

PROBLEMAS DE ÓPTICA FÍSICA

Jaan Kalda

Traducción al español de la versión 0.5 por Roberto Marín
Versión: 13 de noviembre de 2019

1. PRINCIPIOS BÁSICOS Y DIFRACCIÓN DE DOBLE RENDIJA

La luz visible es una onda electromagnética; en el vacío, su velocidad es constante e igual a $c = 3 \times 10^8$ m/s; en un medio dieléctrico, la velocidad se reduce en un factor $n = \sqrt{\epsilon}$, donde $n = n(\omega)$ es el coeficiente de refracción y ϵ es la permeabilidad dieléctrica relativa; ambos dependen de la frecuencia angular del campo eléctrico (aquí asumimos que la permeabilidad magnética $\mu \approx 1$ para materiales dieléctricos).

Las ecuaciones de Maxwell permiten varias soluciones; por ejemplo, son posibles las soluciones independientes del tiempo (estacionarias). En particular, una carga puntual q crea un campo electrostático $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$, donde \hat{r} es un vector unitario que apunta desde la carga hacia el punto de observación. Tenga en cuenta que los campos eléctricos estacionarios son creados por cargas eléctricas y campos magnéticos estacionarios por corrientes eléctricas. Sin embargo, las ecuaciones de Maxwell también incluyen términos con derivadas con respecto al tiempo (por ejemplo, la derivada con respecto al tiempo del flujo magnético en la ley de Faraday); debido a estos términos, también es posible tener una solución sinusoidal. En particular, uno puede tener una **onda plana** sinusoidal, para la cual los **frentes de onda**¹ forman una serie de planos paralelos:

$$\vec{E} = \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t), \quad \vec{B} = \hat{j}B_0 \cos(kz - \omega t),$$

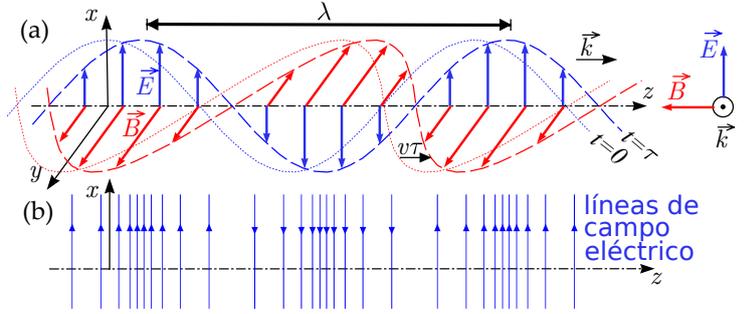
donde el eje z es la dirección de propagación,

$$k = 2\pi/\lambda, \quad (1)$$

es el vector de onda, relacionado con la frecuencia circular y la velocidad de onda a través de

$$\frac{\omega}{k} = v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (2)$$

ya la razón de amplitud de los campos $E_0 = B_0 v$. Nótese que en cualquier punto del espacio, el campo eléctrico, el campo magnético y la dirección de propagación son todos perpendiculares entre sí (la dirección de propagación corresponde al movimiento de la mano derecha cuando se gira desde E a B). En la figura (a) a continuación, los vectores del campo eléctrico y magnético se representan durante un determinado momento, $t = \tau$, para una serie de puntos que se encuentran en el eje z ; los puntos finales de estos vectores terminan en sus respectivos sinusoides, que se dibujan para $t = \tau$ y $t = 0$ (las curvas punteadas). En la figura (b), las líneas de campo eléctrico están representadas para la misma onda.



Con números complejos, tal onda se puede expresar como:

$$\vec{E} = \hat{i}E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B} = \hat{j}B_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (3)$$

donde hemos utilizado el producto punto del radiovector $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ con el vector de onda \vec{k} (que es paralelo a la dirección de propagación de la onda). También podemos escribir

$$\vec{E} = \hat{i}E_0 e^{ik(z - vt)}, \quad \vec{B} = \hat{j}B_0 e^{ik(z - vt)}, \quad (4)$$

donde hemos sustituido $\omega = kv$. Aquí, E_0 y B_0 pueden ser números complejos, de manera que $E_0 = |E_0|e^{i\varphi}$, entonces, E_0 es referido como la amplitud compleja y $\varphi = \arg E_0$ es la fase de la onda. Dado que el campo eléctrico de una onda electromagnética define inmediatamente también el campo magnético, en lo que sigue consideramos solo su campo eléctrico.

En la vida real, los frentes de onda no son necesariamente planos. En particular, una fuente puntual emite ondas esféricas y una fuente lineal emite ondas cilíndricas. Sin embargo, si la distancia a la fuente de onda de una forma arbitraria es mucho mayor que la longitud de onda, dentro de una pequeña vecindad de un punto de observación (de un radio de pocas longitudes de onda), la curvatura del frente de onda es despreciablemente pequeña². Debido a eso, la interferencia de las ondas curvadas se puede estudiar como la interferencia de ondas planas localmente. Aun así, se debe tener en cuenta un aspecto importante: mientras que, para las ondas planas, la amplitud de oscilación es constante en todo el espacio, para las ondas curvadas, la amplitud es una función de las coordenadas.

En particular, para las ondas esféricas, la amplitud es inversamente proporcional a la distancia desde la fuente puntual, ya que se sigue de la continuidad del flujo de energía. De hecho, la intensidad de la onda es proporcional a la amplitud de la onda cuadrada, $I \propto E_0^2$; el flujo de energía (es decir, la potencia de la radiación total transmitida a través de una superficie ficticia) es igual al producto de la intensidad, el área de la superficie y el coseno del ángulo entre el vector de onda y la normal de la superficie, $\mathcal{P} = IA \cos \phi$. Con el origen en la fuente puntual, consideremos el balance de energía para el volumen entre dos superficies esféricas concéntricas (de radios r_1 y r_2), dentro de un ángulo sólido Ω : el flujo de energía entrante es igual a $\Omega r_1^2 I_1$ y el saliente $\Omega r_2^2 I_2$. En un estado estacionario y suponiendo que no hay pérdida de energía debido a la disipación, estos dos flujos deben ser iguales, es decir, $I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2$ y por lo tanto, $E \propto \sqrt{I} \propto 1/r$. Del mismo modo, para una onda cilíndrica $E \propto 1/\sqrt{r}$.

Mientras la velocidad de propagación sea constante, por ejemplo, en el vacío con $v = c$, cualquier pulso electromagnético se propagará con una forma constante (ver apéndice 1):

$$\vec{E} = \hat{i}E(z - vt), \quad \vec{B} = \hat{j}E(z - vt)/v$$

¹Un frente de onda se define como el conjunto de puntos con fase de oscilación constante (por ejemplo, crestas de onda).

²A menos que una fuente cóncava haga que una onda que se enfoque cerca del punto de observación.

Sin embargo, si n en la ecuación (2) depende de la frecuencia angular ω , la forma del pulso cambiará con el tiempo, además, la velocidad del grupo será

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \frac{ck}{n(k(\omega))}, \quad (5)$$

que se conoce como la velocidad de grupo (entonces, ω/k produce la velocidad de una fase fija, por ejemplo, de una cresta de onda y se llama velocidad de fase).

Para entender por qué, consideremos la superposición de dos ondas pulsantes con vectores de onda $k - \Delta k$ y $k + \Delta k$, respectivamente:

$$e^{i[(k-\Delta k)z - (\omega - \Delta\omega)t]} + e^{i[(k+\Delta k)z - (\omega + \Delta\omega)t]} = e^{i(kz - \omega)t} \left[e^{-i(\Delta kz - \Delta\omega)t} + e^{i(\Delta kz - \Delta\omega)t} \right] = 2e^{i(kz - \omega)t} \cos(\Delta kz - \Delta\omega t).$$

Aquí, el primer factor $e^{i(kz - \omega)t}$ corresponde a la propia onda y el segundo factor $\cos(\Delta kz - \Delta\omega t)$ describe su envoltura; la velocidad de la envoltura es $v_g = \Delta\omega / \Delta k$.

En lo que sigue, consideramos solamente **ondas monocromáticas**, es decir, ondas sinusoidales de una frecuencia fija ω . Esto se debe a que estudiaremos la interferencia de las ondas de luz y, por lo general, se puede observar un patrón de interferencia solo para los rayos de luz que se originan en una sola fuente (esto se explicará con más detalle a continuación). Ahora, si todas las ondas se originan en la misma fuente, también deben tener la misma frecuencia³. Tenga en cuenta que si la onda entra en un medio transparente refractivo, la longitud de onda puede cambiar, pero la frecuencia permanece constante.

Hecho 1: La frecuencia de una onda permanece constante a lo largo de toda su trayectoria si la velocidad de onda v depende solo de las coordenadas y no del tiempo (para la luz: si $n = n(x, y, z)$ no depende del tiempo).

De hecho, el tiempo requerido para que una cresta de onda viaje desde la fuente a un punto de destino está definido por la integral $\int \frac{dl}{v(x, y, z)}$, tomada sobre la trayectoria de onda que permanece constante en el tiempo; por lo tanto, el retraso de tiempo entre las crestas de onda vecinas en el destino sigue siendo igual al que había en la fuente.

También asumimos que la **longitud de coherencia** de las ondas es más grande que el tamaño del sistema. La longitud de coherencia es una distancia sobre la cual la onda “olvida” su fase. Uno puede imaginar que tiene un senoide con una longitud de onda ligeramente variable; a cierta distancia, las variaciones se acumulan en un error tal que la diferencia de fase entre esta onda y un senoide ideal será del orden de π (que corresponde a una fase opuesta). Para las fuentes de luz distintas de los láseres, la longitud de coherencia es corta; para los láseres, puede alcanzar los valores alrededor de decenas de metros.

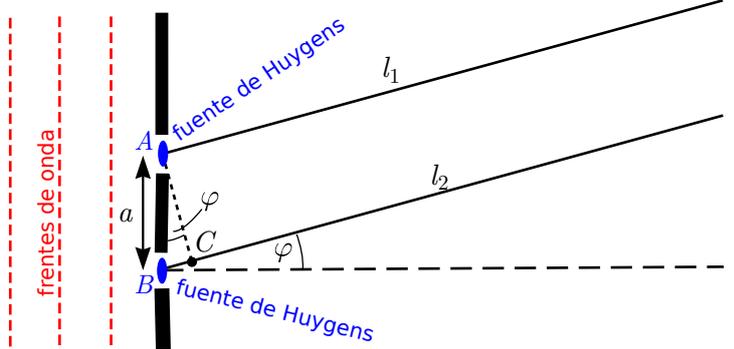
Hecho 2: (El principio de Huygens). Considere una propagación de onda arbitraria, por la cual se conoce un cierto frente de onda. La onda se propaga más allá de ese frente de onda de la misma manera que se propagaría si se colocara un grupo denso de puntos de pequeñas fuentes de onda a lo largo del frente de onda.

³La fuente puede emitir diferentes frecuencias, pero dicha radiación se puede descomponer en una superposición de ondas sinusoidales como en el análisis de Fourier.

Este hecho es la principal herramienta para calcular los patrones de difracción en la mayoría de los casos. Analicemos esto utilizando el ejemplo de difracción de doble rendija (para algunos problemas, incluido el primero, se proporcionan soluciones después del texto del problema).

Pr 1. Considere una lámina opaca con dos rendijas estrechas paralelas (mucho más estrechas que la longitud de onda) a una distancia de a entre sí. Un haz de luz paralelo es dirigido perpendicularmente sobre esa lámina. Encuentre el patrón de difracción detrás de la lámina: los ángulos de propagación para los cuales hay una intensidad de luz máxima $\varphi_{\text{máx}}$ y mínimos $\varphi_{\text{mín}}$, así como la distribución de intensidad como una función del ángulo φ .

La lámina bloquea casi todo el frente de onda de la onda original, dejando solo dos puntos en una sección transversal perpendicular a las ranuras (vea la figura a continuación). Para ser precisos, estos son realmente segmentos, pero su tamaño es mucho más pequeño que la longitud de onda; por lo tanto, desde el punto de vista de la propagación de ondas, los segmentos pueden considerarse como puntos. De acuerdo con el principio de Huygens, dos fuentes puntuales de ondas electromagnéticas de longitud de onda λ se ubicarán en estos dos puntos (A y B). Las fuentes puntuales irradian ondas en todas las direcciones y debemos encontrar la interferencia de esta simplificación. Estudiemos lo que se observará en una pantalla lejana donde se encuentran dos rayos paralelos (dibujados en la figura).



Para empezar, es bastante fácil averiguar dónde están los máximos y mínimos de intensidad. De hecho, como se puede ver en la figura anterior, la diferencia de la trayectoria óptica entre los dos rayos es $\Delta l = a \sin \varphi$. Los dos rayos se suman constructivamente (dando lugar a una intensidad máxima) si las dos ondas llegan a la pantalla en la misma fase, es decir, un número entero de longitudes de onda encaja en el intervalo: $\Delta l = n\lambda$. Del mismo modo, hay un mínimo si las ondas llegan en una fase opuesta:

$$\sin \varphi_{\text{máx}} = n\lambda/a, \quad \sin \varphi_{\text{mín}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda/a. \quad (6)$$

Ahora, procedamos con el cálculo de la distribución de intensidad.

Método 1: El cálculo cuantitativo de los patrones de interferencia se realiza más convenientemente sumando las amplitudes complejas de las ondas interferentes (de manera similar a las corrientes y voltajes alternos). Matemáticamente, si las amplitudes de onda de M que interfieren son a_m , $m = 1, 2, \dots, M$ y

las trayectorias ópticas correspondientes se indican con l_m , la amplitud compleja de la onda resultante es

$$a = \sum_m a_m e^{ikl_m}.$$

Tenga en cuenta que los números complejos se pueden considerar como vectores bidimensionales (las coordenadas x y y de las cuales son sus partes reales e imaginarias, respectivamente); por eso, alternativamente, se pueden usar diagramas vectoriales (cada onda está representada por un vector, cuya longitud refleja la amplitud de la onda y la dirección de la fase de la onda). Aquí, las amplitudes a_m son proporcionales a los tamaños de las fuentes de Huygens. En el caso de la geometría tridimensional, son inversamente proporcionales a la distancia l_m y en el caso de la geometría bidimensional, inversamente proporcional a $\sqrt{l_m}$.

Para entender el origen de la proporcionalidad al tamaño de la fuente, se pueden considerar dos fuentes cercanas idénticas: debido a la distancia insignificante, las ondas correspondientes tienen la misma fase y, por lo tanto, se suman en una onda de doble amplitud.

Cabe señalar que la formulación de este método ignora la dependencia de la amplitud de onda de las contribuciones de las fuentes de Huygens en la dirección de propagación. Esta aproximación es válida siempre que el ángulo entre la normal de la superficie de una fuente de Huygens y el vector que apunta al punto de observación sea pequeño (su coseno es aproximadamente igual a uno). Si este ángulo no es pequeño, por lo que, hablando estrictamente, no sería correcto descartar el factor dependiente del ángulo, al hacerlo se conservan las propiedades cualitativas del patrón de difracción si todos los haces contribuyentes se caracterizan por el mismo ángulo (como en el caso del problema 1), porque entonces, el factor dependiente del ángulo tiene el mismo valor para todos los rayos y se puede factorizar.

En el caso de ondas de luz que viajan en la dirección z , las amplitudes a_m y a deben ser interpretados como componentes en x o y de los campos E o B . No es importante, la cantidad que se considera, porque mientras no haya *refracción doble*, para cualquier onda contribuyente, no hay cambio de fase entre E_x , E_y , B_x y B_y . Mientras tanto, para luz polarizada en materiales de doble refracción, las componentes en x y y deben estudiarse por separado: el cambio de fase dependerá del eje de oscilación; esto será discutido más adelante. Para evitar enfatizar qué campo se considera, en lo que sigue las amplitudes se denotarán con a . Recordemos que el módulo de la amplitud compleja da la amplitud real de la señal sinusoidal y el argumento de la misma da el cambio de fase. Por lo tanto, el campo real $a(x, t)$, en el punto dado en función del tiempo, está dado por

$$\text{Re}[a(l)e^{ikl} \cdot e^{-i\omega t}] = |a(l)| \cos[\omega t + \arg a(l)].$$

Generalmente, los valores de campo momentáneos de las ondas electromagnéticas nunca son necesarios: las oscilaciones son tan rápidas que lo que se mide es el promedio de la raíz cuadrada media. Por lo tanto, las únicas cosas de interés son el módulo del campo y su cambio de fase. Por eso **dejaremos de trabajar con las amplitudes complejas**; no hay necesidad de

anotar la dependencia espacio-temporal completa de la señal compleja $a(l)e^{i(kl-\omega t)}$ y no hay necesidad de añadir Re para separar su parte real que corresponde a una cantidad física real.

Entonces, en nuestra pantalla infinitamente remota, tenemos dos ondas $a_1(l_1)e^{ikl_1}$ y $a_2(l_2)e^{ikl_2}$ sumándose. La diferencia relativa entre l_1 y l_2 es pequeña; por lo tanto, la dependencia de la amplitud de la onda en la distancia afecta a ambas ondas de la misma manera, es decir, $|a_1(l_1)| = |a_2(l_2)|$. Las dos fuentes de Huygens están en el mismo frente de onda, lo que significa que, en las fuentes respectivas, no hay cambio de fase entre las ondas emitidas, por lo tanto, $\arg a_1(l_1) = \arg a_2(l_2)$; combinando los dos últimos resultados de igualdad $a_1(l_1) = a_1(l_2)$. Ya que estamos interesados en la intensidad relativa de la luz en la pantalla y no en cómo disminuye con l , podemos eliminar la dependencia $a(l) \propto 1/\sqrt{l}$ y denotar $a_1(l_1) = a_1(l_2) \equiv a$ (el signo “ \propto ” significa “proporcional a”). Finalmente, podemos combinar el término e^{ikl_1} en la amplitud compleja (esto solo hace girar la amplitud compleja como $|e^{ikl_1}| = 1$) mediante la notación $ae^{ikl_1} = \tilde{a}$, en cuyo caso

$$ae^{ikl_2} = \tilde{a}e^{-ikl_1} \cdot e^{ikl_2} = \tilde{a}e^{ik(l_2-l_1)}$$

También podemos decir que las amplitudes son normalizadas a la amplitud de la onda de luz desde la primera rendija y poner $\tilde{a} = 1$ ⁴.

Entonces, la amplitud de superposición está dada por

$$E = 1 + e^{ik(l_2-l_1)}.$$

La intensidad es proporcional al cuadrado del módulo, que viene dado por el producto de E con conjugado. $\bar{E} = 1 + e^{-ik(l_2-l_1)}$;

$$I/I_0 = (1 + e^{ik(l_2-l_1)})(1 + e^{-ik(l_2-l_1)}) = 2 + e^{ik(l_2-l_1)} + e^{-ik(l_2-l_1)} = 2\{1 + \cos[k(l_2-l_1)]\};$$

aquí I_0 es la intensidad que se registraría en la pantalla cuando una de las ranuras está cerrada. Alternativamente, el cuadrado del módulo se puede calcular a través del teorema de Pitágoras como la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria: $\{1 + \cos[k(l_2-l_1)]\}^2 + \text{sen}^2[k(l_2-l_1)] = 2\{1 + \cos[k(l_2-l_1)]\}$.

Por último, si denotamos $l_2-l_1 = a \text{ sen } \varphi$, terminamos con:

$$I = 2I_0[1 + \cos(ka \text{ sen } \varphi)]. \quad (7)$$

Ahora también podemos recuperar el resultado anterior (6) respecto a las posiciones de los mínimos (el coseno da -1 e $I = 0$) y los máximos (el coseno da $+1$ y la intensidad se cuadruplica): para mínimos, $ka \text{ sen } \varphi = (2n+1)\pi$ y, para máximos, $ka \text{ sen } \varphi = 2n\pi$.

Tenga en cuenta que si hubiera fuentes de luz incoherentes en A y B , habría habido un cambio de fase adicional dependiente del tiempo $\psi(t)$ que debería haber sido añadido al cambio de fase $ka \text{ sen } \varphi$. Debido a la diferencia de trayectoria óptica. En ese caso, $I = 2I_0\{1 + \cos[ka \text{ sen } \varphi + \psi(t)]\}$; debido a la fase fluctuante $\psi(t)$, los máximos de difracción (y los mínimos) se moverían tan rápido que los ojos humanos solo registrarían el valor medio de la intensidad, $\langle 2I_0\{1 + \cos[ka \text{ sen } \varphi + \psi(t)]\} \rangle = 2I_0\{1 + \langle \cos[ka \text{ sen } \varphi + \psi(t)] \rangle\} = 2I_0$; aquí los paréntesis angulares denotan el promedio de la cantidad interior y el coseno promediado da cero.

Con respecto a las fluctuaciones de los patrones de interferencia de fuentes de luz incoherentes, podemos hacer una estimación simple: imaginemos dos fuentes puntuales de luz

⁴Al resolver problemas de óptica de onda, este párrafo se puede resumir como en la oración: “a grandes distancias, las ondas contribuyentes tienen amplitudes iguales que se normalizarán a la amplitud de una sola onda”.

monocromática, por ejemplo, de dos láseres con una longitud de coherencia de $l = 10\text{ m}$ y longitud de onda $\lambda_1 = 658\text{ nm}$. Entonces el tiempo de coherencia $\tau = l/c \approx 3 \times 10^{-8}\text{ s}$ nos da el tiempo de fluctuación de la fase aleatoria $\psi(t)$ y también la escala de tiempo característica durante la cual el patrón de difracción fluctúa. Esto va más allá de lo que un ojo humano puede captar: veremos una imagen promediada sin ninguna franja de interferencia.

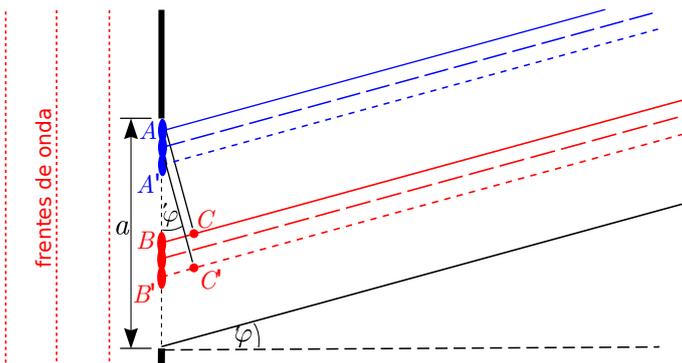
Entonces, mientras no estemos estudiando los fenómenos en una escala de tiempo ultra corta (física de picosegundos y atosegundos), para poder ver un patrón de interferencia, **la luz debe provenir de la misma fuente**, incluso en el caso de los láseres. Además, las diferencias de trayectoria óptica de los rayos interferentes no deben exceder la longitud de coherencia de la fuente de luz dada. En el caso de la interferencia de doble rendija, es suficiente si la luz es dirigida a las rendijas desde la misma fuente puntual, no necesariamente un láser. Por otro lado, si no es una fuente puntual y es más bien una bombilla con un tamaño considerable, la longitud de coherencia puede ser demasiado corta para poder observar una interferencia de dos rendijas; una guía práctica aquí es que el tamaño angular de la fuente de luz debe ser más pequeño que la distancia angular entre los máximos de difracción (de lo contrario, dos mitades incoherentes de la fuente darían lugar a dos patrones de difracción desplazados que se difuminan debido a la superposición).

Pr 2. Considere la misma situación que en el caso del problema 1, sin embargo, con tres rendijas a la misma distancia a de cada uno. Encuentre las posiciones de mínima y máxima de difracción.

Pr 3. Demuestre que para tres rendijas paralelas de igual tamaño y con distancias entre rendijas adyacentes iguales a a y b respectivamente, la intensidad en los mínimos de difracción no es cero a menos que $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$, donde n y m son enteros y nm es un múltiplo de tres.

2. DIFRACCIÓN DE UNA RENDIJA Y DE REJILLA

Pr 4. Considere una lámina opaca con una rendija de ancho a . Un haz de luz es dirigido a esta rendija. Encuentre el patrón de difracción detrás de la lámina: los ángulos de propagación para los cuales hay máximos $\varphi_{\text{máx}}$ y mínimos $\varphi_{\text{mín}}$, así como la distribución de intensidad en función del ángulo φ .



Para empezar, encontremos las posiciones de los mínimos de difracción (donde la intensidad es cero). Para este fin, dividamos (ficticiamente) la rendija en dos mitades; las fuentes de Huygens de la mitad superior están marcadas con azul y las de la mitad inferior con rojo, vea la figura. Si la longitud del segmento BC es igual a la mitad de un entero múltiplo de la longitud de onda, entonces las contribuciones de las fuentes roja y azul (de A y B) se cancelan; lo mismo se aplica a cualquier otro par de puntos que coinciden con el orden anterior, por ejemplo, para puntos A' y B' . De hecho, la diferencia de trayectoria óptica correspondiente $|B'C'| = |BC|$. Por lo tanto, las contribuciones de todas las fuentes rojas y azules se cancelarán por pares, entonces la intensidad es cero si

$$\frac{a}{2} \text{sen } \varphi_{\text{mín}} = \lambda \left(n + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow a \text{sen } \varphi_{\text{mín}} = \lambda(2n + 1).$$

A continuación, dividimos la rendija en cuatro segmentos; luego en ocho segmentos, etc., en general, en 2^m segmentos; como resultado, encontramos que se observa una intensidad cero para

$$a \text{sen } \varphi_{\text{mín}} = \lambda 2^{m-1}(2n + 1).$$

Uno puede ver que aquí el factor de λ puede tomar todos los valores enteros excepto cero⁵; entonces, podemos escribir

$$a \text{sen } \varphi_{\text{mín}} = n\lambda \quad n \neq 0.$$

Este resultado significa que la intensidad máxima principal (en $\varphi = 0$) tiene grosor doble.

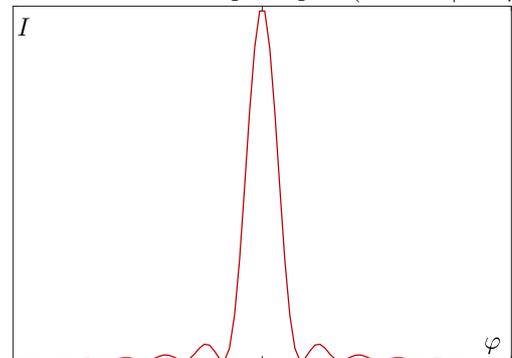
Para encontrar la distribución de intensidad detrás de la rendija, necesitamos integrar las fuentes de Huygens. Tomemos el eje x como la línea AB , con el origen en B (es decir, en el centro de la ranura). Luego, cada contribución de la fuente de Huygens a la amplitud de onda neta es E proporcional a su longitud dx ; la diferencia de trayectoria óptica de esta onda con respecto a la onda que llega desde B está dada por $\Delta = x \text{sen } \varphi$, que corresponde al cambio de fase $x \text{sen } \varphi$. Por lo tanto, la suma de todas las ondas se puede escribir como:

$$E \propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ikx \text{sen } \varphi} dx = \frac{e^{i\frac{ak}{2} \text{sen } \varphi} - e^{-i\frac{ak}{2} \text{sen } \varphi}}{ik \text{sen } \varphi} = \frac{2 \text{sen}(\frac{ak}{2} \text{sen } \varphi)}{k \text{sen } \varphi}.$$

La intensidad es proporcional a la amplitud al cuadrado, por lo que

$$I \propto \left[\frac{\text{sen}(\frac{ak}{2} \text{sen } \varphi)}{\text{sen } \varphi} \right]^2$$

(Hemos ignorado factores constantes 4 y k^{-2}). Esta dependencia se muestra en la siguiente figura. Preste atención al hecho de que la mayoría de la energía luminosa se localiza en el máximo principal (entre $a|\text{sen } \varphi| < \lambda$).



Desde el punto de vista práctico, un caso importante es la difracción detrás de una abertura circular de diámetro d , esto ocurrirá en el caso de dispositivos ópticos como lentes, telescopios y microscopios. Encontrar la difracción detrás de una

⁵ $m = 1$ da todos los números impares; $m = 2$ da todos esos números pares que dan un residuo 2 si se divide por 4, etc.

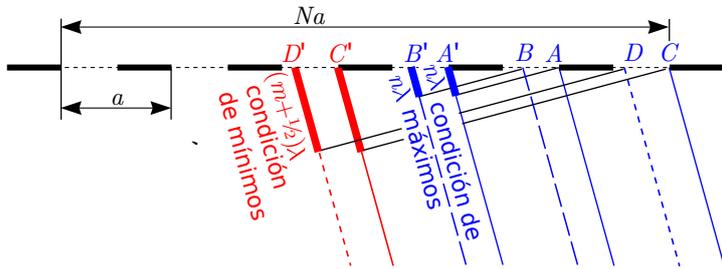
abertura circular de diámetro d es una tarea matemáticamente mucho más desafiante que involucra las funciones de Bessel; sucede que para $\lambda \ll d$, se observa la primera intensidad mínima para el ángulo $\varphi \approx 1,22 \lambda/d$.

Supongamos que la lente frontal de un telescopio (la *apertura*) tiene un diámetro d y crea una imagen de una estrella gemela, a la distancia angular entre las estrellas α . Puede ser confuso que tengamos dos efectos: la difracción en una apertura circular y la convergencia de rayos debida a la lente. Afortunadamente, estos dos efectos se pueden desacoplar: supongamos que retiramos la lente; luego, la apertura circular creará un patrón de difracción en una 'pantalla' infinitamente remota. Ahora, "devolvemos" la lente, que crea la imagen de ese patrón infinitamente remoto en su plano focal de acuerdo con las reglas de la óptica geométrica.

Se dice que las imágenes de las dos estrellas se resuelven si el centro de la imagen de una estrella se encuentra más allá de la primera intensidad mínima del patrón de difracción de la otra estrella. De acuerdo con la posición angular del primer mínimo de difracción detrás de un orificio circular, esto significa que el telescopio resuelve distancias angulares mayores que $1,22 \lambda/d$.

A continuación, consideremos una rejilla de difracción, que tiene N rendijas, ranuras adyacentes están a una distancia a .

Pr 5. Calcule el patrón de difracción detrás de una rejilla de difracción asumiendo que el ancho de la ranura es la mitad del paso de la rejilla a .



Los máximos principales detrás de una rejilla se pueden encontrar a partir de la condición de que las contribuciones de las ranuras adyacentes lleguen a la misma fase: la longitud de las líneas azules gruesas en la figura debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda, es decir,

$$a \text{ sen } \varphi_{\text{máx}} = n\lambda.$$

Aparte de los máximos principales, hay numerosos máximos laterales; al igual que en el caso de una difracción de una sola ranura, en lugar de encontrar las posiciones de estos máximos, es más fácil encontrar las posiciones de los mínimos; los máximos están justo entre los mínimos. El enfoque también es el mismo: dividimos toda la rejilla de difracción en dos mitades y consideramos la interferencia de las contribuciones de ambas mitades: la cancelación por pares de los rayos de luz tendrá lugar si la longitud de la línea roja gruesa es el medio de un entero múltiplo de la longitud de onda, es decir, $\frac{1}{2}aN \text{ sen } \varphi = (m + \frac{1}{2})\lambda$. Además, dividimos la rejilla en cuatro, ocho, etc., piezas para concluir que los mínimos (con intensidad cero) se observan para $aN \text{ sen } \varphi_{\text{mín}} = m\lambda$, donde el entero $m \neq nN$ ($m = nN$ corresponde al enésimo máximo principal).

Para calcular la distribución de intensidad detrás de una rejilla de este tipo, podemos resumir las contribuciones de las

rendijas individuales. Para el ángulo de observación φ , podemos usar la expresión para el campo eléctrico creado por una única rendija que se calculó anteriormente (necesitamos sustituir a con $a/2$):

$$E_0 = \frac{\text{sen}(\frac{ak}{4} \text{ sen } \varphi)}{\text{sen } \varphi}.$$

Las rendijas adyacentes tienen una diferencia de trayectoria óptica adicional $a \text{ sen } \varphi$, que corresponde al cambio de fase $ka \text{ sen } \varphi$ y puede ser reflejado por un término adicional $e^{ika \text{ sen } \varphi}$ para la compleja amplitud del campo eléctrico. Así,

$$E = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \frac{\text{sen}(\frac{ak}{4} \text{ sen } \varphi)}{\text{sen } \varphi} e^{ikan \text{ sen } \varphi} = \frac{\text{sen}(\frac{ak}{4} \text{ sen } \varphi)}{\text{sen } \varphi} \sum_{n=-N/2}^{N/2} e^{ikan \text{ sen } \varphi}.$$

Esta es una progresión geométrica y la suma se puede calcular fácilmente como:

$$E = \frac{\text{sen}(\frac{ak}{4} \text{ sen } \varphi)}{\text{sen } \varphi} \frac{e^{ika(\frac{N}{2}+1) \text{ sen } \varphi} - e^{-ika\frac{N}{2} \text{ sen } \varphi}}{e^{-ika \text{ sen } \varphi} - 1} = \frac{\text{sen}(\frac{ak}{4} \text{ sen } \varphi)}{\text{sen } \varphi} \cdot \frac{\text{sen}(ka\frac{N+1}{2} \text{ sen } \varphi)}{\text{sen}(\frac{ka}{2} \text{ sen } \varphi)} = \frac{\text{sen}(ka\frac{N+1}{2} \text{ sen } \varphi)}{2 \text{ sen } \varphi \cos(\frac{ka}{4} \text{ sen } \varphi)}.$$

Las rejillas de difracción se usan a menudo como dispositivos espectrales para medir el espectro de una luz. En ese caso, es importante tener un buen poder de resolución.

Pr 6. Encuentre el poder de resolución de la difracción descrita por el problema anterior, es decir, determine el valor mínimo de $\Delta\lambda$, tal que dos líneas espectrales λ y $\lambda + \Delta\lambda$ se puedan resolver en tal rejilla.

En el caso de un telescopio, se asume que se resolvieron dos puntos, si el centro de una imagen se encuentra más allá de la primera intensidad mínima de la segunda imagen. En el caso de una rejilla, procedemos de la misma manera: dos líneas espectrales se resuelven, si el centro de una línea está más allá del mínimo de difracción más cercano de la otra línea. En el caso límite, estas dos cosas coinciden; considere que el centro de una línea del enésimo máximo principal esté en φ ; entonces

$$a \text{ sen } \varphi = n\lambda;$$

si esto coincide con el mínimo más cercano de la segunda línea espectral, entonces

$$aN \text{ sen } \varphi = (nN - 1) (\lambda + \Delta\lambda).$$

Podemos eliminar φ de estas dos ecuaciones para obtener

$$Nn\lambda = (nN - 1) (\lambda + \Delta\lambda);$$

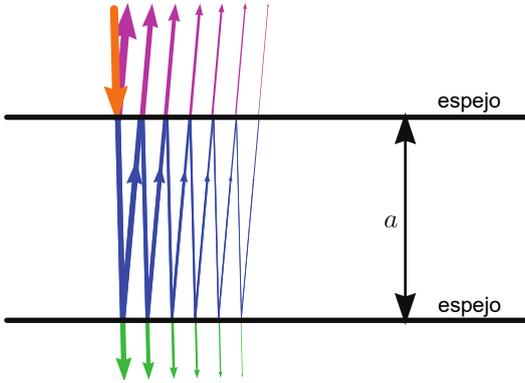
al abrir las llaves y despreciar el término $\Delta\lambda$ para $N \gg 1$, obtenemos

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nn.$$

Preste atención a que, en el lado derecho de esta expresión, nN sea igual al número de longitudes de onda que se ajustan a la diferencia de la trayectoria óptica entre la trayectoria más corta y la más larga a través de nuestro dispositivo espectral (para la dirección en la que se observa el enésimo máximo principal). Este es un resultado genérico, aplicable a cualquier dispositivo espectral, por ejemplo, a un interferómetro de *Fabry-Pérot* o a una *red de difracción*.

El último resultado implica que el mayor tamaño físico de una rejilla proporciona un mejor poder de resolución. Sin embargo, este no es siempre el caso en la práctica. La razón es que la fórmula derivada anterior supone que la rejilla es ideal, con un espaciado entre ranuras estrictamente constante. Sin embargo, en la práctica, el espaciado puede fluctuar y, en ese caso, el factor limitante será la longitud de la coherencia de las franjas (la longitud de l) que puede cubrirse con franjas de N o $N + 1$, la incertidumbre se debe a las fluctuaciones del espaciado.

Pr 7. Calcule el poder de resolución de un interferómetro de Fabri-Pérot como un filtro espectral y encuentre su transmitancia espectral en función de la longitud de onda. Este interferómetro consta de dos superficies paralelas semitransparentes y semirreflectantes con una reflectividad muy alta R (esto da la fracción de energía luminosa que se refleja, en comparación con la energía del haz incidente), que están separadas por una distancia a .



El poder de resolución se puede estimar fácilmente utilizando la regla genérica mencionada anteriormente. El camino óptico más corto es el que atraviesa el interferómetro directamente sin ser reflejado; el más largo realiza muchas reflexiones. Estrictamente hablando, un haz de este tipo de reflejo múltiple no tiene un límite de longitud superior, pero demasiados reflejos conducen a una intensidad nula. Un haz participará de manera eficiente en la difracción, si su intensidad no es mucho menor que la de los otros haces. El número de reflexiones se puede estimar como $N \approx \frac{1}{1-R} \gg 1$. De hecho, sobre N reflexiones, la intensidad restante de la luz se reduce en un factor de R^N ; tomemos el valor límite para que este factor sea e^{-1} . Entonces $R^N \approx e^{-1}$ desde el cual $N \approx -\frac{1}{\ln R} \approx \frac{1}{1-R}$. Así, obtenemos

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx \frac{1}{1-R}$$

La transmitancia espectral se puede encontrar de dos maneras. La primera forma es sumar las contribuciones de varias reflexiones usando la fórmula para una progresión geométrica. La segunda forma es combinar todas las ondas que se propagan hacia arriba en una sola onda y todas las ondas que se propagan hacia abajo en otra onda. Luego, las amplitudes de estas ondas efectivas pueden adaptarse entre sí a través de la condición de reflexión (ver más abajo) y eventualmente expresarse en términos de la amplitud de la onda incidente. Este enfoque es válido debido a la siguiente idea.

Idea 1: La suma de varias ondas sinusoidales de igual longi-

tud de onda que se propagan en la misma dirección es también una onda sinusoidal que se propaga en la misma dirección.

Tomemos N ondas sinusoidales y represente la n -ésima onda en una forma compleja como

$$a_n(z) = A_n e^{i(kz - \omega t)},$$

donde A_n es una amplitud compleja. Entonces, la suma de las ondas está dada por

$$a(x) = \sum_n A_n e^{i(kz - \omega t)}.$$

El término exponencial es el mismo para todas las ondas y, por lo tanto, puede factorizarse (y sacarse de la suma):

$$a(x) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_n A_n.$$

Ahora, $\sum_n A_n$ es un número complejo, denotémoslo por A . Entonces, $a(z) = A e^{i(kz - \omega t)}$, es decir, tenemos una onda con la misma longitud de onda y la misma dirección de propagación que las ondas componentes.

Por lo tanto, podemos combinar todas las ondas de movimiento ascendente púrpuras (ver la figura de arriba) en una sola onda de amplitud E_r y todas las ondas de movimiento descendente verdes en una sola onda E_t (índices t y r para “transmitido” y “reflejado”). De manera similar, podemos combinar todas las ondas azules hacia arriba en E_a y todas las ondas azules hacia abajo en E_d . Finalmente, denotemos la amplitud de la onda incidente (la roja) se por E_i . Entonces podemos decir que E_t es la parte transmitida de E_d y E_a es la parte reflejada de E_d :

$$E_t = \sqrt{1-R} E_d, \quad E_a = \sqrt{R} E_d.$$

Tenga en cuenta que necesitamos una raíz cuadrada porque la reflectividad R y la transmitancia $1-R$ están relacionadas con la intensidad (tratamos con las amplitudes, que son proporcionales a la raíz cuadrada de la intensidad). Además, E_d se compone de la parte transmitida de E_i y la parte reflejada de E_a . Ahora debemos prestar atención al cambio de fase entre estas tres amplitudes complejas. El cambio de fase de una onda se cambiará en kl , si cambiamos el origen en la distancia l ; ya que la “onda azul descendente” y la “onda incidente naranja” se propagan en diferentes regiones (no superpuestas), podemos usar diferentes orígenes para ellos y hacer que el desplazamiento de fase de ambas ondas sea igual a cero. Por lo tanto, podemos asumir que la componente transmitida de E_i contribuye a la amplitud compleja de la “onda descendente azul” sin cambio de fase⁶, con $\sqrt{1-R} E_i$. Luego, al viajar hacia abajo y hacia arriba, la longitud del camino óptico acumulada por la onda azul es igual a $2a$ y, por lo tanto, la componente reflejada de E_a viene con un factor e^{2ika} en su fase:

$$E_d = \sqrt{1-R} E_i + \sqrt{R} E_a e^{2ika}.$$

Usando estas tres ecuaciones, podemos expresar E_t en términos de E_i . En efecto, $E_d = E_t / \sqrt{1-R}$ y $E_a = E_t \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{1-R}}$; así,

$$\frac{E_t}{\sqrt{1-R}} = \sqrt{1-R} E_i + \frac{R}{\sqrt{1-R}} E_t e^{2ika},$$

de donde

$$E_t (1 - R e^{2ika}) = (1-R) E_i \Rightarrow E_t = \frac{1-R}{1 - R e^{2ika}} E_i.$$

Por definición, la transmitancia efectiva es $t = |E_t|^2 / |E_i|^2 = E_t \bar{E}_t / E_i \bar{E}_i$; por lo tanto,

$$t = \frac{1-R}{1 - R e^{2ika}} \cdot \frac{1-R}{1 - R e^{-2ika}} = \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos(2ka)}.$$

⁶El espejo semitransparente puede causar un cambio de fase, pero en ese caso, usamos sistemas de coordenadas apropiadamente desplazados para la región interior.

Prestemos atención al hecho de que, en la transmisión máxima, $t = 1$ y, en la transmisión mínima, $t = \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$.

La onda reflejada (la púrpura que se mueve hacia arriba) se puede encontrar en la ley de conservación de energía: la reflectividad efectiva $r = 1 - t$. Se puede encontrar alternativamente como la superposición de la parte reflejada de E_i y la parte transmitida de E_a . Sin embargo, aquí debemos tener en cuenta los cambios de fase adicionales durante las reflexiones.

Hecho 3: Si la onda electromagnética se refleja desde la interfaz de dos medios dieléctricos, se reflejará parcialmente y se refractará parcialmente (siempre que no sea una reflexión interna total); en un medio ópticamente menos denso la onda reflejada obtiene un cambio de fase adicional de π en la interfaz. No hay cambio de fase para otras ondas (ondas refractadas y un haz reflejado en el medio ópticamente más denso).

La reflexión parcial puede tener lugar en varias interfaces, por ejemplo, en películas metálicas muy finas. Se puede probar usando la ley de conservación de energía que, independientemente del tipo de interfaz que exista, la suma de los cambios de fase entre las ondas transmitidas y reflejadas (para ambas direcciones de la onda incidente) es igual a π . En el caso de una película metálica delgada, hay una simetría de espejo, por lo que los cambios de fase no pueden depender de la dirección de incidencia y, por lo tanto, el cambio de fase entre las ondas transmitidas y reflejadas es $\pi/2$.

Pr 8. Demuestre que para una interfaz arbitraria semireflejante sin disipación, la suma de los cambios de fase entre las ondas transmitidas y reflejadas para ambas direcciones de la onda incidente es igual a π .

Volviendo al caso del interferómetro Fabri-Pérot, se puede suponer que los espejos son dieléctricos y entre los espejos hay un medio ópticamente más denso. Luego, hay un cambio de fase π entre las ondas roja y púrpura (ver la figura de arriba), de modo que $E_r = \sqrt{1-R}E_a e^{2ika} - \sqrt{R}E_i$.

3. REFLEXIÓN DE BRAGG

La interacción de los rayos X con la materia ordinaria suele ser muy débil. Esto se debe a que la frecuencia de los rayos X es mucho mayor que la frecuencia natural de los electrones alrededor de los átomos y las moléculas. Lo que sucede es completamente análogo a la resonancia mecánica que se describe por su ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -kx + f_0 \cos(\omega t),$$

donde m es la masa de una partícula unida a un resorte de rigidez k , x es el desplazamiento de la partícula y $f_0 e^{i\omega t}$ es una fuerza externa.

Si la frecuencia de la fuerza externa es cercana a la frecuencia natural de un oscilador, la amplitud de la oscilación será muy grande; para frecuencias bajas, el oscilador adoptará una posición de casi equilibrio: el desplazamiento del sistema viene dado por el valor momentáneo de la fuerza, $x = f_0 \cos(\omega t)/k$. Para frecuencias muy altas, la fuerza de deformación del resorte jugará un papel insignificante y el oscilador se comportará como una partícula libre, $m\ddot{x} = f_0 \cos(\omega t)$, que se puede integrar dos veces para llegar a $x = -f_0 \cos(\omega t)/\omega^2$. Este resultado

significa que la amplitud de la oscilación disminuirá de manera inversamente proporcional a la frecuencia al cuadrado y el vector de desplazamiento del oscilador estará en la fase opuesta con la fuerza.

En el caso de las ondas electromagnéticas de baja frecuencia (como las ondas de radio), la frecuencia de la fuerza externa es mucho menor que las frecuencias naturales de los electrones, las moléculas se deformarán y polarizarán exactamente de la misma manera que cuando se colocan en campos electrostáticos. Por lo tanto, la permeabilidad dieléctrica dependiente de la frecuencia toma un valor estacionario. El índice de refracción del agua para tales ondas en particular es $n = \sqrt{\epsilon(0)} \approx 9$.

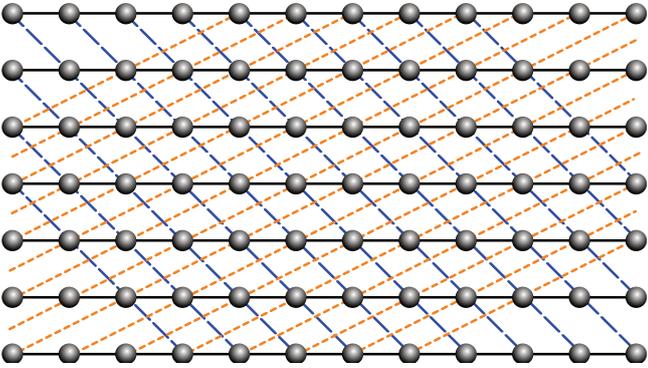
Cerca de las frecuencias naturales (casi en resonancia), la energía de la onda se conduce a las oscilaciones de los electrones, lo que crea disipación, es decir, la materia se vuelve opaca. Para frecuencias mucho más altas que las frecuencias naturales de los electrones orbitales (por ejemplo, para rayos X), los electrones responden a la fuerza externa de la misma manera que los electrones libres (separados de las moléculas). De hecho, las frecuencias naturales son del mismo orden de magnitud que la frecuencia de rotación orbital, lo que significa que durante un período de forzamiento, el desplazamiento orbital de los electrones permanece mucho más pequeño que el radio orbital. Hemos visto arriba que para una partícula libre en un campo de fuerza sinusoidal, el desplazamiento está en la fase opuesta con la fuerza externa. En el caso de las frecuencias bajas, el desplazamiento se encuentra en la misma fase con la fuerza externa, lo que conduce a una disminución del campo eléctrico general debido a la polarización de las moléculas; este efecto es descrito por la permeabilidad dieléctrica relativa $\epsilon > 1$. En el caso de frecuencias altas, el efecto es opuesto, por lo tanto $\epsilon(\omega) < 1$ y también $n(\omega) = \sqrt{\epsilon} < 1$. Tales valores implican que la velocidad de fase de la luz sea $v = c/n > c$, que puede parecer estar en contradicción con la teoría de la relatividad; sin embargo, la restricción relativista se aplica solo a la tasa de transferencia de energía e información, que viene dada por la *velocidad de grupo* de ondas electromagnéticas.

A diferencia de lo que ocurre con los rayos gamma, la frecuencia de los rayos X es más baja que la frecuencia natural de los modos de oscilación nuclear, por lo que interactúan solo con los electrones orbitales (para ser correctos, interactúan con todo el núcleo como con las partículas cargadas, pero la masa de un núcleo es mucho más grande que la masa de electrones, por lo que la interacción es mucho más eficiente en el caso de los electrones). Como hemos argumentado, los electrones se comportan como partículas libres, por lo tanto, la fuerza de interacción se define solo por la densidad de volumen de los electrones: una mayor densidad de electrones implica un mayor valor de $n - 1$. Esta es la razón por la cual el iridio en particular se usa para los espejos de los telescopios de rayos X (aunque $n - 1$ sigue siendo pequeño se puede lograr una reflexión interna total para ángulos de incidencia pequeños).

Una refracción débil no es la única forma en que los rayos X pueden interactuar con la materia. También existe la posibilidad de que sean absorbidos o desviados de los electrones; en ese caso, un haz de rayos X se comporta como un haz de partículas (fotones), que chocan con los electrones (en el caso de la absorción, un electrón en un orbital inferior recibe la energía

del fotón y “salta” a un orbital libre). Estos son efectos probabilísticos; las probabilidades de desviación (o absorción) deben calcularse utilizando las ecuaciones de la mecánica cuántica. La desviación de los fotones en los electrones (cuando los electrones y los fotones se consideran bolas elásticas) se estudia en la guía de “Mecánica cuántica”; el cálculo de las probabilidades de desviación está fuera del alcance del programa de la IPHO.

Finalmente, los rayos X se pueden reflejar mediante una serie de iones organizados regularmente (presentes en los cristales); este fenómeno es llamado **reflexión de Bragg**. Según el modelo Bragg los **planos cristalinos** se comportan como superficies que reflejan débilmente (en su mayoría son transparentes). Los planos cristalinos son planos ficticios en los que se encuentra un gran número de iones (vea la figura de la red cúbica: las secciones transversales de los planos de cristal están representadas por un negro sólido, líneas de puntos azules y naranjas); los planos con mayor densidad de superficie iónica reflejan los rayos X de manera más eficiente (en la figura, las superficies marcadas con líneas negras sólidas tienen la densidad más alta).

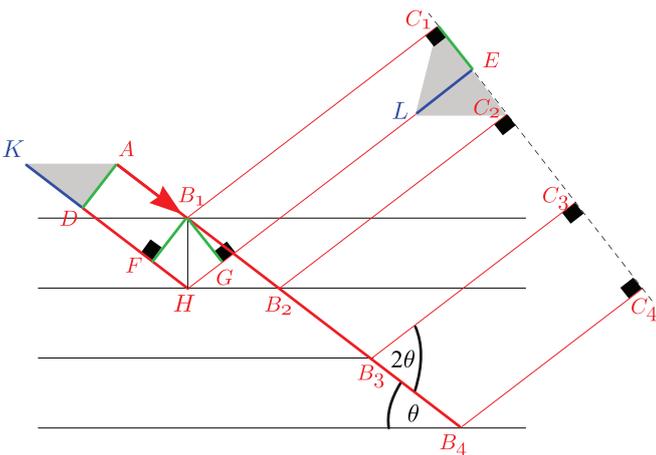


Aunque cada superficie refleja solo una pequeña cantidad de luz, si los reflejos de muchas superficies se suman en la misma fase, la luz reflejada total puede ser significativa; de hecho, casi toda la luz puede ser reflejada. Por lo tanto, la condición de la reflexión de Bragg es que las contribuciones de las superficies de cristal vecinas están en la misma fase, es decir,

$$\Delta l = |AB_2| + |B_2C_2| - |AB_1| + |B_1C_1| = n\lambda.$$

Calcular Δl se puede hacer de una manera más fácil, en lugar de estudiar los reflejos del mismo rayo AB_1 , consideremos diferentes rayos del haz incidente de rayos X, AB_1 y KH .

Idea 2: Los diferentes rayos del haz incidente tienen la misma fase en aquellos puntos que se encuentran en el mismo frente de onda. El frente de onda es una superficie perpendicular a los rayos.



Por lo tanto, las ondas incidentes tienen la misma fase en los puntos A y D ; lo mismo se aplica al par de puntos B_1 y F . Del mismo modo, para la onda reflejada, C_1 y E tienen la misma fase y B_1 y G también. Por lo tanto, la condición de reflexión Bragg se puede escribir como condición que

$$\Delta l = |FH| + |HG| = 2a \sin \theta = n\lambda,$$

donde a es la distancia entre los planos cristalinos vecinos. Esta es la fórmula principal para la condición de Bragg: los rayos X se reflejan en un cristal si el ángulo de incidencia θ entre los rayos X y el plano del cristal satisface la condición

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{2a}.$$

Preste atención al hecho de que, para el mismo cristal, a puede tomar diferentes valores y puede ser arbitrariamente pequeño (por ejemplo, en la figura anterior, los planos púrpuras están significativamente más cerca que los rojos). Sin embargo, siempre hay un valor máximo para a (corresponde a los planos rojos de arriba). Entonces, un cristal puede reflejar rayos X desde muchos ángulos, debido a los diferentes valores de a y n ; el valor más pequeño de θ corresponde a $n = 1$ y al valor más grande de a . Finalmente, no olvide que el ángulo por el cual se desvían los rayos X es igual a 2θ .

Nótese que la igualdad $|AB_2| + |B_2C_2| - |AB_1| - |B_1C_1| = |FH| + |HG|$ se puede verificar geoméricamente. En efecto; $|KH| + |HL| = |AB_2| + |B_2C_2|$; debido a la congruencia de los triángulos grises, $|KH| + |HL| = |DH| + |HE|$. Así, $|AB_2| + |B_2C_2| = |DH| + |HE|$, por ejemplo $|AB_2| + |B_2C_2| - |AB_1| - |B_1C_1| = |DH| + |HE| - |AB_1| - |B_1C_1| = |DH| + |HE| - |DF| - |GE| = |FH| + |HG|$.

4. POLARIZACIÓN Y REFRACCIÓN DOBLE

Hasta ahora hemos asumido implícitamente que la luz está polarizada linealmente, asumiendo un eje fijo (x) para la dirección del campo eléctrico. Sin embargo, la luz natural no está polarizada en la mayoría de los casos. Esto significa que la dirección del campo eléctrico fluctúa en el tiempo. Este es efectivamente otro aspecto de la incoherencia: después de un cierto período de tiempo (puede haber muchos períodos de onda, pero en segundos, todavía una cantidad muy pequeña). El campo eléctrico de la onda electromagnética “olvida” su dirección anterior y toma una nueva dirección arbitraria (perpendicular a la dirección de propagación, consulte la Sección 1). Esto sucede tan rápido que ni el ojo humano ni los dispositivos de medición comunes son capaces de discernir las direcciones momentáneas del campo eléctrico. Desde el punto de vista de la difracción estudiado anteriormente, esto no es realmente importante, ya que dos haces de luz coherentes (¡de la misma fuente!) tienen la misma dirección momentánea del campo eléctrico (siempre que la diferencia de trayectoria óptica de los haces no exceda la longitud de coherencia). Por lo tanto, la luz despolarizada es una onda electromagnética que tiene una dirección de fluctuación aleatoria del campo eléctrico.

Sin embargo, es posible tener luz, cuyo campo eléctrico es siempre paralelo a un eje fijo; el plano definido por este eje y la dirección de propagación se llama plano de polarización. En particular, cuando la luz es reflejada por una interfaz dieléctrica bajo el *ángulo de Brewster* $\alpha_B = \arctan n$, el haz reflejado está completamente polarizado (el campo eléctrico es paralelo a

la interfaz). En este caso, los haces reflejados y refractados son perpendiculares entre sí. El haz refractado también está polarizado, pero solo parcialmente (la mayor parte de la luz está polarizada perpendicularmente a la interfaz). La luz parcialmente polarizada se puede pensar como una superposición de dos ondas polarizadas incoherentes con planos de polarización perpendiculares.

La luz reflejada por una superficie dieléctrica siempre está algo polarizada y la componente despolarizada disminuye a medida que el ángulo de incidencia se acerca al ángulo de Brewster. Del mismo modo, la luz azul del cielo también está parcialmente polarizada. Esto se debe a que vemos la luz azul del cielo debido a la desviación de Rayleigh. Si consideramos un pequeño volumen de aire ficticio, el número de moléculas en él fluctúa un poco; si el número promedio (esperado) de moléculas es N , las fluctuaciones típicas en el número de moléculas son alrededor de \sqrt{N} . Entonces, las fluctuaciones relativas en la densidad del aire son del orden de $1/\sqrt{N}$: crecen con la disminución de N . La desviación del coeficiente de refracción n del aire desde la unidad es proporcional a la densidad del aire. Por lo tanto, pequeños volúmenes de aire ficticios se comportan como medios de diferentes coeficientes de refracción: hay una reflexión parcial desde estos límites de volumen. La cantidad de luz reflejada todavía es pequeña, porque la diferencia en n es pequeña. El efecto es más fuerte para volúmenes ficticios más pequeños, pero una onda no puede “discernir” nada más pequeño que *aproximadamente* un cuarto de la longitud de onda. Esta es la razón por la que el cielo es azul: la luz azul tiene una longitud de onda más corta y, por lo tanto, puede “ver” volúmenes más pequeños con mayores fluctuaciones en n que los otros componentes de la luz solar no pueden. Ahora, lo que vemos como un cielo azul es una luz reflejada por una “interfaz” dieléctrica, que está parcialmente polarizada. La polarización es la más fuerte para el ángulo de Brewster, cuando los haces reflejados y refractados son perpendiculares. Como n está muy cerca de uno, el haz refractado va casi a lo largo de una línea recta, paralela a un vector que apunta al Sol. Entonces, en el caso del ángulo de Brewster, la luz reflejada (desviada) es perpendicular a la dirección del Sol: si miras el cielo perpendicularmente al Sol, ves una luz azul fuertemente polarizada.

Hay materiales que tienen la llamada propiedad de doble refracción; para una luz polarizada linealmente, el coeficiente de refracción depende del plano de polarización. Además, algunos materiales son transparentes para un plano de polarización y opacos para el plano perpendicular. Estos materiales se usan para hacer polarizadores lineales, filtros que dejan pasar solo una luz que está polarizada en un plano específico. Cuando una luz despolarizada atraviesa un filtro de este tipo, la mitad de la energía luminosa se disipa (la luz que fue polarizada en una dirección incorrecta) y, en la salida, tenemos una luz completamente polarizada. Dichos filtros se utilizan en fotografía para reducir los reflejos de las superficies dieléctricas (como el agua o el vidrio); en el caso del ángulo de Brewster, los reflejos se pueden eliminar por completo. Además, estos filtros pueden oscurecer el cielo y eliminar la neblina azul que oculta objetos distantes (por ejemplo, montañas); no olvide que tal eliminación de neblina funciona mejor si el Sol está perpendicular a la

dirección de observación (ver arriba).

La reflexión de Brewster se puede utilizar para mediciones precisas del coeficiente de refracción. Por ejemplo, cuando una luz láser totalmente polarizada es dirigida sobre una superficie dieléctrica, el haz reflejado desaparece para el ángulo de Brewster α_B suponiendo que el plano de polarización de la luz láser es perpendicular a la superficie. Entonces, α_B se puede medir y n se encuentra como $n = \tan \alpha_B$.

Ahora, considere un caso en el que una luz polarizada es dirigida a un polarizador para que los planos de polarización formen un ángulo α . Considere que el plano de polarización del polarizador defina el eje x ; suponga que antes del polarizador, el vector de campo eléctrico en su máximo es \vec{E}_0 . Este vector se puede representar como una suma de dos vectores $\vec{E}_0 = \hat{i}E_0 \cos \alpha + \hat{j}E_0 \sin \alpha$, que representa la descomposición de la onda inicial en dos componentes polarizados perpendicularmente. El polarizador disipa completamente el componente y y en la salida tenemos un vector de amplitud de campo eléctrico igual a $\hat{i}E_0 \cos \alpha$ (\hat{i} y \hat{j} son los vectores unitarios a lo largo de los ejes x y y , respectivamente). Recordemos que la intensidad es proporcional a la amplitud al cuadrado; por lo tanto, la intensidad de la luz transmitida

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

que se conoce como la ley de Malus (I_0 es la intensidad de la luz polarizada entrante).

Pr 9. Consideremos dos polarizadores con planos de polarización perpendiculares. Un haz de luz despolarizado de intensidad I_0 es dirigido sobre dicho sistema y, por supuesto, no se puede detectar luz en la salida. Ahora, se inserta un tercer polarizador entre los dos polarizadores, de modo que forma un ángulo α con el plano de polarización del primer polarizador. ¿Cuál es la intensidad de la luz en la salida?

Aparte de la luz despolarizada y la luz polarizada linealmente, también hay una luz polarizada circularmente y una luz polarizada elípticamente. Estas pueden obtenerse a partir de la luz polarizada linealmente mediante el uso de placas refractivas dobles. Como se mencionó anteriormente, el coeficiente de refracción de los materiales de refracción doble depende del plano de polarización. En el caso de la llamada placa de cuarto de longitud de onda, este efecto conduce a la diferencia de trayectoria óptica entre dos componentes igual a $\frac{\lambda}{4}$. Consideremos los ejes x y y en el plano de la placa para que la luz polarizada en y se retrase con respecto a la polarizada en x por $\frac{\lambda}{4}$. Ahora consideremos que la luz polarizada linealmente es dirigida sobre dicha placa de modo que el plano de polarización forme un ángulo α con el eje x . Luego, en un cierto punto antes de la placa, la dependencia del tiempo de las componentes del campo eléctrico viene dada por

$$E_x = E_0 \cos \alpha \sin(\omega t), \quad E_y = E_0 \sin \alpha \sin(\omega t).$$

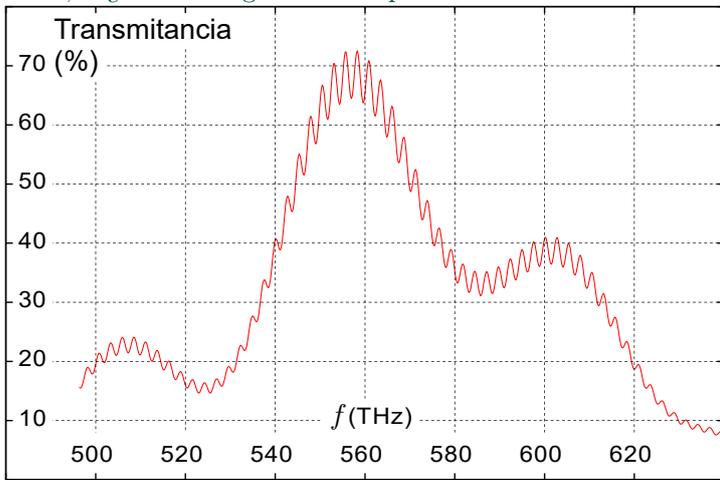
Así, en cualquier momento del tiempo, $E_y/E_x = \tan \alpha$, es decir, el vector del campo eléctrico oscila a lo largo de una línea $E_y = E_x \tan \alpha$. Después de la placa $E_x = E_0 \cos \alpha \sin\left(\varphi_0 + \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $E_y = E_0 \sin \alpha \sin(\varphi_0 + \omega t)$, donde φ_0 es la fase en función del punto de observación. De este sistema de ecuaciones, podemos obtener fácilmente

$$\left(\frac{E_x}{\cos \alpha}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{\sin \alpha}\right)^2 = E_0^2,$$

que es la ecuación de una elipse: el punto final del vector del campo eléctrico “dibuja” tal elipse. Por lo tanto, se dice que dicha luz está polarizada elípticamente; en el caso particular de $\alpha = \frac{\pi}{4}$, está polarizado circularmente.

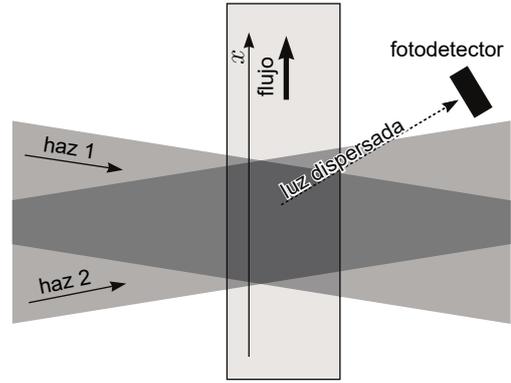
A veces es importante usar un polarizador lineal, pero para evitar la luz polarizada linealmente en la salida (por ejemplo, en las cámaras modernas se utilizan espejos semitransparentes para dividir la luz y si la luz está polarizada linealmente, el equilibrio entre las intensidades de los haces divididos se vuelven impredecibles). Luego, se une una placa de cuarto de longitud de onda a un polarizador para que la luz de salida se polarice circularmente; estos se llaman *polarizadores circulares*.

Pr 10. Una placa de vidrio grueso está recubierta por una película delgada y transparente. El espectro de transmisión del sistema se muestra en un gráfico (la luz es dirigida de manera normal a la placa). El índice de refracción de la película es $n \approx 1,3$. ¿Cuál es el grosor de la película d ?



Pr 11. El anemómetro es un dispositivo que mide el caudal de un gas o un fluido. Veamos la construcción de un simple anemómetro láser. En una tubería rectangular con paredes de vidrio finas fluye un fluido (índice de refracción $n = 1,3$), que contiene partículas que disipan la luz. Dos ondas planas coherentes con longitud de onda $\lambda = 515 \text{ nm}$ y un ángulo $\alpha = 4^\circ$ entre sus vectores de onda incidentes en una placa para que (a) la bisectriz del ángulo entre los vectores de onda sea normal a una pared de la tubería y (b) la tubería sea paralela al plano definido por los vectores de onda. Detrás de la tubería hay un fotodetector que mide la frecuencia de los cambios en la intensidad de la luz dispersada.

- (i) ¿Qué tan largo es el período (espacial) Δ del patrón de interferencia creado a lo largo del eje x (vea la figura)?
- (ii) Considere que la frecuencia de oscilación de la señal del fotómetro sea $\nu = 50 \text{ kHz}$. ¿Cuál es la velocidad del fluido v ? ¿Qué se puede decir acerca de la dirección del flujo de fluido?
- (iii) Consideremos una situación, cuando las longitudes de onda de las ondas planas difieren en $\delta\lambda = 4,40 \text{ fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones de la señal ahora (la velocidad del fluido es la misma que en la sección anterior)? ¿Es posible determinar la dirección del flujo con un dispositivo de este tipo?



Pr 12. Los telescopios permiten ver las estrellas a la luz del día, estudiemos el problema con más detalle. Considere un modelo simplificado del ojo: una lente única con distancia focal $f = 4 \text{ cm}$ y diámetro $d = 3 \text{ mm}$ creando una imagen en pantalla (retina). El modelo de un telescopio es similar: una lente de distancia focal $F = 2 \text{ m}$ y diámetro $D = 20 \text{ cm}$ creando una imagen en el plano focal (donde, por ejemplo, se puede poner una película). En sus cálculos, se pueden usar las siguientes cantidades: la intensidad irradiada del sol w_0 ; la razón de las distancias de la estrella y la del sol $q = 4 \times 10^5$ (asumimos que la estrella es idéntica al Sol); el diámetro angular solar es $\phi \approx 9 \text{ mrad}$. Nota: Si la respuesta contiene w_0 , no se requerirá una respuesta numérica.

- (i) Considere una hoja de papel, cuya normal está dirigida hacia el sol. ¿Cuál es la intensidad luminosa w_1 que llega a la hoja del Sol?
- (ii) Encuentre la potencia neta \mathcal{P}_2 de la luz, que se enfoca con el telescopio en la imagen de la estrella.
- (iii) Supongamos que el cielo azul es tan brillante como una hoja de papel gris iluminada por el sol. Puede suponer que en la dirección, perpendicular a la hoja, la razón de la potencia luminosa desviada por el papel en un ángulo de sólido de 1 estereorradián, a la potencia luminosa neta que llega a la hoja, es $\alpha \approx 0,1$ (esto corresponde a la disipación de aproximadamente 70 % de energía luminosa en el papel gris). ¿Cuál es la intensidad en el plano focal del telescopio w_3 , debido al cielo azul?
- (iv) Mientras estudiamos la imagen de la estrella, ignoremos todos los efectos que no sean la difracción. Calcule la intensidad en el centro de la imagen de la estrella w_2 (en el plano focal del telescopio), debido a la luz que llega de la estrella.
- (v) Proporcione una expresión para la razón k de las intensidades en medio de la imagen de la estrella y en un punto más alejado de ella.
- (vi) ¿Es posible ver una estrella a la luz del día usando un telescopio? ¿o con sus ojos? Justifíquese.

Pr 13. [IPhO-1981] Un detector de ondas de radio en un observatorio se coloca en la playa a una altura $h = 2 \text{ m}$ sobre el nivel del mar. Después del surgimiento de una estrella que irradia ondas electromagnéticas de longitud de onda $\lambda = 21 \text{ cm}$, sobre el horizonte el detector registra series de máximos y mínimos alternos. La señal registrada es proporcional a la intensidad de las ondas detectadas. El detector registra ondas con el vector

eléctrico, vibrando en una dirección paralela a la superficie del mar.

(i) Determine el ángulo entre la estrella y el horizonte en el momento en que el detector registra máximos y mínimos (en forma general).

(ii) ¿La señal disminuye o aumenta justo después del ascenso de la estrella?

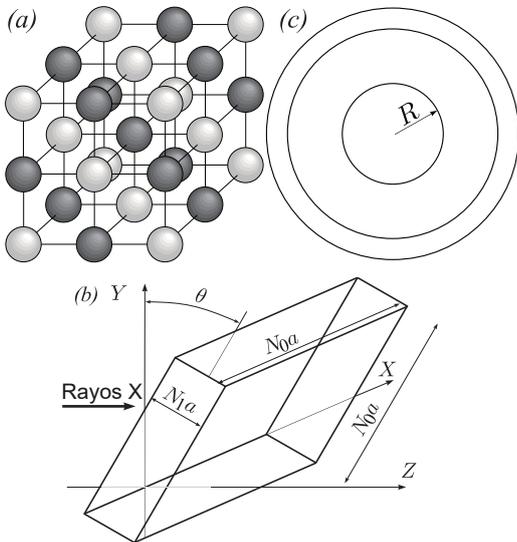
(iii) Determine la razón de señal del primer máximo al siguiente mínimo. En la reflexión de la onda electromagnética en la superficie del agua, la razón de las intensidades del campo eléctrico de las ondas (E_r) reflejada e incidente (E_i) es:

$$E_r/E_i = (n - \cos \varphi)/(n + \cos \varphi),$$

donde n es el índice de refracción y φ es el ángulo incidente de la onda. Para la superficie “aire-agua” para $\lambda = 21$ nm, el índice de refracción es $n = 9$.

(iv) ¿La razón de las intensidades de máximos y mínimos consecutivos aumenta o disminuye con el ascenso de la estrella? Supongamos que la superficie del mar es plana.

Pr 14. [IPhO-1990] Queremos estudiar la difracción de rayos X mediante una red de cristal cúbico (ver figura a). Para hacer esto comenzamos con la difracción de un plano, una onda monocromática que es dirigida perpendicularmente en una cuadrícula bidimensional que consiste en $N_1 \times N_2$ rendijas con separaciones d_1 y d_2 . El patrón de difracción se observa en una pantalla a una distancia L de la cuadrícula. La pantalla es paralela a la cuadrícula y L es mucho más grande que d_1 y d_2 .



(i) Determine las posiciones y los anchos del máximo principal en la pantalla. El ancho se define como la distancia entre los mínimos a cada lado de los máximos.

(ii) Consideramos ahora un cristal cúbico, con espaciado entre rejilla a y tamaño. $N_0 a \times N_0 a \times N_1 a$, donde $N_1 \ll N_0$. El cristal se coloca en un haz de rayos X paralelo a lo largo del eje z en ángulo θ (ver figura b). El patrón de difracción se observa nuevamente en una pantalla a una gran distancia $L \gg N_0 a$ del cristal. Calcule la posición y el ancho de los máximos en función del ángulo θ para $\theta \ll 1$. ¿Cuáles son, en particular, las consecuencias del hecho de que $N_1 \ll N_0$?

(iii) El patrón de difracción también se puede derivar por medio del modelo de Bragg, en la cual se supone que los rayos

X se reflejan desde los planos atómicos en la red. El patrón de difracción entonces surge de la interferencia de estos rayos reflejados entre sí. Demuestre que esta llamada reflexión de Bragg produce las mismas condiciones para los máximos que las que se encuentran en (ii).

(iv) En algunas mediciones se emplea el llamado método del polvo. Un haz de rayos X se desvía por un polvo de muchos cristales pequeños (por supuesto, los tamaños de los cristales son mucho más grandes que el espaciado de la red, a). La desviación de rayos X de longitud de onda $\lambda = 0,15$ nm por el cloruro de potasio [KCl] (que tiene una red cúbica, ver figura a) resulta en la producción de círculos oscuros concéntricos en una placa fotográfica. La distancia entre los cristales y la placa es $L = 0,10$ m y el radio del círculo más pequeño es $R = 0,053$ m (ver figura c). Los iones K^+ y Cl^- tienen casi el mismo tamaño y pueden tratarse como centros de desviación idénticos. Calcule la distancia entre dos iones K^+ vecinos en el cristal.

Pr 15. [Est-PhO-2009] Una sala de obras de arte contemporáneo tiene paredes blancas y techo blanco; las paredes y el techo están iluminados con una luz verde monocromática de longitud de onda $\lambda = 550$ nm. El suelo de la sala está hecho de placas planas de vidrio. Las superficies inferiores de las placas de vidrio son mate y pintadas de negro; las superficies superiores están pulidas y cubiertas con una fina película transparente. Un visitante que se encuentre en algún lugar de la habitación verá rayas circulares brillantes y oscuras concéntricas en el piso, centradas alrededor de él. Un visitante curioso investiga el fenómeno y concluye lo siguiente: para ver las rayas brillantes más grandes, necesita bajar su punto de vista; el número máximo de rayas observables es $N = 20$. Determine el grosor de la película si se sabe que el coeficiente de refracción de la película es $n_0 = 1,4$ y el de las placas de vidrio es $n_1 = 1,6$.

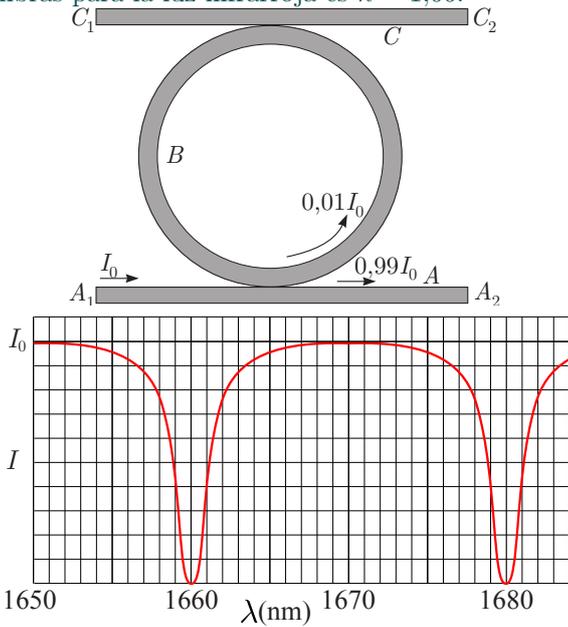
Pr 16. [Est-PhO-2002] El resonador circular es un dispositivo utilizado en óptica de fibras; consiste en un bucle circular hecho de fibra óptica, acoplado a dos fibras rectas, como se muestra en la figura. El acoplamiento de la fibra se logra al acercar los núcleos conductores de la luz de modo que las ondas electromagnéticas puedan “hacer un túnel” a través de la brecha entre las fibras. En el caso de los resonadores circulares, el acoplamiento entre las fibras es muy débil: si un impulso de luz se propaga a lo largo de la fibra A de izquierda a derecha, la mayor parte de la energía luminosa pasará por el punto de acoplamiento y continuará la propagación hacia A_2 y solo una pequeña fracción α de la energía incidente “salta” a la fibra circular B ; considere que $\alpha = 0,01$. Supongamos lo siguiente: (i) las tres fibras tienen propiedades idénticas; (ii) estas se denominan *fibras de un modo*, es decir, la luz puede viajar solo paralelamente al eje de la fibra, sin “rebotar” entre las paredes; (iii) el acoplamiento entre las fibras B y C es idéntico al de entre A y C ; (iv) se deja pasar luz infrarroja monocromática de intensidad I_0 en la entrada A_1 por la fibra A .

La siguiente gráfica muestra la dependencia de la intensidad de la luz en la salida A_2 con respecto a su longitud de onda λ .

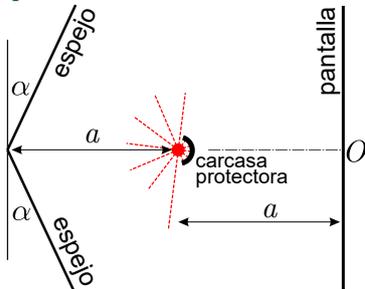
i. Dibuje la intensidad de la luz en las salidas C_1 y C_2 como una función de λ .

ii. ¿Cuál es la intensidad de la luz en la fibra B para $\lambda = 1600 \text{ nm}$?

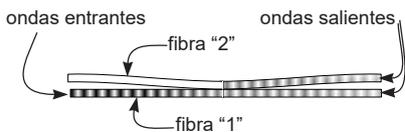
iii. ¿Qué tan larga es la fibra B ? El coeficiente de refracción de las fibras para la luz infrarroja es $n = 1,66$.



Pr 17. [Est-PhO-2004] La pantalla, dos espejos y una fuente de luz monocromática se colocan como se muestra en la figura. Debido a una carcasa, solo la luz reflejada de la fuente puede alcanzar la pantalla. Habrá un patrón de interferencia rayado en la pantalla; la distancia entre las rayas es d . Exprese la longitud de onda de la luz λ en términos de d y la distancia a (ver figura). Asuma que $a \gg d$.



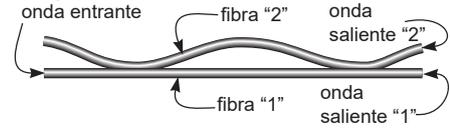
Pr 18. [Est-PhO-2001] En la fibra óptica, los dispositivos denominados divisores de igual proporción se usan con frecuencia: estos son dispositivos donde dos fibras ópticas se ponen en contacto de tal manera que si una onda electromagnética se propaga en una fibra, en el punto de contacto se divide en dos ondas de igual amplitud que viajan en cada una de las fibras, ver figura.



1. Muestre que si un divisor de proporción igual divide una onda electromagnética en dos, después del punto de contacto, hay un cambio de fase de $\frac{\pi}{2}$ entre las dos ondas. *Sugerencia:* use la ley de conservación de energía; dependiendo de su solución la igualdad $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ puede ser útil.

ii. Considere ahora dos divisores de proporciones iguales colocados secuencialmente, como se muestra en la siguiente figura (un dispositivo llamado interferómetro Mach-Zehnder). La di-

ferencia de trayectoria óptica entre los segmentos de divisor de las dos fibras es $\Delta = 30 \mu\text{m}$. Suponiendo que la longitud de onda de la luz monocromática entrante varía de $\lambda_1 = 610 \text{ nm}$ a $\lambda_2 = 660 \text{ nm}$, ¿para qué longitudes de onda toda la energía luminosa se dirige hacia la fibra "2"?



Pr 19. [PhysCup-2012] En la siguiente figura, hay cinco imágenes que se obtuvieron de la siguiente manera. El rayo láser se ha dirigido a una hoja de papel blanco (en un caso, a una pared blanca con una superficie rugosa). El punto brillante emergente del rayo láser ha sido fotografiado con una cámara digital; el eje de la lente se mantuvo aproximadamente perpendicular a la hoja de papel. La cámara se ha enfocado al infinito (¡no al punto brillante!); así, la superficie del sensor coincidió con el plano focal de la lente de la cámara. Las imágenes se tomaron con una lente de distancia focal $F = 300 \text{ mm}$; el diámetro de la lente era $D = 75 \text{ mm}$ (para una imagen, el diámetro efectivo de la lente se redujo en un diafragma hasta 38 mm). Cada imagen es un recorte cuadrado de la imagen grabada por el sensor; el factor de escala de estas imágenes se puede calcular a partir del hecho de que la longitud del píxel en el sensor fue $9,6 \mu\text{m}$; el tamaño respectivo de cada imagen también se indica en milímetros.

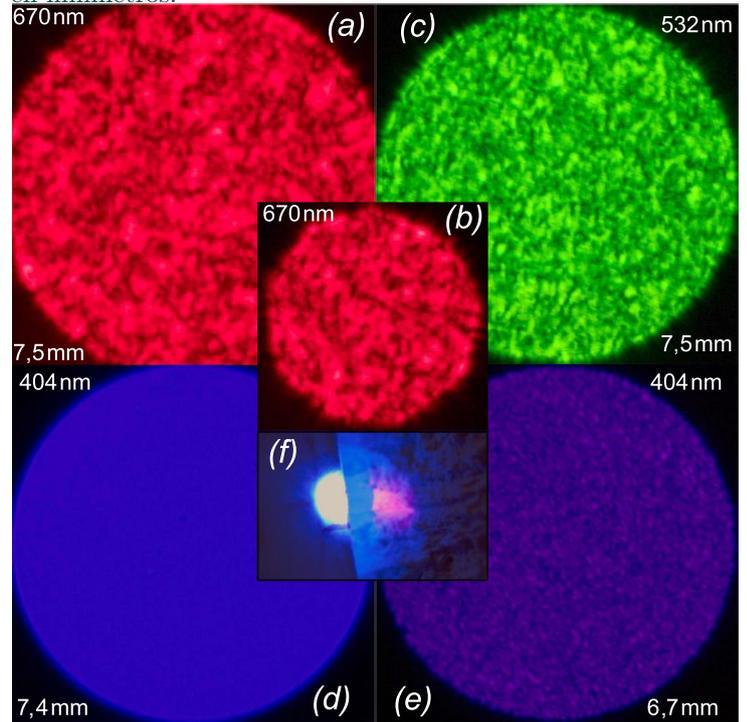


Figura: las imágenes grabadas por el sensor de una cámara digital cuando se creó un punto brillante láser en una hoja de papel de impresora blanca [excepto para la imagen (e), que se creó en una pared blanca con una superficie rugosa; las fluctuaciones de altura de la superficie fueron alrededor de $0,2 \text{ mm}$]. Para cada imagen, el número con nanómetros indica la longitud de onda del láser y el número con milímetros indica el tamaño (la longitud del lado del cuadrado) del recorte de la imagen en el sensor. La imagen (f) se cargó dos semanas después de la publicación del problema como sugerencia: se puede ver dos puntos más brillantes, porque la mitad del rayo láser incide en un papel blanco y la otra mitad en la pared blanca; lo que se suponía que llamaba la atención es que el punto en el papel es mucho más brillante y tiene un tinte

diferente (más blanco) que el de la pared.

Parte A. Usando estas imágenes, calcule el tamaño del punto brillante creado por el láser rojo que se ve en las figuras 1 (a) y 1 (b). (Por lo tanto, las imprecisiones dentro de un factor de 2 son aceptables). Tenga en cuenta que el punto brillante fue ligeramente elíptico y aproximadamente del mismo tamaño para los tres láseres utilizados.

Parte B. Explique por qué la imagen del punto brillante creado por el láser violeta en una hoja de papel blanco [figura 1 (d)] es cualitativamente diferente de todas las otras imágenes

Apéndice 1: Permanencia de la forma de la onda a velocidad constante.

Podemos derivar matemáticamente esto del principio de superposición (las ecuaciones de Maxwell son lineales, por lo tanto, el principio de superposición sostiene que cualquier combinación lineal de soluciones es también una solución) y de una rama de las matemáticas llamada análisis de Fourier. El último establece que cualquier función de x puede representarse como una suma de funciones sinusoidales (de una manera similar a la que la expansión de Taylor se puede representar como una suma de potencias de x): $f(x) = \int f_k e^{ikx} dk$. Asuma que para $t = 0$, $\vec{E}(z, t = 0) = \hat{i}E_*(z) = \hat{i} \int E_k e^{ikz} dk$. Cada uno de los componentes sinusoidales evolucionará en el tiempo según la ecuación 3, de modo que con $\zeta = z - vt$,

$$\vec{E}(z, t) = \hat{i} \int E_k e^{ik(z-vt)} dk = \hat{i} \int E_k e^{ik\zeta} dk = \hat{i}E_*(\zeta),$$

es decir $\vec{E}(z, t) = \hat{i}E_*(z - vt)$.

5. SUGERENCIAS

2. Aplique el método 1.
3. Aplique el método 1; tenga en cuenta que la suma de tres vectores de igual longitud puede ser cero solo si forman un triángulo equilátero.
9. Descomponga la luz después del primer polarizador en dos componentes de acuerdo con el eje definido por el polarizador central; haga lo mismo con la luz antes del polarizador final.

6. RESPUESTAS

- 1.
2. $\varphi_{\text{mín}} = \arcsen \left[\frac{\lambda}{a} \left(n \pm \frac{1}{3} \right) \right]$; $\varphi_{\text{máx}} = \arcsen \left(n \frac{\lambda}{a} \right)$.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
9. $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\alpha$.

10. Las oscilaciones de longitud de onda corta en el gráfico se deben a la difracción en la película, por lo tanto, la condición máxima local es $2dn = \lambda N = cN/\nu$. Así, $2dn\nu = cN$ y

$2dn(\nu + \delta)\nu = c(N + 1)$, por lo tanto $2dn\delta\nu = c$ y $d = c/2n\delta\nu$. Para medir la distancia entre dos máximos de manera más precisa, tomamos un intervalo de frecuencia más largo, por ejemplo, $\Delta\nu = 80$ THz y contamos el número de máximos entre ellos, $m \approx 34$. Por consiguiente, $\delta\nu = \Delta\nu/m \approx 2,35$ THz y $d \approx 50 \mu\text{m}$.

11. (i) Primero debemos encontrar el ángulo después de la refracción β : para ángulos de incidencia pequeños encontramos aproximadamente que $\beta = \alpha/n$. En el líquido, la longitud de onda disminuye n veces: $\lambda' = \lambda/n$. La longitud de onda en cuestión se puede encontrar como la distancia entre las líneas que conectan los puntos de intersección de las líneas de igual fase de los dos haces. Alternativamente (y de una manera más simple), se encuentra como la diferencia de los dos vectores de onda: $k' = k\beta$, donde $k = 2\pi/\lambda' = 2\pi n/\lambda$ es el vector de onda de los haces incidentes. Así que, $\Delta = 2\pi/k' = \lambda/\alpha \approx 7,4 \mu\text{m}$.

(ii) La luz desviada fluctúa debido al movimiento de las partículas desviadas; la frecuencia es $\nu = v/\Delta = v\alpha/\lambda$. No hay forma de determinar la dirección del flujo, pero el módulo se obtiene fácilmente: $v = \nu\lambda/\alpha \approx 0,37$ m/s.

(iii) La estructura espacial del patrón de interferencia permanece esencialmente sin cambios (la diferencia de longitud de onda es despreciable). Sin embargo, el patrón obtiene frecuencia temporal $\delta\omega = \delta(c/\lambda) \approx c\delta\lambda/\lambda^2$. La velocidad del patrón de interferencia $u = \Delta\delta\omega = \frac{c}{\alpha} \frac{\delta\lambda}{\lambda}$. Si la velocidad del fluido es $v \approx 0,37$ m/s, entonces la velocidad relativa del patrón y el fluido es $\nu' = \frac{c}{\alpha} \frac{\delta\lambda}{\lambda} \pm v$, dependiendo de la dirección del flujo (en ambos casos, $\nu' \approx 740$ kHz). Por lo tanto, la frecuencia de salida nos permite determinar la dirección del flujo siempre que podamos estar seguros de que la velocidad del patrón de interferencia es mayor que la velocidad del flujo.

12. (i) La intensidad de la luz disminuye inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, por lo tanto $w_1 = w_0 R_p^2/L_p^2$, donde R_p es el radio solar y L_p la distancia al sol. Debido a $\phi = 2R_p/L_p$, obtenemos $w_1 = w_0\phi^2/4$.

(ii) El resultado anterior se puede aplicar a la intensidad estelar, que es $q^{-2}w_1$; por lo tanto $\mathcal{P}_2 = \frac{1}{4}\pi D^2 w_1 q^{-2} = w_0\pi(\phi D/4q)^2$.

(iii) El área del papel S irradia hacia la lente del telescopio la potencia $\mathcal{P}_3 = w_1\alpha S(\frac{\pi}{4}D^2/L^2)$, donde L es la distancia del telescopio. La imagen de esta hoja de papel tiene tamaño $s = SF^2/L^2$; así, $w_3 = \mathcal{P}_3/s = w_1\alpha(\frac{\pi}{4}D^2/F^2) = w_0\alpha\pi(\phi D/4F)^2$.

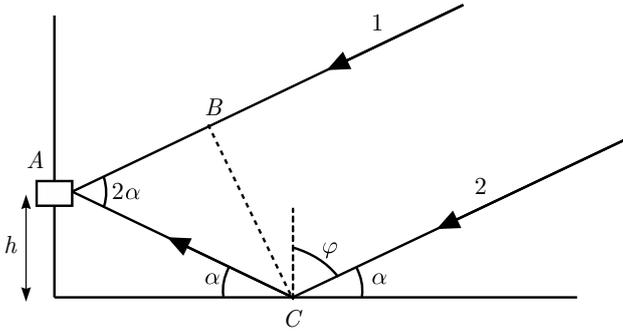
(iv) La distancia angular del primer mínimo de difracción (utilizando la aproximación de una sola ranura, aunque, el círculo no es realmente una ranura) es λ/D . Por lo tanto, el radio del círculo brillante se puede estimar como $\delta = F\lambda/D$. Por consiguiente, $w_2 = \mathcal{P}_2/\pi\delta^2 = w_0(\phi D^2/4qF\lambda)^2$.

(v) $k = (w_2 + w_3)/w_3 = 1 + (\alpha\pi)^{-1}(D/\lambda q)^2 \approx 4$ (asumiendo $\lambda \approx 500$ nm).

(vi) $k - 1 \sim 1$ (o $k - 1 > 1$) significa que la estrella se puede ver fácilmente (como es el caso del telescopio); $k - 1 \ll 1$ significa que la estrella no puede ser vista (para el ojo, $k - 1 \approx 1 \times 10^{-4}$).

13. (i) La señal, registrada por el detector A , es el resultado de la interferencia de dos rayos: el rayo 1, que incide directamente desde la estrella y el rayo 2,

que se refleja desde la superficie del mar (ver figura)



La fase del segundo rayo se desplaza en π debido a la reflexión por un medio de mayor índice de refracción. Por lo tanto, la diferencia de fase entre los dos rayos es: $\Delta = AC + \frac{\lambda}{2} - AB = \frac{\lambda}{2} + 2h \sin \alpha$. La condición para la interferencia de máximos es: $\sin \alpha_{\text{máx}}(2k - 1)\frac{\lambda}{4h}$, donde $k = 1, 2, 3, \dots, 19$ (la diferencia de los trayectos ópticos no puede excederse de $2h$, por lo tanto, k no puede exceder 19). La condición para mínimos es: $\frac{\lambda}{2} + 2h \sin \alpha_{\text{mín}} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin \alpha_{\text{mín}} = \frac{k\lambda}{2h}$ donde $k = 1, 2, 3, \dots, 19$.

(ii) Justo después de la subida de la estrella, la altura angular α es cero, por lo tanto, se cumple la condición para un mínimo de interferencia. Por este motivo, justo después del ascenso de la estrella, la señal aumentará.

(iii) Si se cumple la condición para una interferencia máxima, la intensidad del campo eléctrico es una suma de las intensidades del rayo directo E_i y el rayo reflejado E_r , respectivamente: $E_{\text{máx}} = E_i + E_r$.

Porque

$$E_r = E_i \frac{n - \cos \varphi}{n + \cos \varphi},$$

entonces

$$E_{\text{máx}} = E_i \left(1 + \frac{n - \cos \varphi}{n + \cos \varphi} \right),$$

De la figura se ve que $\varphi_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{\text{máx}}$, obtenemos

$$E_{\text{máx}} = E_i \left(1 + \frac{n - \sin \alpha_{\text{máx}}}{n + \sin \alpha_{\text{máx}}} \right) = \frac{2nE_i}{n + \sin \alpha_{\text{máx}}}$$

La intensidad resultante en el mínimo de interferencia es

$$E_{\text{mín}} = E_i - E_r = \frac{2E_i \sin \alpha_{\text{mín}}}{n + \sin \alpha_{\text{mín}}}$$

La intensidad I de la señal es proporcional al cuadrado del campo eléctrico, entonces, la razón de intensidades ente un máximo y un mínimo consecutivos es:

$$\frac{I_{\text{máx}}}{I_{\text{mín}}} = \frac{n^2}{\sin^2 \alpha_{\text{mín}}} \left(\frac{n + \sin \alpha_{\text{mín}}}{n + \sin \alpha_{\text{máx}}} \right)^2.$$

Usando las ecuaciones anteriores para ángulos de mínimos y máximos de difracción para $k = 1$ se obtiene:

$$\frac{I_{\text{máx}}}{I_{\text{mín}}} = 3 \times 10^4.$$

(iv) Usando el hecho que $n \gg \lambda$, de la ecuación de la razón de intensidades se cumple que:

$$\frac{I_{\text{máx}}}{I_{\text{mín}}} = \frac{4n^2 h^2}{k^2 \lambda^2}.$$

Entonces, con el ascenso de la estrella, la proporción de las intensidades de los máximos y mínimos consecutivos disminuye.

14. Consideremos primero la dirección en x , si las ondas que vienen de rendijas vecinas (con separación d_1) atraviesan trayectos que difieren en: $\Delta_1 = n_1 \lambda$ donde si n_1 es un entero, entonces se crea un máximo principal. La posición en la pantalla (en la dirección x) es: $x_{n_1} = \frac{n_1 \lambda L}{d_1}$ ya que $d_1 \ll d_2$. La diferencia de trayectos ente la rendija del centro y una del final es

$$\Delta_{\left(\frac{N_1}{2}\right)} = \frac{N_1 n_1 \lambda}{2}.$$

Si por otro lado esta diferencia de trayectos es:

$$\Delta_{\left(\frac{N_1}{2}\right)} = \frac{N_1 n_1 \lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}$$

entonces existe un primer mínimo al lado del máximo principal. La posición de este mínimo en la pantalla es: $x_{n_1} + \Delta x = L(N_1 n_1 \lambda / 2 + \lambda / 2) N_1 d_1 / 2 = L n_1 \lambda / d_1 + L \lambda / (d_1 N_1) \Rightarrow \Delta x = L \lambda / (d_1 N_1)$. Entonces el grosor del máximo principal es el doble de Δx .

De manera similar a la anterior el procedimiento se puede repetir en la dirección y donde hay N_2 rendijas con separación d_2 las posiciones y grosores de los máximos son análogos a los anteriormente derivados. Como alternativa se puede calcular la intensidad de una cuadrícula bidimensional como función del ángulo que el haz hace con la pantalla.

En la dirección x el haz “ve” una cuadrícula con un espaciado a , así que en esta dirección tenemos

$$x_{n_1} = \frac{n_1 \lambda L}{a}, \quad 2\Delta x = \frac{2L\lambda}{aN_0}$$

la dirección y es análoga pero el espaciado efectivo es $a \cos \theta$,

$$y_{n_2} = \frac{n_2 \lambda L}{a \cos \theta}, \quad 2\Delta y = \frac{2L\lambda}{aN_0 \cos \theta}$$

y en la dirección z el haz “ve” una cuadrícula con espaciado efectivo $a \sin \theta$

$$y'_{n_3} = \frac{n_3 \lambda L}{a \sin \theta}, \quad 2\Delta y' = \frac{2L\lambda}{aN_1 \sin \theta}.$$

Este patrón se sobrepone al anterior, como $\sin \theta$ es muy pequeño solo su orden cero será visible y es muy ancho debido a $N_1 \sin \theta \ll N_0$. El patrón de difracción de una onda plana dirigida a una placa de cristal delgado de red cúbica a un ángulo pequeño de incidencia es casi idéntico al de una cuadrícula.

Con reflexiones de Bragg se tiene que la diferencia de trayectos es

$$\Delta = 2a \sin \phi \approx 2a\phi = n\lambda, \quad \frac{x}{L} \approx 2\phi$$

donde ϕ es el ángulo de difracción y cuyas ecuaciones anteriores son la mismas del máximo encontrado en b), la distancia entre dos iones de potasio K^+ es $a\sqrt{2}$:

$$a\sqrt{2} = \frac{L\lambda\sqrt{2}}{x} \approx 0,44 \text{ nm}.$$

$$15. \frac{N\lambda}{2(n_1 - \sqrt{n_1^2 - 1})} \approx 13 \mu\text{m}.$$