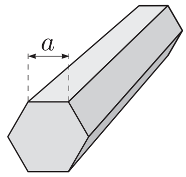
XVIII-1. Heksagonaalse prisma veeremine

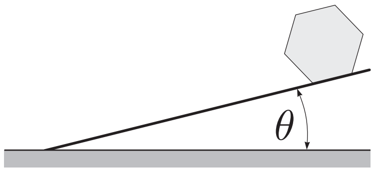


Vaatleme pikka, jäigast materjalist, korrapärast heksagonaalset prismat, nagu seda on kujult näiteks tavaline pliiats (Joonis 1.1.). Prisma mass on M ja see on ühtlaselt jaotunud üle kogu prisma ruumala. Prisma ristlõikeks oleva korrapärase kuusnurga külje pikkus on a. Taolise heksagonaalse prisma inertsimoment prisma pikitelje suhtes on

$$I = 5Ma^2 / 12 \tag{1.1}$$

Prisma inertsmoment tema teljega paralleelse serva suhtes on

$$I' = 17Ma^2 / 12 \tag{1.2}$$



a) *(3,5 punkti)* Heksagonaalne prisma on algselt paigal kaldpinnal, mis moodustab väikese nurga θ horisondiga nii, et prisma telg on horisontaalne (joonis 1.2). Eeldame, et prisma tahud on nõrgalt nõgusad, s.o. prisma puudutab kaldpinda ainult oma servadega. Selle nõgususe mõju inertsimomendile võib mitte arvestada. Prisma viiakse tasakaalust välja ja ta hakkab veerema ebaühtlaselt mööda kaldpinda alla. Eeldame, et hõõrdumine hoiab ära igasuguse libisemise ja prisma ei kaota korrakski kontakti kaldpinnaga. Prisma nurkkiirus vahetult enne seda, kui tema mingi serv astub kontakti kaldpinnaga, on ω_i ja vahetult peale seda ω_f. Näita, et kehtib seos

$$\omega_f = s\omega_i \tag{1.3}$$

ja kirjuta koefitsiendi s väärtus vastuste lehele.

b) *(1 punkt)* Prisma kineetiline energia vahetult enne ja pärast ülalkirjeldatud kontakti teket on vastavalt K_i ja K_f. Näita, et kehtib seos

$$K_f = rK_i \tag{1.4}$$

ja kirjuta koefitsiendi r väärtus vastuste lehele.

c) *(1,5 punkti)* Selleks, et ka järgmine serv saaks puutuda kokku kaldpinnaga, peab K_i olema suurem minimaalsest väärtusest $K_{i,min}$, mille võib esitada valemiga

$$K_{i,\mathrm{min}} = \delta Mga \tag{1.5}$$

kus g = 9,81 m/s^2 on raskuskiirendus. Leia koefitsient δ kaldenurga θ ja koefitsiendi r kaudu. Kirjuta vastus vastuste lehele. (Kasuta sümbolit r ja mitte tema avaldist).

d) *(2 punkti)* Kui eelmise osa (c) tingimus on rahuldatud siis, kineetiline energia K_i hakkab prisma alla veeremise käigus lähenema teatud piirväärtusele $K_{i,0}$.
Eeldusel, et see piirväärtus eksisteerib näita, et $K_{i,0}$ võib esitada kujul

$$K_{i,0} = \kappa Mga \tag{1.6}$$

ja kirjuta koefitsient κ avaldatuna θ ja r-i kaudu vastuste lehele.

e) *(2 punkti)* Arvuta täpsusega 0,1° minimaalne kaldenurk θ_0, millise korral kord alanud prisma ebaühtlane veeremine enam ei peatu. Kirjuta numbriline vastus vastuste lehele.

XVIII-2. Ülesanne 2: Vesi jäämütsi all

Jäämüts on paks jääkiht (kuni mõne kilomeetri paksune), mis lasub tema all asuval pinnasel ja mille horisontaalne ulatus on sadu kilomeetreid. Selles ülesandes vaatleme jää sulamist ja vee käitumist mõõdukalt külma jäämütsi all (s.o. jäämütsi all, mis on sulamistemperatuuri juures). Võime eeldada, et sellistel tingimustel põhjustab jääkiht rõhu muutusi nii nagu viskoosne vedelik, aga deformeerub nagu habras keha, kusjuures deformatsioonid toimuvad peamiselt vertikaalsihis. Ülesande lahendamiseks on kasutada järgmised andmed:

Vee tihedus:	$\rho_w = 1{,}000 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$
Jää tihedus:	$\rho_i = 0{,}917 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$
Jää erisoojus:	$c_i = 2{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{J/(kg \cdot °C)}$
Jää sulamissoojus:	$L_i = 3{,}4 \cdot 10^5\ \mathrm{J/kg}$
Kaljude ja magma tihedus:	$\rho_r = 2{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$
Kaljude ja magma erisoojus:	$c_r = 700\ \mathrm{J/(kg \cdot °C)}$
Kaljude ja magma sulamissoojus:	$L_r = 4{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{J/kg}$
Keskmine maa pinda läbiva väljapoole suunatud soojusvoo tihedus	$J_Q = 0{,}06\mathrm{W/m^2}$
Jää sulamistemperatuur	$T_0 = 0$ °C, konstantne

a) *(0,5 punkti)* Vaatleme paksu jäämütsi Maa sisemusest tuleva soojusvoo tingimustes. Kasutades tabeli andmeid arvuta igal aastal sulava jääkihi paksus d ja kirjuta oma vastus vastavasse lahtrisse vastuste lehel.

b) *(3,5 punkti)* Vaatleme nüüd jäämütsi ülemist pinda. Olgu pinnase kaldenurk jäämütsi all α. Jäämütsi ülemine pind moodustab horisontaaltasandiga nurga β nagu näidatud joonisel 2.1. Jää vertikaalne paksus punkti $x = 0$ juures on h_0. Seega võib jäämütsi ülemist ja alumist pinda kirjeldada võrranditega

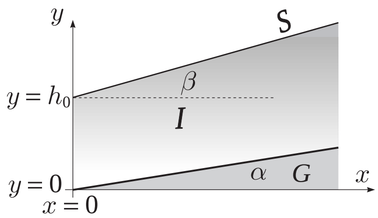
$$y_1 = x \tan\alpha, \ y_2 = h_0 + x \tan\beta. \tag{2.1}$$

Tuleta avaldis rõhu p jaoks jäämütsi all funktsioonina horisontaalsest koordinaadist x ja kirjuta see vastuste lehele. Formuleeri matemaatiline tingimus β ja α vahel, nii et vesi, mis on õhukese kihina jäämütsi ja pinnase vahel, ei voolaks kummaski suunas. Näita, et see tingimus on esitatav kujul $\tan\beta = s \tan\alpha$. Leia koefitsiendi s väärtus ja kirjuta saadud tingimus sümbol-kujul vastuste lehele.

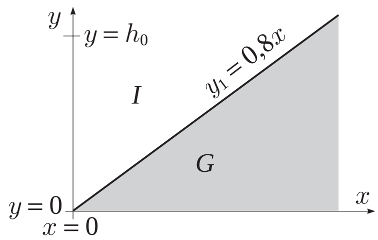
Joon $y_1 = 0.8x$ joonisel 2.2 näitab maapinda jäämütsi all. Jää kihi vertikaalne paksus h_0 punkti $x = 0$ juures on 2 km. Eeldage, et jää ja pinnase vahelises kihis olev vesi on hüdrostaatilises tasakaalus. Joonista graafilisele vastuste lehele sirge y_1 ja lisa sirge y_2, mis kujutab jää ülapinda antud tasakaalu jaoks. Tähista joonisel mõlemad sirged.

c) *(1 punkt)* Horisontaalsel pinnasel asetseva suure läbimõõduga jäämütsi põhjas moodustus jää äkilise sulamise tagajärjel veekoonus kõrgusega H = 1,0 km ja raadiusega r = 1,0 km. Jääkihi esialgne paksus oli D = 2,0 km. Eelda, et koonuse kohale allesjäänud jää kohaldub all toimunud muutustele ainult vertikaalse liikumise tulemusel. Anna vastuste lehel analüütiline valem, mis kirjeldab jäämütsi pinda pärast seda, kui oli tekkinud veekoonus ja saavutatud hüdrostaatiline tasakaal. Kujuta graafilisel vastuste lehel see pind ka joonisena.

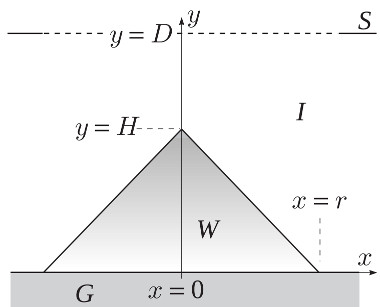
d) *(5 punkti)* Rahvusvaheline teadlaste rühm oli iga-aastaselt uurinud mõõdukalt külma jäämütsi Antarktikas. Uuritav piirkond oli lai tasandik ja jääkihi paksus oli antud piirkonnas 2000 m, aga hiljuti avastati seal sügav kraatri taoline nõgu, mis kujutas alaspidi tipuga koonust sügavusega h = 100 m ja raadiusega r = 500 m (joonis 2.4).



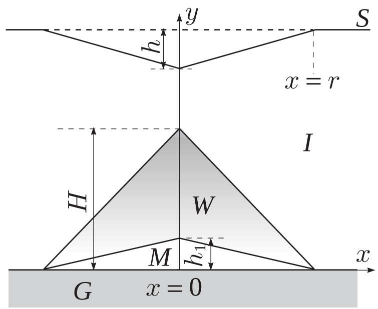
Joonis 2.1: *S*: jäämütsi ülapind, *G*: pinnas, *I*: jäämüts.



Joonis 2.2: Sellise mõõdukalt külma jäämütsi ristlõige, mis lebab kaldus tasapinnal ja mille all olevas veekihis on tasakaal. *G*: pinnas, *I*: jäämüts.



Joonis 2.3: Jäämütsi põhjas asuva veekoonuse telge läbiv vertikaallõige. *S*: mütsi ülapind, *W*: vesi, *G*: pinnas, *I*: jäämüts.



Joonis 2.4: Koonilise lohu tsentraalne vertikaallõige mõõdukalt külmas jäämütsis. S: mütsi pealispind, G: pinnas, I: jäämüts, M: magma, W: vesi. Pangem tähele, et joonise proportsioonid EI OLE õiged.

Arutanud asja jõudsid nad järeldusele, et ilmselt oli jäämütsi all toimunud pisike vulkaaniline purse. Väike kogus magmat (sulanud kaljut) oli tunginud läbi pinnase jäämütsi alla, tahkestunud ja jahtudes sulatanud ära teatud koguse jääd. Püüame hinnata sissetunginud magma kogust ja leida, mis sai sulanud veest. Eeldame, et jää liikus ainult vertikaalselt. Samuti eeldame, et magma oli täielikult sulanud ja ta algtemperatuur oli 1200 °C. Lihtsustuseks eeldame, et sissetunginud magma moodustas ringikujulise põhjaga koonuse, mis on jääpinna poolt moodustatud koonilise lohuga vertikaalsihis täpselt kohakuti.

Magma väljapurskumise aeg oli lühike võrreldes soojusvahetuseks kuluva ajaga. Eeldage, et soojusvoog oli põhiliselt vertikaalne, nii et jää ära sulanud osa oli igal ajahetkel piiratud koonilise pinnaga, mis asus magma purskekeskme kohal.

Neil eeldustel toimub jää sulamine kahes järgus. Alul pole magma pinnal moodustuv vesi hüdrostaatilises tasakaalus ja seetõttu voolab eemale. Võib lugeda, et ära voolava vee temperatuur on 0°C. Hiljem saabub hüdrostaatiline tasakaal ja sulamisvesi ei voola enam ära, vaid koguneb sissetunginud magma kohale.

Teil tuleb leida selle hetke jaoks, mil on saabunud soojuslik tasakaal, järgmised suurused. Vastused kirjutage vastuste lehele.

1. Jäämütsi all moodustunud veekoonuse kõrgus H jäämütsi esialgse põhja suhtes.
2. Sissetunginud magma kõrgus h_1.
3. Kogu sulamisvee mass m_{tot} ja ära voolanud vee mass m'.

Joonistage vastuste lehele õigetes proportsioonides sisse tunginud magma ja paigale jäänud vee kontuurid. Kasutage sama koordinaatide süsteemi, mis joonisel 2.4.

XVIII-3. Ülesanne 3: Kas kiiremini kui valgus?

Selles ülesandes analüüsitakse ja interpreteeritakse raadiokiirguse mõõtmise tulemusi, mis on saadud 1994 aastal meie galaktikas asuva liitallika jaoks.

Vastuvõtja oli häälestatud laiaribalisele raadiokiirgusele lainepikkustel mõni sentimeeter. Joonisel 3.1 on toodud rida erinevatel aegadel registreeritud allika kujutisi. Kontuurid joonisel vastavad konstantsele raadiokiirguse intensiivsusele sarnaselt samakõrgusjoontele geograafilisel kaardil. Joonisel jälgitavaid maksimume interpreteeritakse kui kahte objekti, mis eemalduvad ühisest keskpunktist, mis on joonistel kujutatud ristikesega. (See keskpunkt on ruumis liikumatu ja on samuti tugeva raadiokiirguse allikas, kuid teises lainepikkuste diapasoonis). Erinevatel päevadel saadud pildid on kõik mõõdetud samal kellaajal.

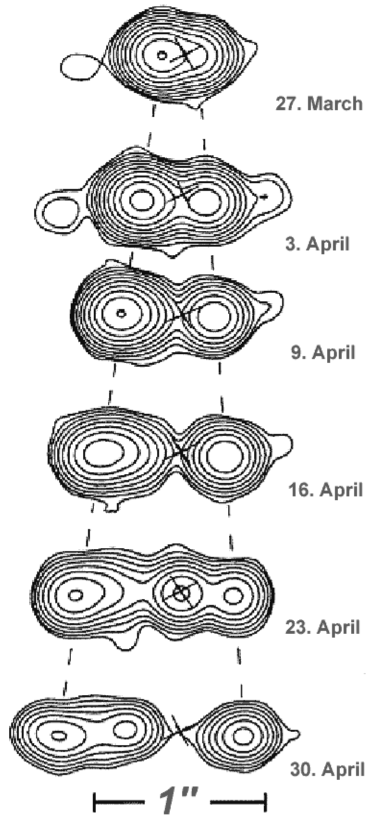
Joonise all on mastaabina ära toodud ühele kaaresekundile vastav lõik. ($1'' = 1/3600°$). Joonise keskel asetseva ristiga tähistatud astronoomilise objekti kaugus meist on hinnangute järgi R = 12,5 kpc. [*Märkus:* 1 kpc (kiloparsek) = $3{,}09 \cdot 10^{19}$ m.] Valguse kiirus $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s. Vea arvutamist selle ülesande lahendamisel ei nõuta.

a) *(2 punkti)* Tähistagu $\theta_1(t)$ ja $\theta_1(t)$ kahe liikuva raadiokiirgusallika nurkkaugusi ühisest keskpunktist, nii nagu seda näeb Maa pealne vaataja; alaindeksid 1 ja 2 vastavad vasakpoolsele ja parempoolsele objektile ja t on mõõtmise aeg. Tähistagu ω_1 ja ω_1 vastavate nurkkauguste muutumise kiirusi ning $v'_{1,\perp}$ ja $v'_{2,\perp}$ nende allikate vastavaid näivaid (vaatesuuna suhtes) ristsuunalisi joonkiirusi (kõik jällegi Maa pealse vaataja jaoks).

Kasutades joonist 3.1 koosta graafik, mida saad edasi kasutada ω_1 ja ω_1 numbriliste väärtuste leidmiseks millikaaresekundites päeva kohta (mas/d). Määra samuti suuruste $v'_{1,\perp}$ ja $v'_{2,\perp}$ numbrilised väärtused ja kirjuta kõik vastused vastuste lehele (mõned tulemused võivad olla paradoksaalsed!).

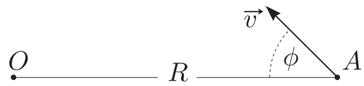
b) *(3 punkti)* Selleks, et lahendada punktis (*a*) tekkinud paradoksi, vaatleme valgusallikat, mis liigub kiirusega $\vec{v}$ nurga ϕ $(0 \le \phi \le \pi)$ all vaatleja O suunas tõmmatud vektori suhtes (joonis 3.2.). Allika kiiruse võib kirjutada kujul $v = \beta c$, kus c on valguse kiirus. Vaatleja kaugus allikast (vaatlejaga seotud süsteemis) on R. Tähistame allika nurkkiiruse, nagu seda näeb vaatleja, ω-ga ja näiva (vaatesuuna suhtes) ristsihilise kiiruse $v'_\perp$ -ga. Avalda ω ja $v'_\perp$ suuruste β, R ja ϕ kaudu ning kirjuta vastus vastuste lehele.

c) *(1 punkt)* Oletame, et kaks liikuvat objekti, millest oli juttu sissejuhatuses ja osas (*a*), liiguvad teineteisele vastassihis võrdsete kiirustega $v = \beta c$. Osas (*b*) saadud tulemused võimaldavad nüüd arvutada β ja ϕ nurkkiiruste ω_1 ja ω_2 ning kauguse R kaudu [ϕ on osas (*b*) defineeritud nurk vasakpoolse objekti jaoks ja vastab seega alaindeksile "1" osa (*a*) juures]. Tuleta valemid β ja ϕ jaoks tuntud suuruste kaudu ja määra nende arvulised väärtused, kasutades osa (*a*) andmeid. Kirjuta vastused vastuste lehe vastavatesse lahtritesse.



Joonis 3.1: Meie galaktikas asuva allika raadiokiirgus.

d) *(2 punkti)* Vaadeldes, nagu osas (*b*), ühe keha situatsiooni, leia tingimused, milliste korral näiv ristsihiline kiirus $v'_\perp$ on suurem valguse kiirusest c. Esita see tingimus kujul $\beta > f(\phi)$ ja anna funktsiooni f analüütiline kuju vastuste lehel. Joonista graafilisele vastuste lehele (β, ϕ)-tasandis füüsikaliselt mõttekate väärtuste piirkond. Näita viirutuse abil, millises osas sellest piirkonnast kehtib tingimus $v'_\perp > c$.



Joonis 3.2: Vaatleja asub punktis O ja allika esialgne asukoht on A. Allika kiiruse vektor on $\vec{v}$

e) *(1 punkt)* Kasuta ka siin punktis (*b*) vaadeldud ühe keha situatsiooni ja leia avaldis näiva ristsihilise kiiruse $v'_\perp$ maksimaalse väärtuse $(v'_\perp)_{\max}$ jaoks etteantud β korral ning kirjuta tulemus vastuste lehe vastavasse lahtrisse. Pane tähele, et see kiirus kasvab tõkestamatult kui $\beta \to 1$.

f) *(1 punkt)* Sissejuhatuses toodud kauguse R hinnang ei ole väga usaldusväärne. Teadlased on seetõttu hakanud juurdlema parema ja otsesema meetodi üle R-i määramiseks. Üks võimalikest ideedest selleks on järgmine. Eeldame, et me suudame mõõta ja identifitseerida kahe ülalkirjeldatud vastassuundades liikuva objekti poolt kiiratud lainepikkusi λ_1 ja λ_2, mis on nihutatud Doppleri efekti tõttu ja mille väärtus paigalseisva allika puhul oleks λ_0.
Lähtudes valemist relativistliku Doppleri efekti jaoks $\lambda = \lambda_0(1 - \beta\cos\phi)(1 - \beta^2)^{-1/2}$ ja eeldades (nagu eelnevaski), et kahe objekti kiiruste absoluutväärtused on võrdsed, näita, et tundmatu $\beta = v/c$ saab avaldada λ_0, λ_1 ja λ_2 kaudu järgmiselt:

$$\beta = \sqrt{1 - \alpha\lambda_0^2 \,/\, (\lambda_1 + \lambda_2)^2}\,. \tag{3.1}$$

Kirjutage koefitsiendi α numbriline väärtus vastustelehe vastvasse lahtrisse. Te võite märgata, et soovitatud lainepikkuste mõõtmised annaksid praktikas uue hinnangu kaugusele.