Erirelatiivsusteooriast

Mihkel Kree

1 Sissejuhatus

2 Eelteadmised matemaatikast

Relatiivsusteooria ülsannete lahendamiseks vajalikke matemaatilised eeldusi pole palju. Peaks hakkama saama Eukleidilise geomeetria-trigonomeetriaga ning tundma imaginaarühiku mõistet. Samuti tuleb kasuks algebraliste avaldiste teisendamise julgus.

2.1 Ruumipöörded eukleidilises ruumis

Olgu meil ristkoordinaadistik xy. Vaatleme kaht punkti sellel tasandil $((x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2))$. Nende punktide vahelise kauguse ruut avaldub Pythagorase teoreemi põhjal: $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Kui pöörame koordinaattelgi nurga α võrra ümber nullpunkti, saame uue teljestiku $x'y'$, kus vaadeldavate punktide kooridnaadid tähistame (x'_1, y'_1) ja (x'_2, y'_2). Punktide vahelise kauguse ruut avaldub analoogiliselt: $d'^2 = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2$.

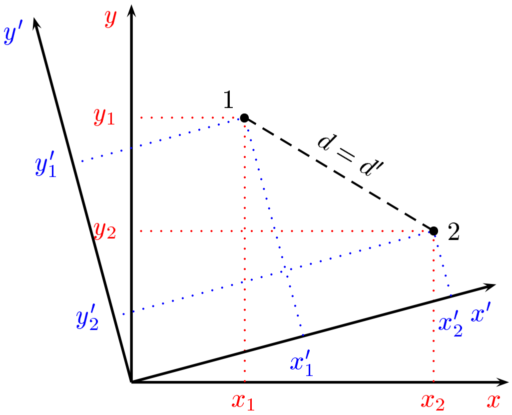

Figure 1: Koordinaattelgede pööramine

Harjutus 1. Tuletada koordinaatide teisendusvalemid üleminekuks xy-teljestikust $x'y'$-teljestikku.

Lahendus. Kasutame siinkohal geomeetrilist lahenduskäiku. Vaatleme sarnaseid kolmnurki OAE ja BFA. Avaldame x' ja y':

$$\begin{aligned} x' &= |OD| = |OE| + |ED| = |OE| + |AF| = \\ &= |OA| \cos\alpha + |AB| \sin\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \\ y' &= |BD| = |BF| - |DF| = |BF| - |AE| = \\ &= |AB| \cos\alpha - |OA| \sin\alpha = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}$$

Seega teisendusvalemid:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \tag{1}$$

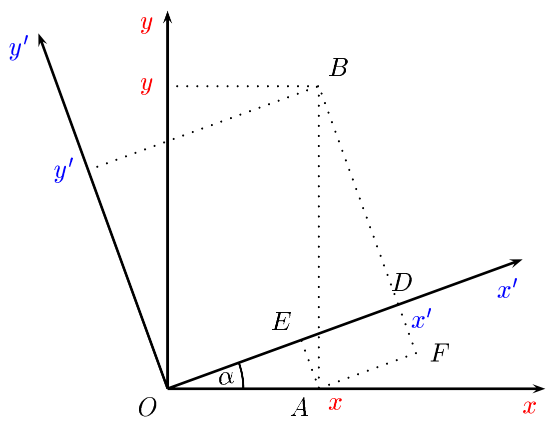

Figure 2: Koordinaatide teisenemine

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{2}$$

Kui on lugeja on tuttav maatriksite korrutamisega, võime viimased seosed esitada:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Kui keerame $x'y'$-teljestikku nurga $-\alpha$ võrra, saame $x''y''$-teljestiku, mis mõistagi peab kokku langema xy-teljestikuga. Veendume selles, rakendades valemeid (1) ja (2):

$$\begin{aligned} x'' &= x'\cos(-\alpha) + y'\sin(-\alpha) = \\ &= (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\cos(\alpha) - \\ &\quad - (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)\sin(\alpha) = \\ &= x\cos^2\alpha + x\sin^2\alpha = x; \\ y'' &= -x'\sin(-\alpha) + y'\cos(-\alpha) = \\ &= (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\sin(\alpha) + \\ &\quad + (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)\cos(\alpha) = \\ &= y\sin^2\alpha + y\cos^2\alpha = y. \end{aligned}$$

Harjutus 2. Näidata, et punktide vaheline kaugus teljestiku pööramisel ei muutu ($d = d'$).

Lahendus. Avaldame suurused d^2 ja ${d'}^2$:

$$\begin{aligned}
d^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2;\\
d'^2 &= (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 =\\
&= (x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - x_2 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha)^2 +\\
&\quad + (-x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha - y_2 \cos\alpha)^2 =\\
&= x_1(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + x_2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) -\\
&\quad - 2x_1x_2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + y_1(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) +\\
&\quad + x_2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2y_1y_2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) =\\
&= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2.
\end{aligned}$$

2.2 Kompleksarvud

Defineerime imaginaarühiku $i = \sqrt{-1}$, on lihtne näha, et kehtib:

$$i^2 = -1, \qquad i = \frac{-1}{i}. \tag{3}$$

Kompleksarvuks nimetame, arvu z, mis esitub kujul $z = a + ib$, kus arvu a nimetame reaalosaks ning ning arvu b imaginaarosa kordajaks. Kehtivad elementaarsed tehted kompleksarvude $z_1 = a + ib$ ja $z_2 = c + id$ jaoks:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),\\
z_1 \cdot z_2 &= (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd =\\
&= (ac - bd) + i(ad + bc).
\end{aligned}$$

Viimased tehted pole olulised järgneva materjali seisukohast, vaid toodud lihtsalt näitena kompleksarvude kasutamise kohta.

3 Relatiivsusteooria postulaadid

Relatiivsusteooria kohaselt on valguse kiirus taustsüsteemist (vaatlejast) sõltumatu konstant, st valguse kiirus ei sõltu valgusallika kiirusest antud taustsüsteemis.

Relatiivsusteooria aluseks on relatiivsusprintsiip, mille kohaselt ei eksisteeri absoluutset taustsüsteemi, kõik inertsiaalsüsteemid on samaväärsed.

Selle põhjal tuletataksegi kõik eriraltiivsusteoorias kehtivad seadused ning omadused.

4 Aegruumi sündmus, koordinaadid, selle kujutamine. Aegruumi pööre

Mistahes aegruumi sündmust kirjeldatakse selle toimumiskohale vastavate ruumikoordinaatidega x, y ja z ning toimumishetke kirjeldava ajakoordinaadiga t. Ruumilist paiknemist võime esitada ka kohavektiriga $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$. Siin ja edaspidi vaatleme erijuhutu, kus $y = z = 0$. Võime aegruumi sündmusi kujutada ristteljestikuks, kus telgedel on ajaühik ning x-suunaline pikkusühik. Järgneval joonisel on kujutatud ühtlase kiirusega liikuva objekti aegruumiline trajektoor (sirge tõusunurga φ).

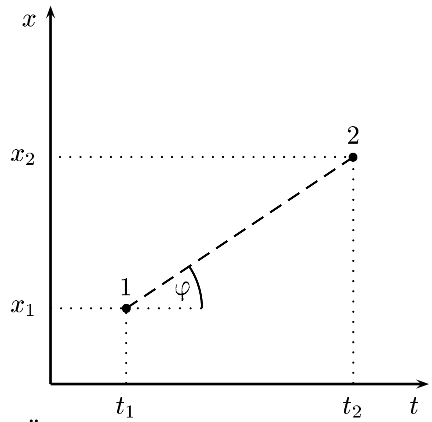

Figure 3: Ühtlaselt liikuva objekti trajektoor aegruumis

On oluline märgata, et tõusunurga tangens võrdub objekti liikumiskiirusega, sest $\tan\varphi = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$, mis aga on juba koolifüüsikast tuttav kiiruse definitsioon.

Vaatleme järgnevalt, kuidas kujutada teineteise suhtes liikuvaid inertsiaalseid taustsüsteeme. Valime taustsüsteemid K ja K' nii, et nende vastavata ruumikoordinaattelgede sihid ühtiksid ning süsteem K' liigub kiirusega v süsteemi K suhtes selle x-telje positiivses suunas. Ilmselt kehtib seetõttu väide, et K liigub süsteemi K' suhtes selle x'-telje negatiivses suunas.

Kujutame sÃ¼steemidele K ja K' vastavaid teljestikke tx ja $t'x'$ teineteise suhtes nurga φ võrra pööratuna. Valime alghetke nii, et nende koordinaadid ühtiksid. Süsteemi K' koordinaatide alguspunkt liigub K suhtes kiirusega v ning tema trajektoor xy-teljestikule kujutub sirgeks t'. Ilmselt $v = \tan\varphi$.

Aegruumi pöördeks nimetame üleminekut ühest taustsüsteemist teise. Järgneval joonisel on kujutatud aegruumi sündmusi ning nende koordinaate kahes taustsüsteemis.

4.1 Intervall

Vaatleme aegruumi sündmusi (x_1,t_1) ja (x_2,t_2). Suurust s, mis avaldub seosest

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2, \tag{4}$$

nimetatakse nende sündmuste vaheliseks intervalliks (valemis c tähistab valguse kiirust). Intervall on aegru-

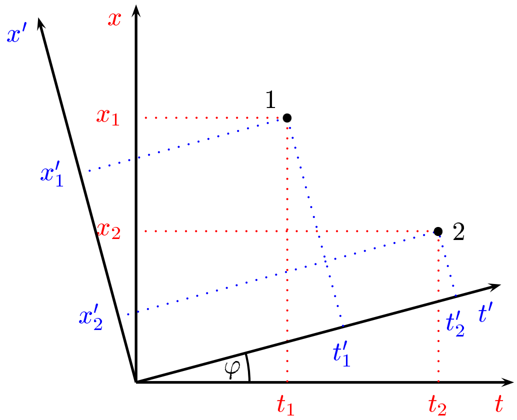

Figure 4: Koordinaatide teisenemine taustsüsteemide vahetamisel

umi pöörete suhtes invariantne, st mistahes kahe sündmuse vaheline intervall on igas inertsiaalsüsteemis ühesugune. Selle väite tõestuse juurde naaseme hiljem.

Märkame, et intervall avaldub suhteliselt sarnaselt punktide vahelisele kaugusele eukleidilises ruumis, erinevus seisneb vaid miinus-märgis. Selle probleemi ületamiseks toome sisse imaginaarsed koordinaadid. Võtame kasutusele kompleksarvulise muutuja τ, mille seome t-ga järgnevalt:

$$\tau = ict. \tag{5}$$

Märkame, et sel juhul

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (\tau_2 - \tau_1)^2,$$

sest $i^2 = -1$.

Siit järeldub, et suurustega x ja τ võime ümber käia kui eukleidilise ruumi koordinaatidega. Kuid kindlasti tuleb meeles pidada, et τ on kompleksarv, mistõttu ei ole võimalik rakendada kõiki eukleidilise ruumi omadusi. Kui eukleidilises ruumis (xy) on sündmuste vaheline kaugus d võrdne nulliga, siis need sündmused ühtivad. Kui aga intervall võrdub nulliga, siis ei järeldu sellest, et sündmused ühtivad.

Kui varem (tx-teljestiku puhul) avaldus telgede vahelise nurga tanges $\tan\alpha = v$, kus v on taustsüsteemide suhteline kiirus, siis nüüd on nurga suurus kompleksarv ning

$$\tan\alpha = \frac{x}{\tau} = \frac{vt}{\tau} = \frac{vt}{ict} = \frac{v}{ic}.$$

Harjutus. Tuletada geomeetriliselt koordinaatide teisendusvalemid üleminekul ühest taustsüsteemist teise, lhtudes intervalli invariantsusest. (K' liigub kiirusega v K suhtes selle x-telje positiivses suunas.)

Lahendus. Asendame (x,t) ja (x',t') definitsiooni (5) põhjal vastavalt $(x,\tau) = (x, ict)$ ja $(x',\tau') = (x', ict')$. Defineerime esmalt suuruse, mis aitab meil hiljem avaldisi lihtsamal kujul hoida:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6}$$

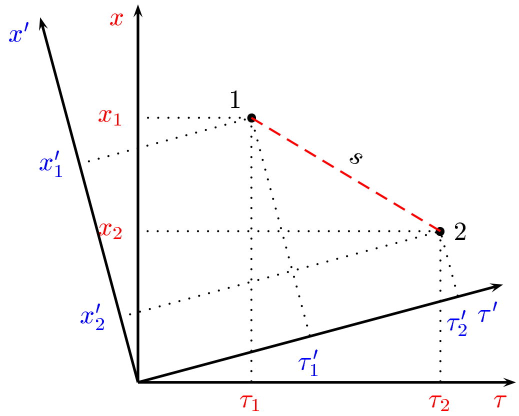

Figure 5: Sündmuste kujutamine τx-teljestikus

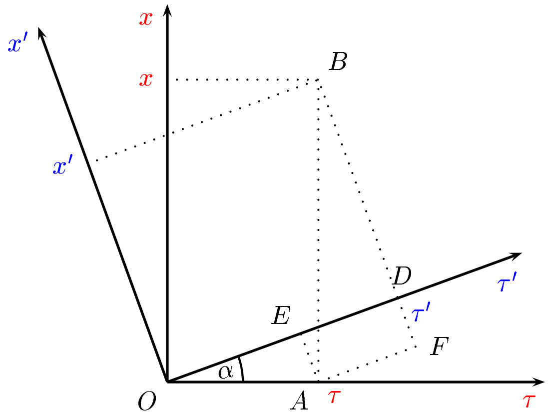

Figure 6: Koordinaatide teisenemine

Avaldame trigonimeetrilised funktsioonid telgede vahelise nurga α jaoks:

$$\tan\alpha = \frac{v}{ic},$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{ic}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$
$$\sin\alpha = \cos\alpha\tan\alpha = \frac{\gamma v}{ic}.$$

Vastavalt joonisele: $|OA| = \tau$, $|AB| = x$, $|OD| = \tau'$, $|BD| = x'$. Hakkamata siinkohal uuesti läbima tegema harjutuses 1 tehtud tuletuskäiku, kirjutame:

$$\tau' = \tau\cos\alpha + x\sin\alpha,$$
$$x' = -\tau\sin\alpha + x\cos\alpha.$$

Seega:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{\tau'}{ic} = \frac{\tau}{ic}\cos\alpha + \frac{x}{ic}\sin\alpha = \\ &= t\gamma - \frac{vx}{c^2}\gamma = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}), \\ x' &= -ict\frac{\gamma v}{ic} + x\gamma = \gamma(x - vt). \end{aligned}$$

Kirjutame teisendusvalemid uuseti välja:

$$x' = \gamma(x - vt), \tag{7}$$

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}). \tag{8}$$

Viimased seosed maatrikskujul:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{vx}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Mõtleme, missugused peaksid välja nägema teisendusvalemid koordinaatidelt (x', t') koordinaatidele (x, t). Sellisel juhul liigub süsteem K süsteemi K' suhtes selle x'-telje negatiivses suunas, teisisõnu negatiivse kiirusega $-v$, mistõttu teisendusvalemid peaksid erinema seostest (7) ja (8) vaid kiiruse ees oleva märgi poolest. Veendume selles, avaldades seostest (7) ja (8) suurused x ja t. Selleks korrutame seost (8) teguriga v ning liidame võrrandi (7) vastavad pooled:

$$\begin{aligned} x' + vt' &= \gamma(x - vt + vt - \frac{v^2}{c^2}x) = x\gamma(1 - \frac{v^2}{c^2}) \\ &= x\gamma\frac{1}{\gamma^2} = \frac{x}{\gamma}, \end{aligned}$$

millest saame

$$x = \gamma(x' + vt').$$

Analoogiliselt võime avaldada t:

$$t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}).$$

4.2 Lorentzi teisendusvalemid

Lorentzi teisendusvalemid annavad eeskirja, et siduda kahe teineteise suhtes liikuva inertsiaalsüsteemi koordinaate. Õigupoolest on need meil juba leitud (seosed (7) ja (8)), kuid tee nendeni jõudmiseks polnud järjepidev, nimelt kasutasime tuletuskäigus intervalli mõistet, mille tõestame veidi hiljem. Järjepidevuse huvides anname siinkohal intervallist sõltumatu tuletuskäigu.

Harjutus. Lähtudes aja ja ruumi homogeensusest ning ruumi isotroopsusest, tuletada Lorentzi teisendusvalemid.

Lahendus. Ruumi isotroopsus tähendab, et ruumi omadused on suunast sõltumatud. Valime kummagi taustsüsteemi ruumilise teljestiku nii, et kummagi süsteemi alghetkel ($t = t' = 0$) teljestike alguspunktid ühtiksid ($x = x' = 0$). Ilmselt saab teisendusvalemid kirjutada kujul:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}t, \\ t' &= a_{21}x + a_{22}t. \end{aligned}$$

Ruumi ja aja homogeensuse tingimusest järeldub, et toodud seosed on lineaarsed, mis tähendab, et $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ konstandid. Kui nimetatud kordajad oleksid sõltuvuses koordinaadist x või ajast t, siis see oleks vastuolus homogeensuse eeldusega.

Järgnevalt leiame toodud konstante siduvaid seoseid. Vaatame süsteemis K kiirusega v liikuvat objekti ($x = vt$), ilmselt ühtib selle objekti aegruumiline trajektoor süsteemi K' alguspunkti trajektooriga, sest K' liigub ju K suhtes kiirusega v, mistõttu on vaadeldava objekti koordinaadid süsteemis K' $(0, t')$. Seega $0 = a_{11}vt + a_{12}t$, kust $a_{12} = -a_{11}v$.

Saadame alghetkel süsteemide ühisest alguspunktist välja kaks valguskiirt, ühe x-telje positiivses suunas, teise x-telje negatiivses suunas. Valguse kiirus on sama kummaski taustsüsteemis, seega esimese signaali jaoks $x_1 = ct_1$ ja $x'_1 = ct'_1$ ning teise signaali jaoks $x_2 = -ct_2$ ja $x'_2 = -ct'_2$. Teisendusvalemite põhjal:

$$x'_1 = (a_{11}c + a_{12})t_1, \qquad t'_1 = (a_{21}c + a_{22})t_1,$$

ja

$$x'_2 = (-a_{11}c + a_{12})t_2, \qquad t'_2 = (-a_{21}c + a_{22})t_2.$$

Tingimustest $x'_1 = ct'_1$ ja $x'_2 = -ct'_2$ saame:

$$\begin{aligned} a_{11}c + a_{12} &= a_{21}c^2 + a_{22}c, \\ -a_{11}c + a_{12} &= a_{21}c^2 - a_{22}c. \end{aligned}$$

Viimaseid võrrandeid kord liites, kord lahutades, saame:

$$a_{12} = a_{21}c^2, \qquad a_{11} = a_{22}.$$

Seega saame ühe konstandi abil avaldada teised:

$$a_{12} = -a_{11}v, \quad a_{21} = -\frac{a_{11}v}{c^2}, \quad a_{22} = a_{11}. \tag{9}$$

Vaatleme veelkord alghetkel alguspunktist x-telje suunas saadetud kiirt. Ilmselt kehtib $x = ct$ ja $x' = ct'$, mistõttu võime kirjutada $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$. Teisendades viimast võrdust ning kasutades samasusi (9):

$$\begin{aligned} x^2 - c^2t^2 &= x'^2 - c^2t'^2 = \\ &= (a_{11}x + a_{12}t)^2 - c^2(a_{21}x + a_{22}t)^2 = \\ &= x^2(a_{11}^2 - c^2a_{21}^2) + c^2t^2(\frac{a_{12}^2}{c^2} - a_{22}^2) + \\ &\quad + 2xt(a_{11}a_{12} - c^2a_{21}a_{22}) = \\ &= x(a_{11}^2 - a_{11}^2\frac{v^2}{c^2}) - c^2t^2(a_{11}^2 - a_{11}^2\frac{v^2}{c^2}) + \\ &\quad + 2xt(-a_{11}^2v + a_{11}^2v) = \\ &= (x^2 - c^2t^2)(a_{11}^2 - a_{11}^2\frac{v^2}{c^2}), \end{aligned}$$

kust saame, et $a_{11}^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = 1$, ehk

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma,$$

kus kasutasime γ definitsiooni (6).

Seega oleme jõudnud Lorentzi teisendusvalemiteni

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ t' &= \gamma(t - \frac{vx}{c^2}), \end{aligned}$$

mis ühtivad eelpool tuletatud seostega (7) ja (8).

4.3 Valguskiire kujutamine

Ilmselt kehtib alghetkel x-telje suunas saadetud valgussignaali jaoks $x = ct$, mistõttu $s^2 = x^2 - c^2t^2 = 0$.

Tähendab, kui valime üheks sündmusteks alghetke ning teiseks mistahes signaaliga määratud sündmuse, on nedne vaheline intervall võrdne nulliga.

Järgneval joonisel on kujutatud valgussignaaliga määratud sündmusi O $(0,0)$ ning A (x_A, τ_A). Nende sündmuste x-telje sihiline eraldatus on x_A, τ-sihiline eraldatus τ_A. Et aga $x_A = \tau_A/i$, siis $x_A^2 + \tau_A^2 = 0$.

Kujutame teljestikus τx, kus telgede ühikud on vastavalt i ja 1, valgussignaali (võrand $x = ct$).

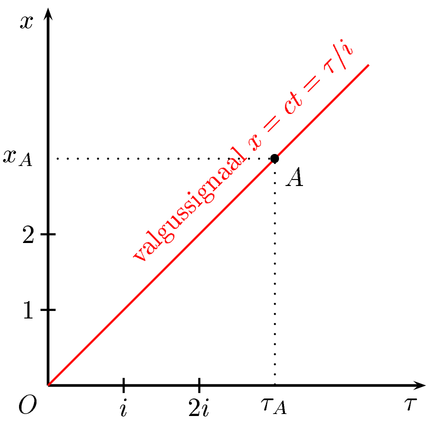

Figure 7: Valguskiir

Antud teljeühikute valiku puhul kujutub valgussignaali aegruumiline trajektoor sirgeks, mis osutub telgede vahelise nurga nurgapoolitajaks. Kui pidada silmas piirangut, et relatiivsusteooria järgi ei saa ühegi keha kiirus teiste suhtes olla kiirem valguse kiirusest, saame siinkohal piirangu ka liikuva taustsüsteemi K' kujutamiseks. Nimelt peab positiivse kiirusega v liikuva süsteemi τ' telg alati jääma τ-telje ja valguskiirega eelmisel joonisel määratud sirge vahele.

5 Ülesanded

Ülesanne. Näidata, et intervall (4) ei sõltu taustsüsteemist.

Lahendus. Lahendusidee on ilmselt üsna selge. Kirjutame välja intervalli ruude süsteemis K', mis liigub K suhtes selle x-telje positiivses suunas. Seejärel asendame Lorentzi teisendusvalemid.

$$\begin{aligned}
s'^2 &= (x'_1 - x'_2)^2 - c^2(t'_1 - t'_2)^2 = \\
&= x'^2_1 + x'^2_2 - 2x'_1 x'_2 - c^2(t'^2_1 + t'^2_2 - 2t'_1 t'_2) = \\
&= \gamma^2\{(x_1 - vt_1)^2 + (x_2 - vt_2)^2 - 2(x_1 - vt_1)(x_2 - vt_2) - \\
&\quad - c^2[(t_1 - \frac{vx_1}{c^2})^2 + (t_2 - \frac{cx_2}{c^2})^2 - \\
&\quad - (t_2 - \frac{vx_1}{c^2})(t_2 - \frac{vx_2}{c^2})]\} = \\
&= \gamma^2\{x_1^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) + x_2^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) - 2x_1x_2(1 - \frac{v^2}{c^2}) - \\
&\quad - c^2[t_1^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) + t_2^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) - 2t_1t_2(1 - \frac{v^2}{c^2})]\} = \\
&= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - c^2(t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2) = \\
&= (x_1 - x_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 = s^2.
\end{aligned}$$

Kasutasime samasust $\gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = 1$.

6 Dünaamika

7 Lisa 1.

2005. aasta Eesti-Soome ühise treeninglaagri materjalid ja rahvusvahelisetel olümpiaadidel esinenud relatiivsusteooria ülesannete loend.

7.1 The Basics & Kinematics

In special relativity we are dealing with **inertial reference frames**, which are non-accelerating reference frames. A **spacetime event** is described by four numbers (x, y, z, t), in one-dimensional case we use (x, t). Consider a reference frame (system) K', which is moving with respect to a system K towards its positive x-direction with velocity v. In that case the coordinates of an event in K (x, t) and K' (x', t') are different. The non-relativistic case is easy: if the origins coincide then $t' = t$ and $x' = x - vt$.

Let us define a **spacetime interval** between two events (x_1, t_1) and (x_2, t_2):

$$\begin{aligned}
s^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 = \\
&= (x_1 - x_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2
\end{aligned}$$

in one-dimensional case. Let the coordinates of the events in the system K' be (x'_1, t'_1) and (x'_2, t'_2). Using the postulate of the theory that the speed of light is **independent** of the reference frame and equals to c, it can be shown that

$$(x_1 - x_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 = (x'_1 - x'_2)^2 - c^2(t'_1 - t'_2)^2,$$
$$s^2 = s'^2,$$

which means that the spacetime interval between two events is independent of the reference frame, this property is called **invariance**.

Note that by defining imaginary quantity $\tau = it/c^2$ (where $i = \sqrt{-1}$) the following holds:

$$s^2 = \Delta x^2 + \Delta\tau^2.$$

In this notation the interval behaves like an Euclidean distance and is invariant under the rotation of coordinate axis.

Task 1. Lorentz Transformation. Derive the relation between coordinates in system K and K' (see the definition above) of a spacetime event. The results are known as the Lorentz transformation rules:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x),$$
$$\text{where} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Task 2. Velocity Addition. Let there be a particle moving with volocity u' with respect to the system K' towards its positive x-direction. Show that the velocity of the particle u with respect to the system K equals to

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

Task 3. Length Contraction. Consider a body with length L_0 in x-direction, which is at rest in system K. Show that its length in system K' is

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

IPhO Problem 1. Relativistic Square. Solve problem 2 from the Cuban set (1991).

Task 4. Doppler shift. Consider an electromagnetic plane wave travelling in positive x-direction in system K and having frequency f. Show that its frequency in system K' is

$$f' = f\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}.$$

Find its value in the non-relativistic case.

IPhO Problem 2. Faster than Light? Solve problem 3 from the Iclandic set (1998).

7.2 Dynamics

Consider a particle with rest mass m_0. If the particle is moving with volocity v then its momentum

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v.$$

The total energy of the particle is equal to

$$E = p^2c^2 + m_0^2c^4.$$

The values of energy and momentum of the particle depend on the observer, but the difference of squares

$$E^2/c^2 - p^2 = m_0^2c^2$$

. The formulas for force and velocity:

$$F = \frac{fp}{dt}, \quad v = \frac{dE}{dp}, \quad v = \frac{pc^2}{E}$$

.

Task 5. Transformation. Show that energy and momentum transform as follows (consider the case when momentum is parallel to the x-direction):

$$E' = \gamma(E - vp), \quad p' = \gamma(p - \frac{v}{c^2}E).$$

Task 6. Doppler shift by dynamics. A photon with frequency ν has energy $E = h\nu$. Derive the Doppler shift from energy-momentum transformation.

Task 7. Compton Scattering. A photon of wavelength λ strikes a free, but initially stationary, electron of mass m. The photon scatters an angle θ. Find the change in photon wavelength.

Task 8. K Decay. Konsider a particle K^+ at rest. It decays into two pions (π^0 and π^+), which have different rest masses. Show that their energies are

$$E_+ = \frac{m_k^2 + m_{\pi+}^2 - m_{\pi 0}^2}{2m_k} \quad \text{and}$$
$$E_0 = \frac{m_k^2 + m_{\pi 0}^2 - m_{\pi+}^2}{2m_k}$$

IPhO Problem 3. Neutrino decay. Solve problem 3A from Taiwanese set (2003).

IPhO Problem 4. Relativistic particle. Solve problem 1 form Chinese set (1994).

IPhO Problem 5. Gravitational red-shift. Solve problem 1 from Australian set (1995).