidetakse ning summa jagatakse $(n-1)$-ga (kuna standardhälbe leidmiseks on vaja vähemalt kahte katsetulemust, siis loetakse efektiivseks katsetulemuste hulgaks $n-1$ katset). Selleks, et standardhälve oleks sama ühikuga mis katses mõõdetud suurus, võetakse ruutude summast ruutjuur.

Reaalses eksperimendis pole ju tõeline väärtus x^t teada, nii et valemist (14) pole kasu. Küll aga on kasu seosest valemis (14) leitud standardhälbe ja aritmeetilise keskmise suhtes leitud standardhälbe $\sigma_{\bar{x}}$ vahel(valemis (14) on siis x^t asemel $\bar{x}$):

$$\sigma = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{n}} \tag{15}$$

Valemist (15) järeldub, et korduskatsetega väheneb tõelise väärtuse suhtes leitud standardhälve ehk määramatus. Ka vigade korral vähendas katsete kordamine eksperimendi viga.

Katseandmete hajuvuse leidmiseks tõelise väärtuse ümber polegi tõelist väärtust ennast teada vaja, piisab aritmeetilise keskmise suhtes leitud dispersioonist $\sigma_{\bar{x}}$ ja valemist (15).

$$\sigma = u^A = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{16}$$

Leitud valemiga hinnatakse eksperimendis A-tüüpi määramatust u^A ehk katsepunktide hajuvust. Samas saab valemiga (16) leida katsetulemuste standardhälbe tõelise väärtuse suhtes. Kui tahetakse rõhutada, et valemiga (16) leitakse A-tüüpi määramatust, siis kasutatakse tähist u^A. Rõhutamaks standardhälbe arvutamist, kasutatakse tähist σ. Tulemus on sama, kuid välimus erinev.

4.3 B-tüüpi määramatus

Antud määramatust hinnatakse kogemuslikult ja see iseloomustab kahtlust mõõteriista näidu õigsusse. Sisuliselt on tegu mõõteriistade absoluutsete vigade teisendamisega määramatusteks. Ei saa ju leida tulemuse määramatust, kui katseseeriat iseloomustab määramatus ja üksiku katse tulemust viga.

B-tüüpi määramatus leitakse valemiga

$$u^B = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \tag{17}$$

4.4 Studenti kordajad

Joonise 1 paremal poolel on näha, et tõeline väärtus võrdub tõenäoliseimalt katsetulemuste keskmisega, kuid väiksema tõenäosusega võib võrduda ka mõne teise väärtusega. Mida suurem on määramatus, seda kõrgem on tõenäosus, et eksperimendi tulemus on määramatuse piires tõeline väärtus. Valemite (16) ja (15) põhjal leitud määramatused on 68 % usaldusnivool ehk eksperimendi tulemus on 68 % tõenäolisusega tõeline väärtus. Kui pole märgitud teistsugust usaldusnivood, siis on selleks vaikimisi 68 %.

Tulemus 68 % usaldusnivool pole just eriti usaldusväärne: 32 % tõenäosusega ei ühti vastus tõelise väärtusega. Enim kasutatakse 95 % usaldusnivood; 5 % eksimus on piisavalt väike selleleppimaks. Kui määramatus on esitatud suuremal usaldusnivool kui 68 %, siis nimetatakse määramatust laiendmääramatuseks ja selle tähisena kasutatakse U. Suuremat usaldusnivood tähistab ka suurem täht.

Kõrgema usaldusnivoo saamiseks tuleb määramatust suurendada, korrutades seda sobiva konstandiga. Suurem määramatus hõlmab rohkem joonise 1 paremal poolel toodud kõverast, tõstes nii tõenäosust, et tõeline väärtus ühtib määramatuse piires katsetulemusega. B-tüüpi määramatust tuleb korrutada arvuga 2, et saada määramatust 95 % usaldusnivool. Statistilise määramatusega 95 % usaldusnivool on lugu aga keerulisem. Nimelt tuleb A-tüüpi määramatust korrutada Studenti kordajaga t, mille väärtus sõltub korduskatsete arvust.

Tabel 1: Studenti kordajad t 95 % usaldusnivool

n (katsete arv)	2	4	6	11	∞
t (Studenti kordaja)	12,7	3,2	2,6	2,2	2,0

Korduskatseid tuleb kindlasti teha üle kahe, sest Studenti kordaja kahe katse jaoks on teistega võrreldes kosmiliselt suur. Nelja ja enama eksperimendi jaoks kehtivad Studenti kordajad on soovitav meelde jätta (kordajate tüvenumbrid saab meelde jätmiseks kirjutada arvuna 3262).

4.5 Liitmääramatus

Igal eksperimendis mõõdetud suurusel on nii A- kui ka B-tüüpi määramatus. Esimene on leitud korduvkatsetest ja teine mõõteriista põhivea alusel.

Mõlemad määramatused saab teisendada üheks liitmääramatuseks u^C (või U^C). A- ja B-tüüpi määramatus on teineteisest sõltumatud, mistõttu toimub nende liitmine analoogiliselt sõltumatute vigade summeerimisele, kus liideti vigade ruudud.

$$u^C = \sqrt{(u^A)^2 + (u^B)^2} \text{ või} \tag{18}$$

$$U^C = \sqrt{(U^A)^2 + (U^B)^2} \tag{19}$$

Kui üks määramatus erineb teisest üle kümne korra, siis võib väiksema määramatuse jätta arvestamata. Kõlab ülekohtuselt, kuid väiksema määramatuse panus liitmääramatusse on siis tõesti väike: $\sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101} = 10{,}05$, mis erineb suuremast määramatusest 0,5 % võrra.

4.6 Tehted määramatusega

Iga vastuse leidmiseks tehtava arvutusega peab muutuma ka määramatus (kasvõi seepärast, et muutub vastuse ühik). Vigade teisendamiseks erinevates tehetes oli mitu algoritmi, kuid määramatuse teisendamiseks vaid üks. Aga see-eest milline.

Olgu katses mõõdetud füüsikaliste suuruste tähised $d, e, f, \ldots, z$ ja vastuse tähis Y. Viimase laiendmääramatus on siis U_Y ja algandmete laiendmääramatused on $U_d, U_e, U_f, \ldots, U_z$. Vastuse määramatus leitakse valemist:

$$U_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial d}\right)^2 {U_d}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial e}\right)^2 {U_e}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2 {U_z}^2}. \tag{20}$$

Sümbol ∂ tähistab osatuletist ehk tuletist üle ühe muutuja, kui funktsioonil on mitu muutujat. Valemis (20) ei pea kasutama laiendmääramatust. Sel juhul tuleb vastuse määramatust u_Y korrutada katteteguri või Studenti kordajaga. Viimase väärtus sõltub aga katsete arvust, mistõttu saab valemis (20) määramatusi $u_d, u_e, u_f, \ldots, u_z$ kasutada vaid siis, kui kõiki füüsikalisi suurusi on mõõdetud sama arv kordi.

Kui soovime leida takisti takistust valemi $R = U/I$ järgi, siis on takistuse laiendmääramatus

$$U_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 {U_U}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 {U_e}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 {U_U}^2 + \left(\frac{-U}{I^2}\right)^2 {U_I}^2}\ .$$

4.7 Näide

Katses tuli leida küttespiraalil eralduv võimsus, kasutades oom- ja ampermeetrit. Ampermeetri taandviga oli 5 ja mõõtmisi teostati skaalal (0 - 2,5) A. Oommeeter oli digitaalne ja selle absoluutne viga avaldus valemiga $\Delta = \pm(0,1\% \text{ reading} + 1 \text{ digit})$. Katsete tulemused on toodud järgnevas tabelis:

I	$\Delta I = \lvert I - \bar{I} \rvert$	$\Delta I^2 \cdot 10^3$	R	$\Delta R = \lvert R - \bar{R} \rvert$	ΔR^2
2,20 A	0,0317 A	1,0$\underline{0}$3 A^2	101 Ω	0,250 Ω	0,0625 Ω^2
2,25 A	0,0183 A	0,336 A^2	100 Ω	0,750 Ω	0,563 Ω^2
2,28 A	0,0483 A	2,3$\underline{3}$6 A^2	102 Ω	$1,2\underline{5}0$ Ω	1,5$\underline{6}$3 Ω^2
2,18 A	0,0517 A	2,6$\underline{6}$9 A^2	101 Ω	0,750 Ω	0,563 Ω^2
2,27 A	0,0383 A	1,4$\underline{6}$9 A^2			
2,21 A	0,0217 A	0,469 A^2			

$$\bar{I} = 2{,}2\underline{3}2\ \mathrm{A} \quad \sum \Delta I^2 = 8{,}2\underline{8}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}^2 \ \text{ ja } \ \bar{R} = 10\underline{0}{,}8\ \Omega \quad \sum \Delta R^2 = 2{,}75\Omega^2$$

Lahendus

Küttespiraali võimsus oli $P = I^2 R = (2{,}2\underline{3}2\ \mathrm{A})^2 \cdot 10\underline{0}{,}8\ \Omega = 50\underline{1}{,}77\ \mathrm{W} \approx 502\ \mathrm{W}$.

Määramatuse leidmine

Leian voolutugevuse määramatuse. A-tüüpi määramatuse leian valemist (16).

$$u^A{}_I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum \Delta I^2}{n(n-1)}} = 0{,}0166\ \mathrm{A}$$

Ampermeetri B-tüüpi määramatus on

$$u^B{}_I = \frac{0{,}05 \cdot 2{,}5\ \mathrm{A}}{\sqrt{3}} = 0{,}0722\ \mathrm{A}.$$

Laiendmääramatus A-tüüpi määramatuse jaoks on $U^A{}_I = t \cdot u^A{}_I = 0{,}0432$ A, kuna Studenti kordaja kuue katse korral on 2,6. Laiendmääramatus B-tüüpi määramatuse jaoks on $U^B{}_I = 2 \cdot u^B{}_I = 0{,}144$ A. Voolutugevuse liitmääramatus on

$$U^C{}_I = \sqrt{(U^A{}_I)^2 + (U^B{}_I)^2} = 0{,}151\ \mathrm{A}.$$

Leian takistuse määramatuse. A-tüüpi määramatus on

$$u^A{}_R = \sqrt{\frac{\sum \Delta R^2}{n(n-1)}} = 0{,}479\ \Omega.$$

Takistuse B-tüüpi määramatus on

$$u^B{}_R = \frac{0,1\ \%\bar{I} + 1\ \Omega}{\sqrt{3}} = 0{,}636\ \Omega.$$

Laiendmääramatus A-tüüpi määramatuse jaoks on ${U^A}_R = t \cdot {u^A}_R = 1{,}532\,\Omega$ (Studenti kordaja on nelja katse jaoks 3,2). Laiendmääramatus B-tüüpi määramatuse jaoks on ${U^B}_R = 2 \cdot {u^B}_R = 1{,}271\ \Omega$. Takistuse liitmääramatus on

$$ {U^C}_R = \sqrt{({U^A}_R)^2 + ({U^B}_R)^2} = 1{,}99\,\Omega. $$

Küttespiraali võimsuse määramatuse leian valemist (20), teades et

$$ \frac{\partial(I^2R)}{\partial I} = 2IR \text{ ja } \frac{\partial(I^2R)}{\partial R} = I^2 $$

$$ {U^C}_P = \sqrt{(2IR)^2 \cdot ({U^C}_I)^2 + (I^2)^2 \cdot ({U^C}_R)^2} = 68{,}62\ \mathrm{W} \approx 69\ \mathrm{W} $$

Vastus

Küttespiraali võimsus on 95 % usaldusnivool 502(69) W.

4.8 Märgitest

Märgitest on eeskiri määramatuse hindamiseks standardhälvet ja B-tüüpi määramatust arvutamata. Tulemus saadakse väiksema vaevaga, kuid leitud määramatus on tegelikust kuni 30 % suurem.

Esmalt järjestatakse eksperimendis mõõdetud katsetulemused kasvamise järjekorras. Tabelist 2 leitakse mõõtmiste arvule n vastav konstant k. Nüüd võetakse järjestatud tulemuste mõlemast äärest k-s väärtus. Väiksemat tulemust tähistatakse x_- ja suuremat x_+. Kui on tehtud üle kuue katse, siis ei kasutata äärmisi tulemusi, kuna nende mõõtmisel on toimunud ühes suunas enim eksimusi.

Tabel 2: Märgitesti kordajad k, kui usaldusnivoo on 95 %

n	6	9	12	15	17
k	1	2	3	4	5

Katses mõõdetud suuruse väärtus on

$$ x = \frac{x_+ + x_-}{2}\,. \tag{21} $$

Eksperimendis leitud suuruse määramatus 68 % usaldusnivool on

$$ u^C = \frac{x_+ - x_-}{2}\,. \tag{22} $$

4.9 Märgitesti näide

Leian voolutugevuse määramatuse eelmise näite andmete põhjal, kus voolutugevuse väärtused olid:

$$2{,}20\ \mathrm{A} \quad 2{,}25\ \mathrm{A} \quad 2{,}28\ \mathrm{A} \quad 2{,}18\ \mathrm{A} \quad 2{,}27\ \mathrm{A} \quad 2{,}21\ \mathrm{A}$$

Lahendus

Voolutugevuse väärtused järjestatult on:

$$2{,}18\ \mathrm{A} \quad 2{,}20\ \mathrm{A} \quad 2{,}21\ \mathrm{A} \quad 2{,}27\ \mathrm{A} \quad 2{,}27\ \mathrm{A} \quad 2{,}28\ \mathrm{A}$$

Kuna on tehtud on kuus mõõtmist, siis $k = 1$ ja $I_- = 2{,}18$ A, $I_+ = 2{,}28$ A. Voolutugevus on

$$I = \frac{2{,}18\ \mathrm{A} + 2{,}28\ \mathrm{A}}{2} = 2{,}23\ \mathrm{A}.$$

Määramatuse leidmine

Voolutugevuse määramatus 68 % usaldusnivool on

$$u^C{}_I = \frac{2{,}18\ \mathrm{A} - 2{,}28\ \mathrm{A}}{2} = 0{,}05\ \mathrm{A}.$$

Määramatuse leidmiseks 95 % usaldusnivool korrutan voolutugevuse määramatuse B-tüüpi määramatuse kordajaga 2.

$$U^C{}_I = 2 \cdot 0{,}05\ \mathrm{A} = 0{,}10\ \mathrm{A}$$

Vastus

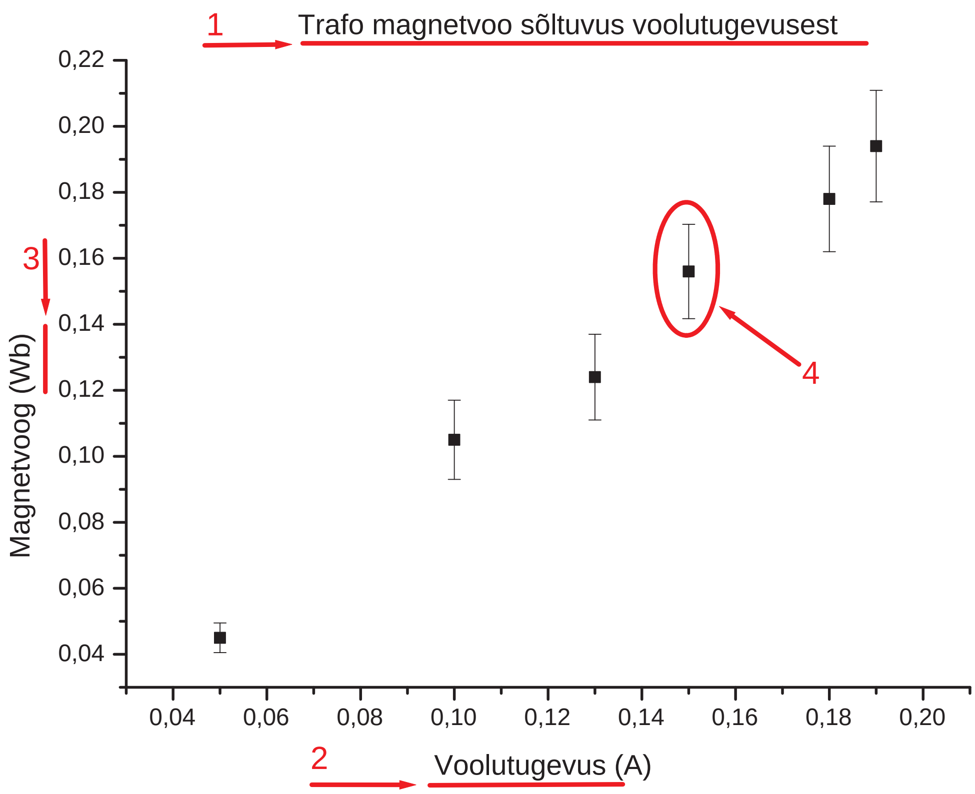
Voolutugevus on $I = 2{,}23(10)$ A. Leides voolututugevuse aritmeetilise keskmise valemiga (1) ja määramatuse standardhälbest (16), on tulemuseks $2{,}23(15)$. Enamasti on märgitestiga leitud määramatus siiski suurem kui valemist (16) leitud. Ka võivad eri meetoditel leitud vastused erineda.

5 Graafikud

Graafikud annavad kiire ülevaate sõltuvustest eksperimendis mõõdetud suuruste vahel. Tabelist on ju ruutsõltuvust palju raskem märgata kui jooniselt.

Joonise tegemine tundub imelihtne. Enda jaoks ongi, aga graafikut peavad ka teised mõistma. Seepärast peab graafikul olema rida arusaamist hõlbustavaid elemente:

1. pealkiri,
2. x- ja y-telje pealkirjad,
3. x- ja y-telje ühikud,
4. mõõdetud väärtuste vearistid.



Joonis 2: Näidisjoonis

Vearist kirjeldab graafikul oleva punkti määramatust. Joonisel 2 on vearistide alumine serv magnetvoo väärtuse $\Phi - U^C{}_\Phi$ juures ja ülemine väärtuse $\Phi + U^C{}_\Phi$ juures. Kui samal joonisel tuleks näidata ka voolutugevuse määramatust, siis tuleks lisada horisontaalsed vearistid voolutugevuse tarvis.

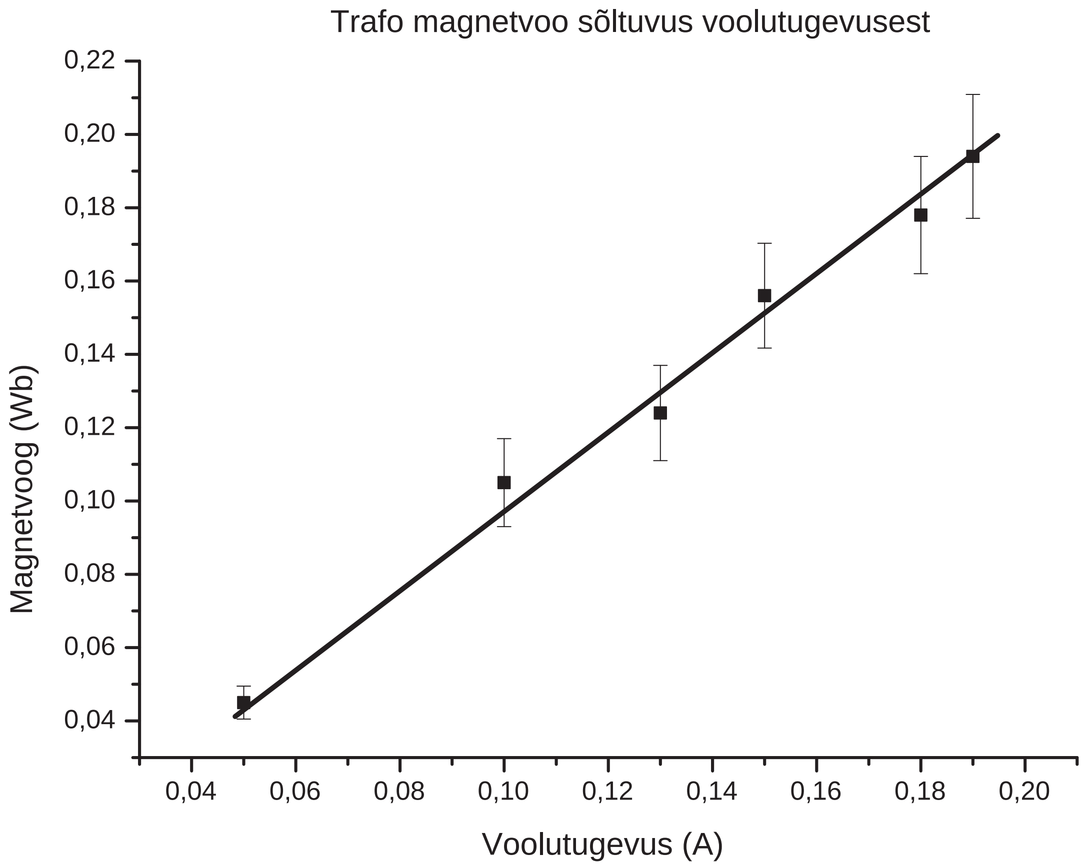
Katses mõõdetud punkte ei või omavahel joonega ühendada (väga aktiivselt pakub sellist võimalust näiteks *Excel*), sest pole teada, kuidas muutub mõõdetud suurus kahe katsepunkti vahel.

Äkki on sõltuvuseks siinusfunktsioon ja kõik tulemused mõõdeti sinusoidi maksimumis? Pideva joonega võib kujutada vaid funktsioone, sest nende väärtusi saab leida igas graafiku punktis.

5.1 Lineaarse sõltuvuse regressioonsirge

Katsepunkte läbiva regressioonsirge võrrandi arvutamine kompuutri abita on tülikas, seepärast seda siin ei puudutagi. Lihtsam on kasutada silmamõõtu ja regressioonsirge joonistada.

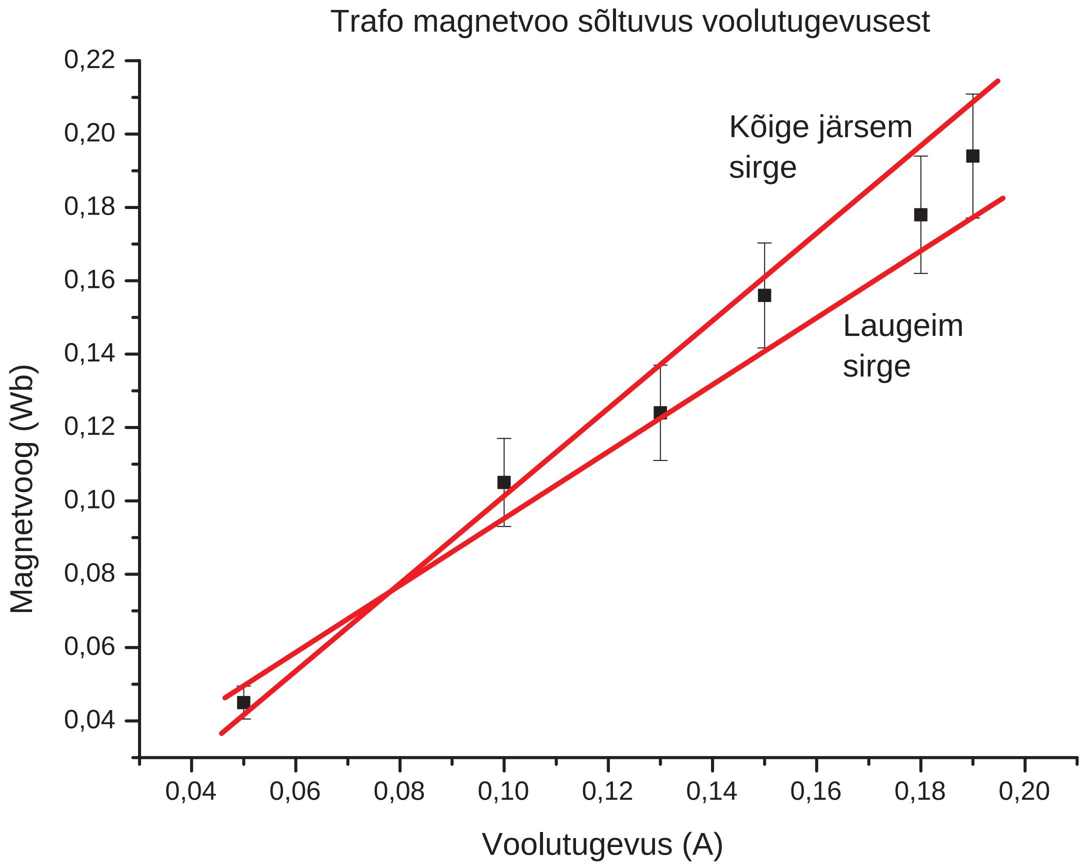
Ideealne regressioonsirge läbib graafikul kõikide mõõdetud punktide keskmeid. Tegelikus elus tuleb jälgida, et regreesioonsirge läbiks punktide veariste. Lisaks peaks mõlemal pool regressioonsirget olema umbes võrdne arv punkte ja need võiksid sirgest ka sama kaugel olla.



Joonis 3: Regressioonsirge näidis. Regressioonsirge läbib katsepunkte hästi.

Täpsema regressioonsirge (ja määramatuse!) saamiseks tuleb katsepunktidest läbi panna kaks regressioonsirget: üks nii suure tõusuga kui võimalik ja teine minimaalsega. Regressioonsirge tegeliku tõusu leidmiseks tuleb kasutada märgitesti (21). Ka tõusu määramatus leitakse märgitestist (22). Tõusu määramatuse arvutamiseks 95 % usaldusnivool tuleb määramatust korrutada arvuga 2.

Vabaliikme sirge võrrandis saab leida analoogiliselt tõusuga. Nüüd tuleb regressioonsirge joonis-



Joonis 4: Regressioonsirgel on näidatud läbi katsepunktide tõmmatud maksimaalse ja minimaalse tõusuga sirge.

tada võimalikult kõrgele ja võimalikult madalale (sirged peavad olema paralleelsed). Vabaliikme väärtuse koos määramatusega saab jällegi leida märgitestist (valemid (21) ja (22)).

5.2 Teiste funktsioonide regressioonsirged

Keerulisemate ja kumeramate sõltuvuste jaoks regressioonkõveraid ei joonistata. Selle asemel teisendatakse katsetulemusi nii, et need kujutaksid graafikul lineaarset sõltuvust. Mõõdetud suurustest võetakse logaritm, eksponent, pöördväärtus või teisendatakse tulemusi muul sobival viisil.

Näiteks astmefunktsiooni $y = Ax^n$ korral võib graafikul kujutada y-x^n sõltuvust või $\log y - \log x$ sõltuvust. Mõlemal juhul on sõltuvuseks sirge, mille tõus võrdub esimesel juhul konstandiga A, teisel juhul korrutisega $n \log A$.

6 Abiks eksperimendis

Must kast

Must kast on salapärane karp, kuhu on peidetud elektriskeem. Katsetaja ülesandeks on välja selgitada, millised poolid, kondensaatorid ja takistid mustas kastis asuvad ja kuidas on need omavahel ühendatud.

Pooli ja kondensaatori takistused sõltuvad vahelduvvoolu sagedusest: takistused on vastavalt $X_L = j\omega L$ ja $X_C = 1/(j\omega C)$. Musta kasti sisu kindlaksmääramiseks tuleb uurida takistuse muutust mustast kastist väljuvatel juhtmetel, kui voolu sagedus muutub. Selleks ühendatakse musta kastiga helisagedusgeneraator (genereerib soovitud sageduse ja pingega vahelduvvoolu), mõõdetakse voolutugevust ja arvutatakse takistus. Kui vahelduvvoolu sageduse kasvades musta kasti takistus suureneb, siis on kastis pool. Takistuse kahanemisel on kastis kondensaator. Kui takistus ei muutu, siis on mustas kastis aktiivtakisti.

Induktiivsuste, mahtuvuste ja takistuste arvväärtuste leidmiseks võib lahendada võrrandisüsteemi. Teiseks võimaluseks on kanda topeltlogaritmskaala x-teljele sagedus ja y-teljele musta kasti takistus ning leida graafikult sirge tõus. Kuna see leiti topeltlogaritmskaalalt, siis tuleb mahtuvuse või induktiivsuse leidmiseks võtta tõusust antilogaritm (ehk $10^{tõus}$).

Magnetinduktsioon

Magnetinduktsiooni B mõõtmiseks saab teslameetri puudumisel kasutada vasest juhtmetega südamikuta pooli. Lisaks on vaja galvanomeetrit, mis töötab impulssre ziimis, ja oommeetrit pooli takistuse määramiseks. Ei tundu just erilise lihtsustusena, kui ühe mõõteriista asemel tuleb kasutada kahte, kuid teslameeter nii haruldane ja õrn mõõteriist, et seda saab väga harva tarvitada.

Impulssre ziimis oleva galvanomeetri maksimaalne näit võrdub mõõteriista läbinud elektrilaenguga. Kui magnetväljas olev pool sealt kiiresti eemaldada, siis tekib poolis elektromagnetilise induktsiooni tõttu elektromotoorjõud $\mathcal{E}$.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Tekkinud elektromotoorjõud võrdub pooli takistuse ja voolutugevuse korrutisega (kui on teada galvanomeetri takistus, siis tuleks pooli takistusele liita ka galvanomeetri takistus).

$$\mathcal{E} = IR = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$RIdt = -d\Phi$$

Voolutugevuse integraal üle aja on elektrilaeng Q. Integraal üle $d\Phi$ on magnetvoog Φ.

$$QR = -\Phi$$

Magnetvoog Φ võrdub pooli ristlõikepindala S ja magnetinduktsiooni B korrutisega.

$$QR = -BS$$

$$B = -\frac{QR}{S} \tag{23}$$

Magnetinduktsiooni mõõtmiseks tuleb magnetväljas olev pool sellest kiiresti eemaldada ja registreerida galvanomeetri näit. Mõõtnud ka pooli takistuse ja ristlõikepindala, saab arvutada magnetvälja magnetinduktsiooni.

Kuna magnetvoog $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\alpha$, siis sõltub magnetvoog pooli ristõikepindala ja magnetinduktsiooni vastastikusest orientatsioonist. Mõõtmisi tuleb korrata pooli erinevate asendite korral, kuni leitakse maksimaalne magnetinduktsiooni väärtus. Siis $\cos\alpha = 1$ ja $\Phi = BS$ ning saab kasutada valemit (23). Kuna magnetinduktsioon on vektoriaalne suurus, siis on lisaks arvväärtusele vastuse osa ka magnetinduktsiooni suund.

Magnetinduktsiooni mõõtmiseks ei saa kasutada südamikuga pooli ega ka rauast pooli. Need on ferromagneetikud, mis tugevdavad välist magnetvälja (tekitavad hüstereesisilmuse). Kui palju välise välja tugevdatakse, sõltub eelkõige ferromagneetiku materjalist ja töötlusest. Ulatusliku tehnilise dokumentatsioonita oleks võimatu hinnata, kui palju tugevdab ferromagneetik välist magnetvälja, ilma et selle suurus teada oleks.

Mõõtmine

Viga ja määramatust käsitlevates peatükkides jõuti järeldusele, et vastuse viga on seda väiksem, mida rohkem katseid on tehtud. Üks variant korduvmõõtmistest on samasuguste omaduste üheskoos mõõtmine: näiteks mõõtes ühe paberilehe paksuse asemel kümne või saja paberilehe paksuse. Paberileht on nii õhuke, et ühe lehe paksust ei saa nihikuta täpselt leida; saja lehe paksuse saab aga määrata tavalise joonlauaga. Paberilehe paksuse viga on siis $\Delta = \Delta_j/n$, kus Δ_j on joonlaua absoluutne viga, Δ on ühe lehe paksuse absoluutne viga ja n on lehtede arv.

Lühikese pendli ühte võnkeperioodi pole ka hea mõõta, sest stopperi kinni ja lahti vajutamiseks kuluv aeg on ju võrreldav pendli võnkeperioodiga. Palju täpsema tulemuse saab, kui mõõta kümne või rohkemagi võnke kestust. Väikeste kuulide diameetri mõõtmisel saab kuulid joonlaua serva äärde joondada ja seejärel mõõta kuulide diameetrite summa.

Loendamine

Korduvate sündmuste loendamine läheb varem või hiljem sassi, arvud muutuvad sarnasteks ja lõpuks teiseneb loendamine pagari piparkookideks. Kavalam on lasta kalkulaatoril loendada. Selleks vajuta klahve $\boxed{1}$ ja $\boxed{+}$ ning iga sündmuse ajal märgile $\boxed{=}$. Olgu sündmuseks pendli jõudmine äärmisse asendisse või mahakukkunud vihmapiiskade arv, kalkulaatori ekraan näitab toimunud sündmuste arvu.

Protokoll

Protokoll on tüütu paber, kuhu tuleb kõik tehtu üles kirjutada. On tüütu, aga vajalik. Ise te loomulikult mäletate tehtut, kuid ka zürii peab mõistma katse käiku. Mida vähem protokolli üles märkida, seda vähem arvavad hindajad teid vaeva näinud olevat. Ka võib zürii hinnata teie jaoks elementaarseid või tähtsusetuid tegevusi (mõõteriista nulli kontrollimine, võimalikult väikese mõõteskaala valimine). Seepärast tuleb protokolli kirja panna kõik, mida katses tegite.