

# PROBLEMAS DE CINEMÁTICA

Jaan Kalda

Traducción parcial al inglés por Taavi Pungas

Traducción al español de la versión 2.0 por Roberto Marín

Versión: 13 de noviembre de 2019

## 1. INTRODUCCIÓN

La solución para la mayoría de problemas de física puede ser encontrada usando una pequeña cantidad de ideas (aplicable a otras áreas, por ejemplo, matemática). Para llegar a ser bueno resolviendo problemas uno debe aprender tales ideas, sin embargo, no es suficiente *saber* las ideas, también se debe *reconocer* las ideas que se utilizarán para un problema dado; con experiencia queda claro que por lo general los problemas contienen sugerencias sobre cuales ideas deben usarse.

Este texto intenta resumir las ideas principales para resolver problemas en cinemática (sin embargo, algunas de estas ideas son más universales y se pueden aplicar a otros campos de la física). Para cada idea hay uno o varios problemas ilustrativos. Primero debe intentar resolver los problemas teniendo en cuenta las ideas que se sugieren para el problema dado, si esto resulta demasiado difícil puede leer las sugerencias para cada problema que se proporcionan con detalle en la respectiva sección. Es intencional que en la guía no haya soluciones completas debido a que leer las soluciones y aceptar el procedimiento mostrado no es la mejor manera de pulir sus habilidades en la resolución de problemas, sin embargo, hay una sección de respuestas en la que puede verificar si sus resultados son correctos. También hay problemas de revisión sin sugerencias en el texto, es su tarea averiguar cuales ideas se pueden usar (estos también tienen sugerencias en la respectiva sección).

Los problemas se clasifican como: simple, normal y difícil (cada problema tendrá dicho código de color). Tenga en cuenta que los niveles de dificultad son relativos para cada persona, como regla general un problema se ha clasificado como simple si hace uso de una sola idea (a menos que sea una idea complicada o abstracta) y difícil si la solución involucra tres o más ideas.

Se asume que el lector está familiarizado con los conceptos de rapidez o celeridad, velocidad y aceleración, el radián como la medida de los ángulos, velocidad y aceleración angular, funciones trigonométricas y ecuaciones cuadráticas. En algunos problemas se utilizan derivadas y diferenciales, por lo que también es aconsejable una comprensión básica de estos conceptos (sin embargo, uno puede omitir las secciones que considere prudentes durante la primera lectura).

## 2. VELOCIDADES

**Idea 1:** Escoja el marco de referencia más apropiado, puede escoger varios y cambiar entre ellos cuando lo necesite. Los marcos de referencia potencialmente útiles se encuentran cuando:

- ★ algunos cuerpos están en reposo,
- ★ algunas proyecciones de velocidades desaparecen,
- ★ los movimientos son simétricos.

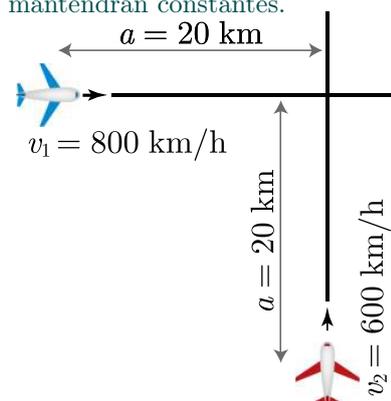
Se recomienda investigar el proceso en cuestión en todos los marcos de referencia potencialmente útiles. Como se mencionó anteriormente, en un buen marco de referencia alguna velocidad o su componente (o aceleración o su componente) desaparece o dos velocidades son iguales.

Una vez que se ha encontrado un marco de referencia adecuado podemos volver a cambiar al marco de laboratorio y transformar las velocidades y/o aceleraciones ahora conocidas usando suma vectorial. ¡Nótese bien! las aceleraciones se pueden sumar de la misma manera que las velocidades *solo si* el movimiento del marco de referencia es traslacional (no rota).

**Pr 1.** En la costa de un río hay un puerto, en el momento en que un bote pasa por el puerto una lancha a motor parte del puerto a un pueblo a la distancia  $s_1 = 15$  km río abajo. Alcanzó su destino después de  $t = 45$  min, dio la vuelta y comenzó a retroceder de inmediato hacia el punto de partida. A la distancia  $s_2 = 9$  km del pueblo, se encontró con el bote. ¿Cuál es la rapidez del agua del río? ¿y la rapidez de la lancha con respecto al agua? Nótese que el bote no se movió con respecto al agua.

Aquí el movimiento tiene lugar en relación con el agua lo que nos da una pista, podemos intentar resolver el problema al usar el marco de referencia del agua. Si lo pensamos detenidamente queda claro que esta es una buena opción ya que en ese marco de referencia la velocidad de la lancha es constante y el bote está en reposo, es decir, el movimiento de los cuerpos es mucho más simple que en el marco de referencia costero.

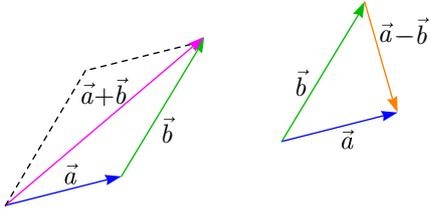
**Pr 2.** Dos aviones vuelan a la misma altura con rapidez  $v_1 = 800$  km/h y  $v_2 = 600$  km/h, respectivamente. Los aviones se aproximan y en un determinado momento del tiempo las trayectorias de los aviones son perpendiculares entre sí y ambas aeronaves están a la distancia  $a = 20$  km desde el punto de intersección de sus trayectorias. Encuentre la distancia mínima entre los aviones durante su vuelo asumiendo que sus velocidades se mantendrán constantes.



La idea 1 nos dice que debemos buscar un marco donde algunos cuerpos estén en reposo, ese sería el marco de uno de los aviones, sin embargo, aquí tenemos un movimiento bidimensional por lo que las velocidades deben sumarse y restarse vectorialmente.

**Definición 1:** Una cantidad escalar es una cantidad que se puede describir completamente con un solo valor numérico; una cantidad vectorial es una cantidad que necesita ser descrita por una magnitud (también denominada como módulo o longitud) y una dirección. La suma de dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  se define de mo-

do que si los vectores se interpretan como desplazamientos (el módulo de un vector da la distancia y su dirección, la dirección del desplazamiento) el vector  $\vec{a} + \vec{b}$  corresponde al desplazamiento neto como resultado de dos desplazamientos realizados de forma secuencial  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Esto corresponde a la regla del paralelogramo (ver figura). La resta se define como la operación inversa de la suma, si  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  entonces  $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ .



Luego de haber introducido el concepto de vectores, también podemos corregir nuestra terminología.

**Definición 2:** La *velocidad* es una cantidad vectorial que puede ser definida por las proyecciones en los ejes  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ; la *rapidez* es el módulo de un vector,  $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ . De manera similar el *desplazamiento* es un vector que apunta desde el punto de inicio de un cuerpo hasta su posición final, la *distancia* recorrida es la suma de los módulos de todos los desplazamientos elementales (longitud de la curva).

Existen dos opciones para sumar vectores. Primero, seleccionamos dos ejes, por ejemplo,  $x$  y  $y$  y trabajamos con las proyecciones de los vectores en los ejes. Entonces, si nuestro marco de referencia se mueve con velocidad  $\vec{u}$  y la velocidad del cuerpo en tal marco es  $\vec{v}$  entonces la velocidad en el marco de referencia del laboratorio es  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ , que puede ser encontrado usando las proyecciones  $w_x = v_x + u_x$  y  $w_y = v_y + u_y$ . Alternativamente, podemos optar por la suma geométrica y aplicar la regla del paralelogramo como ya se mostró.

Una vez que hayamos elegido el marco de referencia de uno de los aviones, el problema 2 se puede resolver utilizando la siguiente idea.

**Idea 2:** Para problemas que involucran la adición de vectores (velocidades, fuerzas...), los problemas a menudo se pueden reducir a la aplicación de hechos geométricos simples, como (a) el camino más corto desde un punto a una línea (o plano) es perpendicular a la línea (o plano); (b) si en un triángulo  $ABC$  hay dos longitudes laterales determinadas  $|BC| = a$  y  $|AC| = b < a$ , el triángulo con un ángulo  $\angle ABC$  máximo satisface  $\angle BAC = 90^\circ$ .

El siguiente problema requiere la aplicación de varias ideas y debido a eso se clasifica como un problema difícil. Al cambiar entre marcos de referencia, las siguientes ideas serán útiles.

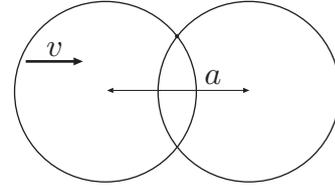
**Idea 3:** Intente encontrar simetrías ocultas y convierta el problema en uno simétrico.

**Idea 4:** Es posible encontrar toda la información sobre una velocidad o aceleración una vez que conocemos una de sus componentes y la dirección del vector.

La manera en que los matemáticos lo postulan es que un triángulo rectángulo está determinado por un ángulo y uno de sus lados. Por ejemplo, si sabemos que la velocidad está en ángulo  $\alpha$  de la horizontal y su componente horizontal es  $w$ , su

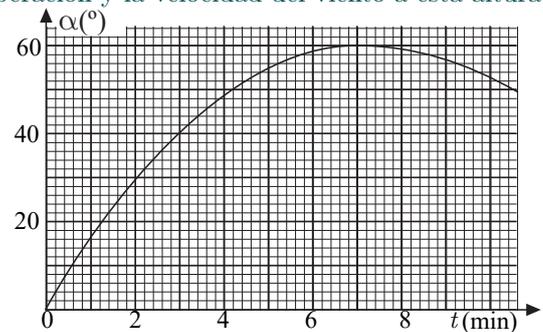
módulo sería  $w / \sin \alpha$ .

**Pr 3.** Uno de dos anillos con radio  $r$  está en reposo y el otro se mueve a velocidad  $v$  hacia el primero. Encuentre cómo la velocidad del punto superior de intersección depende de  $\alpha$ , la distancia entre los centros de dos anillos.



La idea 4 puede ser usada otra vez en el siguiente problema.

**Pr 4.** Se pueden utilizar globos con velocidad ascendente constante para investigar las velocidades del viento en varias alturas. El gráfico de ángulo de elevación dado en función del tiempo se obtuvo al observar un globo de este tipo. El globo se liberó a una distancia de  $L = 1$  km desde el punto de observación y parecía estar subiendo directamente hacia arriba. Sabiendo que la velocidad del viento cerca del suelo era cero, encuentre la altura del globo en el momento  $t = 7$  min después de su liberación y la velocidad del viento a esta altura.



Para responder a la primera pregunta necesitamos hacer uso de la siguiente idea.

**Idea 5:** Si se da un gráfico de  $y$  contra  $x$  es probable que alguna línea tangente y su pendiente  $\frac{dy}{dx}$  sean útiles. En tales casos, a menos que sea obvio, debe demostrar que la derivada  $\frac{dy}{dx}$  está relacionada con una cantidad física  $z$  relevante para la solución del problema. Para este fin, se necesita expresar  $z$  en términos de pequeños incrementos (infinitesimales)  $dx$  y  $dy$ , y manipular matemáticamente hasta que estos incrementos se manifiesten en la expresión solo a través de la razón  $\frac{dy}{dx}$ .

Para ser precisos, hay dos opciones. Primero, en casos más simples se puede decir que los incrementos son infinitamente pequeños (infinitesimales) y estos se denotan a través de *diferenciales*  $dx$  y  $dy$ . En casos más complejos puede ser más conveniente comenzar con incrementos pequeños pero finitos  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , realice sus cálculos manteniendo solo los términos principales (por ejemplo, para  $\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$  el segundo término es un producto de dos cantidades pequeñas y puede despreciarse comparándolo con el primero) y finalmente ir al límite de incrementos infinitamente pequeños,  $\Delta x \rightarrow dx$ ,  $\Delta y \rightarrow dy$ .

Para responder la segunda pregunta necesitamos una idea más.

**Idea 6:** Hay cálculos que no se pueden hacer en un caso general, pero son relativamente fáciles para ciertos valores especiales de los parámetros. Si se destaca alguna coincidencia inusual en

el problema (en este caso, la pendiente de la tangente es cero en el momento dado) entonces, es muy probable que esta circunstancia deba usarse.

**Idea 7:** Si la fricción afecta el movimiento, generalmente el marco de referencia más apropiado es el del entorno que causa la fricción.

**Pr 5.** Un trozo de tiza blanca se lanza sobre una pizarra negra horizontal que se mueve a una velocidad constante. Inicialmente, la velocidad de la tiza era perpendicular a la dirección de movimiento de la pizarra. ¿Cuál es la forma del trazo de la tiza en el tablero?

Para resolver el siguiente problema, además de la idea anterior, también debemos utilizar la idea 2, que se puede reformular de una manera un poco más general: algunos mínimos y máximos se pueden encontrar sin ninguna derivada, de hecho, la solución sin derivadas puede resultar mucho más simple. Para este problema una formulación más reducida sería la siguiente.

**Idea 8:** Si uno de dos vectores es constante y la dirección del otro es fija, entonces, el módulo de su suma es mínimo si forman un triángulo rectángulo.

**Pr 6.** Un bloque es empujado sobre una cinta transportadora, la cinta se mueve a velocidad  $v_0 = 1$  m/s, la velocidad inicial del bloque es  $u_0 = 2$  m/s perpendicular a la velocidad de la cinta. Durante su movimiento subsiguiente, ¿cuál es la velocidad mínima del bloque con respecto al suelo? El coeficiente de fricción es lo suficientemente grande como para evitar que el bloque se caiga de la cinta.

El siguiente problema es un poco inusual, se darán comentarios específicos después del problema. Para abordar esta situación, se puede dar un consejo aparentemente trivial pero pasado por alto muy a menudo.

**Idea 9:** Lea atentamente el texto del problema, intente comprender el significado de cada oración, no haga suposiciones precipitadas por su cuenta.

Para un problema bien escrito no hay oraciones redundantes ya que las cosas se vuelven más problemáticas si ese no es el caso. A veces, el autor del problema desea educarlo más que solo darle el problema por sí solo y da mucha información (como los antecedentes históricos) que, aunque son interesantes no están relacionadas con la solución del problema, por lo que está bien si está resolviendo el problema como un ejercicio en casa o tiene mucho tiempo, sin embargo, usted necesita desarrollar habilidades de análisis rápido a través de dichos párrafos en competiciones bajo presión y debe asegurarse de que realmente no haya pistas importantes ocultas en el interior.

**Pr 7.** Después de ser pateado por un futbolista, un balón comenzó a volar directamente a la meta con velocidad  $v = 25$  m/s haciendo un ángulo  $\alpha = \arccos 0,8$  con la horizontal. Debido a viento soplando de lado a  $u = 10$  m/s perpendicular a la velocidad inicial del balón, este se había desviado de su curso inicial en  $s = 2$  m en el momento en que alcanzó el plano de la meta. Determine el tiempo que tardó el balón en llegar al plano de la

meta, si la meta estaba situada a una distancia  $L = 32$  m del futbolista.

Un problema típico que da todos los valores de parámetros que describen un sistema y luego pregunta sobre su comportamiento. En este caso, el sistema parece estar sobreexplotado, ¿por qué necesitaríamos el valor  $s$ ? ¿no podríamos simplemente usar la velocidad inicial para determinar el tiempo de vuelo y deducir que  $t = \frac{L}{v \cos \alpha}$ ? Tal pregunta podría surgir, en primer lugar, porque está acostumbrado a ignorar la fricción del aire. Sin embargo, nadie mencionó que se puede desprestigiar aquí! Además, es evidente que el arrastre de aire no se puede desprestigiar, porque de lo contrario, la pelota no se desviaría de su trayectoria de caída libre. Sería una tarea muy difícil (que requiere una integración numérica de una ecuación diferencial) estimar la trayectoria del balón sujeto a un arrastre de aire turbulento. Sin embargo, esto no es lo que debe hacer, porque el arrastre de aire no se describe con una fórmula para la fuerza de arrastre, pero en cambio, por la salida final de la trayectoria de caída libre correspondiente.

Así que con la ayuda de la idea 9 se concluye que la resistencia del aire no se puede desprestigiar aquí. Una vez entendido esto, se vuelve evidente que hay que usar la idea 7, sin embargo, incluso si sabe esto, es posible que tenga dificultades matemáticas ya que no hay una forma directa de expresar el tiempo de vuelo  $t$  en términos de las cantidades dadas. En su lugar, se recomienda escribir una ecuación que contenga  $t$  como una incógnita y luego resolver para esta.

**Idea 10:** A menudo es útil primero escribir una ecuación (o un sistema de ecuaciones) que contenga la cantidad requerida como una incógnita, en lugar de intentar expresarla directamente (a veces es necesario incluir incógnitas adicionales que luego se cancelan).

Además, a diferencia de los problemas que hemos tenido hasta ahora, este problema se trata de una geometría tridimensional, lo que hace que sea difícil dibujar bocetos en una hoja de papel. Por lo tanto, necesitamos una idea más simple.

**Idea 11:** Es difícil analizar el movimiento tridimensional como un todo, por lo que siempre que sea posible, debe reducirse a dos dimensiones (proyectar en un plano, considerar planos de intersección).

El siguiente problema ilustra la siguiente idea.

**Idea 12:** Una colisión elástica se analiza más convenientemente en el marco de referencia del centro de masa del proceso.

Derivemos de esta idea una fórmula para usar cuando una pelota colisiona con una pared en movimiento. Primero, como la pared es pesada, el centro de masa del sistema coincide con el de la pared, por lo que usaremos el marco de la pared. En el marco del centro de masa, si la colisión es elástica y no hay fricción, debido a la conservación de la energía y del momento, los cuerpos saldrán con la misma velocidad a la que se acercaron, es decir, la componente normal de la velocidad de la pelota es invertida, si aplicamos la suma de velocidades dos veces (cuando nos movemos al marco de la pared y cuando volvemos al marco del laboratorio) llegamos a la siguiente conclusión.

**Idea 13:** Para un rebote elástico de una pelota contra una pared que se mueve con una velocidad  $\vec{u}$  en la dirección de la superficie normal, la componente normal  $\vec{v}_n$  de la velocidad de la pelota  $\vec{v}$  se incrementa en  $2\vec{u}$ , es decir  $\vec{v}'_n = -\vec{v}_n + 2\vec{u}$ .

Para este problema debemos dar por hecho lo siguiente.

**Hecho 1:** Los ángulos entre vectores velocidad dependen del marco de referencia.

**Pr 8.** Una pelota de tenis cae a una velocidad de  $v$  en una raqueta pesada y rebota elásticamente. ¿Cuál tiene que ser la velocidad de la raqueta  $u$  para hacer que la pelota rebote en un ángulo recto con respecto a su trayectoria inicial y no comience a girar si no giraba antes de la colisión? ¿Cuál es el ángulo  $\beta$  entre  $\vec{u}$  y la normal del plano de la raqueta, si el ángulo que corresponde a  $\vec{v}$  es  $\alpha$ ?

Si tenemos en cuenta la idea 9 y leemos el texto detenidamente, notamos que la raqueta es *pesada* para poder usar la idea 13. Además, preste atención a que la pelota no gira después de la colisión, esto es importante para encontrar la componente de la velocidad paralela al plano de la raqueta.

Anteriormente mencionamos que los vectores se pueden tratar de manera geométrica (por ejemplo, mediante la aplicación de la regla del paralelogramo para obtener una suma de vectores y la solución de un problema trigonométrico) o mediante el uso algebraico de proyecciones. Muy a menudo, el enfoque geométrico proporciona soluciones más cortas pero no siempre; esta observación nos lleva a la siguiente idea.

**Idea 14:** Para cálculos vectoriales formule una solución geométrica, pero si le parece irrazonable (por ejemplo, algunas de las condiciones se formulan a través de las proyecciones de los vectores) cambie al enfoque algebraico y escriba expresiones en términos de componentes.

Para la formulación algebraica una **escogencia óptima de ejes** es muy importante, escogencia “óptima” significa que las condiciones se escriban de la manera más simple posible. A veces puede suceder que los ejes de coordenadas más útiles no estén ni siquiera en ángulos rectos.

Para el problema 8, la solución geométrica resulta ser más simple pero más difícil de formular. Esto es bastante típico: el enfoque algebraico conduce a una solución a fuerza bruta cuando está claro desde el principio lo que hay que hacer, pero los cálculos son matemáticamente largos. Aun así, no hay dificultades fundamentales y se necesita ejecutar siempre y cuando la parte matemática no sea *muy larga* o que conduzca a dificultades fundamentales (como ecuaciones sin solución), aun así el enfoque de fuerza bruta está bien, pero descubrir una solución elegante puede tomar algún tiempo.

Generalmente, las soluciones geométricas de los problemas de física representan procedimientos geométricos muy simples y, por lo tanto, encontrar estas soluciones más cortas que las algebraicas también es bastante fácil. En este caso, sin embargo, el procedimiento geométrico resulta ser un problema bastante complicado mientras que la idea 14 sugiere que el enfoque algebraico es útil para el problema 8. (La condición de no rotación resulta útil para averiguar la componente paralela de la velocidad), se recomienda que pruebe ambos métodos aquí. En ambos casos se necesita una idea matemática más.

**Idea 15:** Dos vectores  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  y  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  son perpendiculares si su producto escalar es cero,  $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ . (Se asume que los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  son perpendiculares entre sí).

**Idea 16:** Para los problemas trigonométricos que involucran triángulos rectos, tenga en cuenta que el circuncentro de un triángulo rectángulo está en el centro de la hipotenusa, por lo tanto, la mediana dibujada desde el ángulo recto divide el triángulo en dos triángulos isósceles y el ángulo recto en los ángulos iguales a ángulos agudos del triángulo.

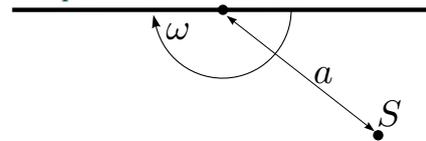
La idea 1 nos dice que hay que cambiar entre marcos de referencia, esta misma idea se puede usar cuando se trata de movimiento rotacional.

**Definición 3:** La velocidad angular  $\vec{\omega}$  tiene un módulo igual al ángulo de rotación (en radianes) por unidad de tiempo, es paralela al eje de rotación y la dirección viene dada por la regla de la mano derecha (si la mano se gira de la misma manera que el cuerpo en cuestión, el vector apunta en la dirección del pulgar).

**Idea 17:** Cuando se cambia entre marcos de referencia giratorios las velocidades angulares se suman de la misma manera que las velocidades de traslación en el caso de marcos de referencia traslacionales. ¡Nótese bien! esto sigue siendo válido incluso si las velocidades angulares no son paralelas (aunque los ángulos de rotación que no sean pequeños se pueden sumar solo mientras el eje de rotación permanezca inmóvil).

Esta idea está ilustrada a continuación por un problema relativamente simple.

**Pr 9.** El espejo vertical con dos superficies reflectantes (frontal y posterior) gira alrededor de un eje vertical como se muestra en la figura, con rapidez angular  $\omega$ . Hay una fuente puntual de luz estática  $S$  a una distancia  $a$  del eje de rotación. Encuentre la rapidez del punto de luz como función del tiempo.



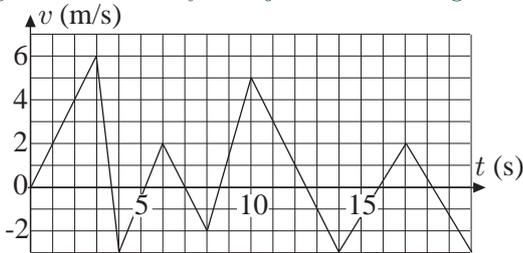
### 3. ACELERACIONES Y DESPLAZAMIENTOS

Hasta ahora hemos tratado con velocidades instantáneas o constantes y en algunos casos hemos aplicado una fórmula simple para los desplazamientos.  $s = vt$  En general, cuando la velocidad  $\vec{v}$  no es constante, el desplazamiento se encuentra como la curva debajo de la gráfica de la velocidad en función del tiempo. Por ejemplo, el desplazamiento  $\Delta x$  a lo largo del eje  $x$  es el área bajo la curva  $v_x = v_x(t)$ , que se puede escribir matemáticamente como la integral  $\Delta x = \int v_x(t) dt$ . No es necesario que usted sepa mucho de integrales, solamente que representan el área bajo la curva.

**Idea 18:** El cálculo de muchas cantidades físicas se puede reducir (a veces no de manera tan obvia) al cálculo de las áreas debajo de un gráfico (es decir, a una integral). En particular: la distancia es el área bajo un gráfico  $v - t$  (velocidad contra tiempo), la velocidad el área bajo un gráfico  $a - t$  etc.

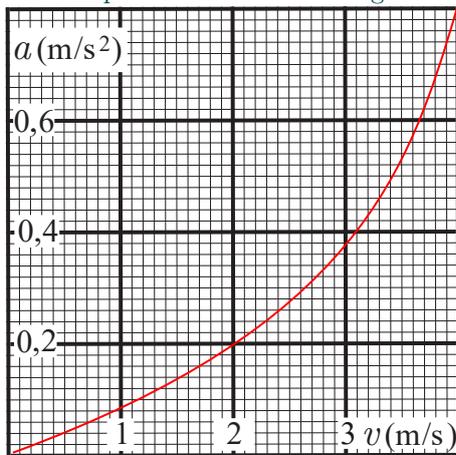
Tenga en cuenta que dibujar un gráfico no siempre es absolutamente necesario (si tiene experiencia con las integrales las fórmulas se pueden derivar analíticamente, sin dibujar gráficos), y para hacerlo es de ayuda imaginar el proceso. La visualización mental siempre es beneficiosa, simplifica la búsqueda de la solución y reduce las posibilidades de cometer errores.

**Pr 10.** Una partícula se comienza a mover desde el origen de coordenadas, la figura muestra su velocidad en función del tiempo. ¿Cuál será el mayor alejamiento del origen?

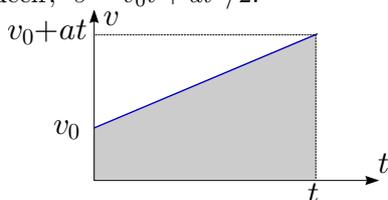


El próximo problema será más difícil, aunque se puede reducir a encontrar el área bajo la curva, debido a su dificultad su solución completa (en parte porque se tiene que rediseñar el gráfico y hacer cálculos numéricos) se da en la sección de “sugerencias”.

**Pr 11.** La aceleración de un bote depende de su rapidez como lo muestra el gráfico. La rapidez inicial del bote es  $v_0 = 4 \text{ m/s}$ . ¿Cuál será la distancia total recorrida por el bote hasta que el mismo prácticamente se detenga?



La idea 18 puede ser usada para derivar la fórmula de desplazamiento en el caso de aceleración constante. Suponga que un cuerpo tiene rapidez inicial  $v_0$  y se mueve con aceleración constante  $a$  y queremos saber cuánta distancia recorre en un tiempo  $t$ . El área bajo el gráfico es la de un trapecioide (ver figura), que es igual al producto de su mediana  $v_0 + \frac{1}{2}at$  y su altura  $t$ , es decir,  $s = v_0t + at^2/2$ .



Si de manera alternativa se saben las velocidades inicial y final

<sup>1</sup>Esto puede ser fácilmente visualizado si relacionamos los vectores posición como  $\vec{r}_{\text{lab}} = \vec{r}_{\text{rel}} + \vec{r}_{\text{mar}}$  y luego aplicamos la segunda derivada: la derivada de una suma es la suma de derivadas. Aún con vectores (esto puede ser entendido si trabajamos con proyecciones, por ejemplo, la regla de suma para las componentes en  $x$  de las aceleraciones se obtiene aplicando la segunda derivada en la igualdad que relaciona la coordenada  $x$ ,  $x_{\text{lab}} = x_{\text{rel}} + x_{\text{mar}}$ ).

<sup>2</sup>Siempre y cuando no haya otro mecanismo (como la fuerza de Lorentz) que acopla los movimientos en direcciones diferentes.

( $v_0$  y  $v_1$ ) en lugar del tiempo transcurrido, la mediana del trapecioide se puede expresar como  $\frac{1}{2}(v_0 + v_1)$  y su altura como  $t = (v_1 - v_0)/a$  que nos conduce a  $s = (v_0 + v_1)(v_1 - v_0)/2a = (v_1^2 - v_0^2)/2a$  que se reescribe como  $as = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2)$ , esta ecuación se puede llamar conservación de la energía de una masa puntual si la aceleración de caída libre es  $a$ .

**Hecho 2:** Si un cuerpo se mueve con rapidez inicial  $v_0$ , rapidez final  $v_1$  y aceleración constante  $a$  durante un tiempo  $t$ , la distancia recorrida es

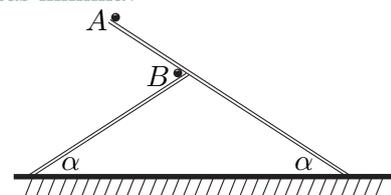
$$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}.$$

El próximo problema se puede resolver de varias maneras pero su solución más simple depende de la siguiente idea.

**Idea 19:** A veces es útil cambiar de sistema de referencia a uno no inercial: las velocidades se suman de manera convencional,  $\vec{v}_{\text{lab}} = \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{v}_{\text{mar}}$ , donde  $\vec{v}_{\text{lab}}$  es la velocidad en el marco del laboratorio,  $\vec{v}_{\text{rel}}$  la velocidad en el marco en movimiento y  $\vec{v}_{\text{mar}}$  la velocidad del punto del marco de referencia en que se encuentra el objeto para un tiempo dado. Si el marco se mueve traslacionalmente (sin rotaciones) las aceleraciones se sumarán de manera convencional,  $\vec{a}_{\text{lab}} = \vec{a}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{mar}}$ <sup>1</sup>. Algunos cálculos se pueden simplificar significativamente usando un marco de referencia en caída libre si hay dos objetos o más en caída libre.

Se debe enfatizar que si un marco de referencia se encuentra en rotación se van a añadir términos a la suma convencional de aceleraciones.

**Pr 12.** Dos rieles lisos descansan sobre el mismo plano y hacen un ángulo  $\alpha$  con la horizontal (ver figura). En cierto momento, son liberadas dos pelotas desde los puntos A y B y comienzan a deslizarse hacia abajo. Le tomó a la primera pelota que empezó en el punto A un tiempo  $t_1$  en llegar al suelo, a la segunda le tomó un tiempo  $t_2$ . ¿A qué tiempo fue la distancia entre las pelotas mínima?



**Idea 20:** A veces es posible separar los movimientos en dos o tres dimensiones de un cuerpo en movimientos independientes y perpendiculares entre sí: (a) movimiento en el eje  $x$  es independiente del movimiento en el eje  $y$  para geometría bidimensional; (b) movimiento en el eje  $x$  es independiente del movimiento en el eje  $y$ , que es independiente del movimiento en el eje  $z$  y (c) movimiento en el eje  $x$  es independiente del movimiento en el plano  $y - z$ . Esta última se puede usar para colisiones sin fricción desde un plano<sup>2</sup>, si el eje  $x$  está en el plano y el eje  $y$  es perpendicular a este, se puede examinar por separado el movimiento en el eje  $x$  y en el eje  $y$ .

La aplicación más simple de esta idea se provee con el movimiento bidimensional de un objeto en un campo gravitacional homogéneo que se estudia en todos los libros de cinemática, los movimientos horizontales y verticales se desacoplan, debido a que la aceleración vertical  $g$  no depende del eje horizontal  $x$  ni de la velocidad horizontal  $v_x$  y que la aceleración horizontal (0) no depende de la coordenada vertical  $y$  ni de la velocidad vertical  $v_y$ . Como resultado se obtiene que  $x = v_{0x}t$  y  $y = v_{0y}t - gt^2/2$  (donde  $v_{0x}$  y  $v_{0y}$  son las componentes respectivas a la velocidad inicial), la trayectoria en el plano  $x-y$  es una parábola que obtenemos al eliminar  $t$  de la segunda ecuación al sustituir  $t = x/v_{0x}$ .

**Hecho 3:** La trayectoria del centro de masa de un cuerpo en caída libre con gravedad uniforme  $g$  es una parábola, paramétricamente dado por  $x = v_{0x}t$  y  $y = v_{0y}t - gt^2/2$ .

Discutamos con más detalles cómo aplicar la idea 20 a las interacciones sin fricción (colisiones o deslizamientos) de un cuerpo con un plano: si el plano está inclinado, también tenemos que inclinar los ejes para que se alineen con estos, entonces, la aceleración gravitacional tendrá componentes a lo largo de ambos ejes, es decir, el movimiento tendrá aceleración en ambas direcciones.

**Hecho 4:** Los problemas de caída libre también se pueden analizar usando un sistema de ejes inclinado (esto podría ser útil debido a idea 20); entonces, la aceleración de caída libre se descompone en dos componentes perpendiculares,  $\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_y$  con  $g_x = g \sin \alpha$  y  $g_y = g \cos \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo entre el plano inclinado y la horizontal.

Ya que no hay fuerza de fricción en una colisión, la componente  $v_x$  (paralela a la superficie) no cambia, es decir, no “nota” de que hubo una colisión: para analizar la evolución del movimiento en la coordenada  $x$ , podemos olvidar completamente los cambios en la coordenada  $y$  y viceversa.

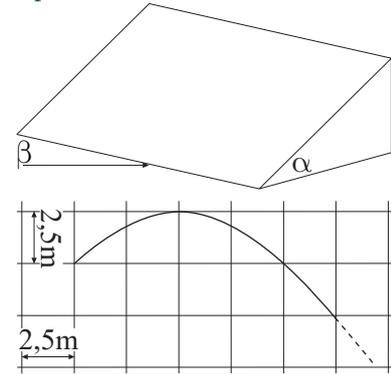
Si la superficie es curva, en general, tal separación ya no es posible, de hecho, anteriormente  $x$  era independiente de  $y$  porque la dependencia de la aceleración de las coordenadas se introduce mediante la fuerza normal, que es una función de  $y$  solamente y no tiene componente en  $x$ ; ahora, si la superficie es curva, es imposible que el eje  $x$  sea paralelo a la superficie y la aceleración debida a la fuerza normal tendrá componentes que no desaparecen en  $x$  y  $y$  y dependerá de las coordenadas  $x$  y  $y$ . Sin embargo, en el caso de superficies laterales de cilindros, prismas y otros cilindros generalizados<sup>3</sup>, es posible encontrar un eje  $x$  que siempre sea paralelo a la superficie, entonces el movimiento en  $x$  podrá ser separado del movimiento en el plano  $y-z$ .

**Pr 13.** Una pelota elástica se libera encima de un plano inclinado (ángulo de inclinación  $\alpha$ ) a una distancia  $d$  del plano. ¿Cuál es la distancia entre el primer y el segundo punto de impacto? Las colisiones ocurren sin fricción.

El siguiente problema hace uso de la idea 20; aun así, se necesita una idea más.

**Pr 14.** Un disco se desliza sobre un plano inclinado de hielo con un ángulo de inclinación  $\alpha$ . El ángulo entre el borde del

plano y la velocidad inicial del disco  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  es  $\beta = 60^\circ$ . La traza dejada por el disco en el plano se da en la figura (esto es solo una parte de la trayectoria). Encuentre  $\alpha$  bajo el supuesto de que la fricción puede ser despreciada y que la transición a la pendiente del plano fue suave.



La última frase aquí es muy importante ya que si la transición es *abrupta*, el disco se acerca al plano inclinado deslizándose por la horizontal y colisiona con él ya sea elásticamente, en cuyo caso salta hacia arriba, o plásticamente, si la colisión es perfectamente plástica, entonces esa parte de la energía cinética que está asociada con el movimiento a lo largo de la superficie normal del plano inclinado se pierde. Más concretamente, si introducimos coordenadas perpendiculares de manera que el  $x$  esté a lo largo de la línea de contacto de las dos superficies y el eje  $y$  sea paralelo a la superficie inclinada, los movimientos en  $x$ ,  $y$  y  $z$  son independientes, en el impacto,  $v_z$  se vuelve cero y debido a la ausencia de fricción,  $v_x$  y  $v_y$  se conservan.

Sin embargo, en este problema la transición de una superficie a otra es suave alrededor de la línea que separa las dos superficies planas, pero existe una región estrecha donde la superficie tiene una curvatura. Dentro de esta región estrecha el movimiento en las direcciones  $y$  y  $z$  no se puede separar entre sí y se necesita una idea más.

**Idea 21:** Si una fuerza es perpendicular a la dirección del movimiento (fuerza normal cuando un cuerpo se desliza a lo largo de una superficie curva, tensión en una cuerda cuando un cuerpo en movimiento se une a una cuerda no estirable fijada en el otro extremo, fuerza en una carga en un campo magnético) el vector de velocidad solo puede girar y su magnitud no cambiará<sup>4</sup>.

**Pr 15.** Tres tortugas se sitúan respectivamente en las esquinas de un triángulo equilátero a 1 m de distancia entre ellas. Se mueven con velocidad constante 10 cm/s de manera que la primera siempre apunta a la segunda, la segunda a la tercera y la tercera a primera. ¿Cuánto tiempo tardan en encontrarse?

Aquí se puede resolver de dos maneras, en la primera podemos ir a un sistema de referencia rotando con las tortugas en el cual aplicamos la siguiente idea.

**Idea 22:** A veces un marco de referencia con movimientos complejos puede ser útil.

También podemos usar.

**Idea 23:** En vez de calcular velocidades reales, es útil a veces

<sup>3</sup>Superficies con áreas transversales constantes.

<sup>4</sup>Esta es la ley de conservación de energía que utiliza el hecho de que las fuerzas perpendiculares a la velocidad no realizarán el trabajo.

examinar la razón de cambio de alguna distancia, la razón de dos longitudes, etc.

El próximo problema requiere integración<sup>5</sup>, por lo que puede ser omitido por aquellos que no estén familiarizados con este procedimiento.

**Pr 16.** Una hormiga se mueve a lo largo de una banda elástica a velocidad  $v = 1$  cm/s. Un extremo de la banda elástica (del cuál la hormiga comenzó a moverse) está fijo a una pared, el otro (inicialmente a distancia  $L = 1$  m del muro) se tira a  $u = 1$  m/s. ¿Llegará la hormiga al otro extremo de la banda? si es así, ¿cuándo sucederá?

Aquí necesitamos aplicar:

**Idea 24:** Para algunos problemas, una parametrización óptima puede simplificar significativamente los cálculos matemáticos. Una lista incompleta de opciones: coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas; longitud recorrida; *coordenadas lagrangianas* (es decir, para flujos de fluidos utilizando la coordenada inicial de una partícula de fluido en lugar de su coordenada actual); posición relativa de una partícula según un determinado esquema de clasificación; etc.

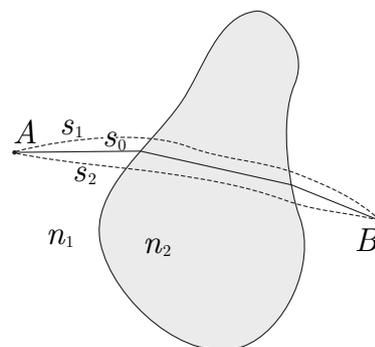
Aquí, el problema en sí contiene una pista sobre qué tipo de parametrización se va a utilizar. Está claro que la coordenada cartesiana de la hormiga no es buena ya que no refleja el progreso de la hormiga al avanzar a lo largo de la banda elástica. Para describir tal progreso, podemos usar la posición relativa en la banda, la fracción  $k$  del elástico recorrido; la hormiga comienza con  $k = 0$  y  $k = 1$  corresponde a la hormiga que llega al final de la banda. El parámetro  $k$  es esencialmente una coordenada lagrangiana, es igual a la coordenada inicial del punto del elástico actual en las unidades de la longitud de goma inicial.

## 4. TRAYECTORIAS ÓPTIMAS

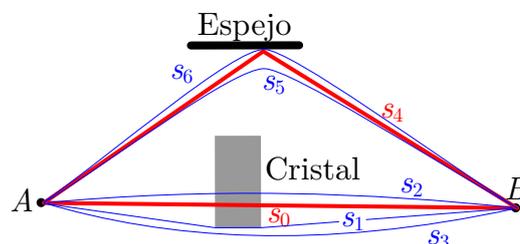
La mayoría de los problemas de la trayectoria óptima se dividen en dos categorías: los problemas de encontrar las trayectorias del menor tiempo y los problemas de encontrar las velocidades iniciales más pequeñas de un cuerpo en caída libre.

**Idea 25:** En aquellos problemas de cinemática en los que se dan velocidades distintas en diversos entornos y se pregunta la forma más rápida desde el punto A al punto B, el principio de Fermat (formulado para óptica geométrica) puede ser de ayuda.

Es decir, si tenemos una configuración de cuerpos con diferentes índices de refracción y si un rayo de luz que se origina desde el punto A pasa a través del punto B, entonces la trayectoria real del rayo es la forma más rápida para que la luz alcance el punto B desde el punto A (como recordatorio, si el índice de refracción de algún entorno es  $n$ , entonces la velocidad de desplazamiento de la luz es  $c/n$ ). Por lo tanto, el tiempo recorrido en  $s_1$  o  $s_2$  es más largo que en el  $s_0$ , ver figura.



Debemos aclarar que el principio de Fermat se aplica a un mínimo local: el tiempo de viaje a lo largo del trayecto  $s_0$  debe ser más corto que para cualquier otra ruta que se aparta del trayecto  $s_0$  pero permanece en su vecindad inmediata. Además, se requiere que, para pequeñas variaciones de trayectoria, las variaciones del tiempo de viaje también sean pequeñas. La siguiente figura aclara en qué casos es aplicable el principio de Fermat.



Como la velocidad de propagación en el cristal es menor que en el aire, el mínimo global del tiempo de viaje se logra por el camino  $s_1$ , sin embargo, tales variaciones arbitrariamente pequeñas del trayecto  $s_1$  que pasan por el cristal tienen un cambio considerable en el tiempo de viaje, por lo que  $s_1$  no es una trayectoria válida (el trayecto se puede deformar hacia abajo, por ejemplo, en  $s_3$ , pero las deformaciones hacia arriba incurren en un salto en el tiempo de viaje debido al paso a través del cristal). El trayecto  $s_0$  proporciona un buen mínimo local: el tiempo de viaje a lo largo de  $s_0$  es menor que en cualquier variación pequeña del trayecto  $s_0$  y si la variación del trayecto es pequeña, la variación del tiempo sigue siendo pequeña, por lo tanto, el principio de Fermat se puede aplicar al trayecto  $s_0$  que proporciona un paso de luz válida.

Finalmente, en el caso de las reflexiones, necesitamos comparar solo aquellos trayectos que incluyen reflexiones similares. Entonces, el trayecto  $s_5$  es más rápido que el  $s_4$ , pero la primera no implica reflexiones y no puede incluirse en el conjunto de trayectos de referencia. Entre esos trayectos que incluyen una reflexión desde el espejo y representan una pequeña variación del camino  $s_4$  (como el  $s_6$ ), el trayecto  $s_4$  es el más rápido y, por lo tanto, representa una trayectoria de haz de luz válida.

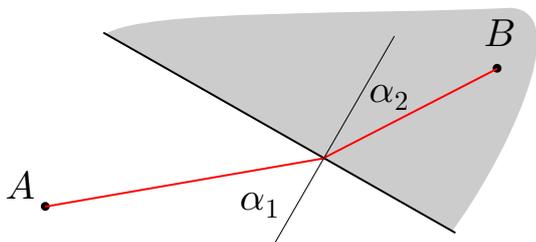
Si la luz puede viajar de un punto a otro a lo largo de varios caminos diferentes (por ejemplo, desde un punto a través de una lente hasta la imagen óptica de ese punto), el tiempo a lo largo de todos estos caminos es exactamente el mismo.

Para aplicar la idea 25 en problemas de cinemática necesitaremos la ley de Snell.

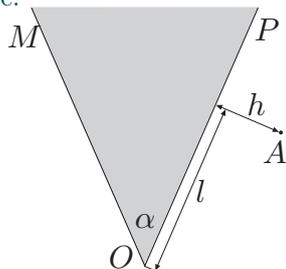
**Hecho 5:** Un punto A se sitúa en un medio donde la veloci-

<sup>5</sup>Puede encontrar útil que  $\int \frac{dx}{ax+b} = a^{-1} \ln(ax+b) + C$

dad de propagación de la luz es  $v_1$  y un punto  $B$  en un medio donde la velocidad es  $v_2$ . Entonces, la luz se propaga de  $A$  a  $B$  de acuerdo con la ley de Snell: se refracta en la interfaz para que la superficie normal y el camino formen ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (ver figura) satisfaciendo que  $\text{sen } \alpha_1 / \text{sen } \alpha_2 = v_1 / v_2$ .

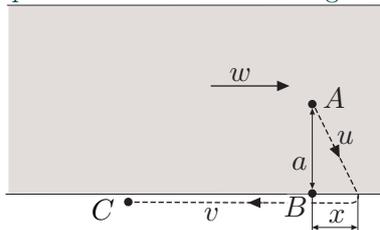


**Pr 17.** Una niña vive en la orilla  $OP$  de una bahía  $MOP$  (ver figura). Dos orillas de la bahía forman un ángulo  $\alpha$ . La casa de la niña está situada en el punto  $A$  a una distancia  $h$  de la orilla y  $\sqrt{h^2 + l^2}$  desde el punto  $O$ . La chica quiere ir a pescar a la orilla  $OM$ . ¿A qué distancia  $x$  del punto  $O$  debería ser el lugar de pesca, de modo que tomaría el menor tiempo posible llegar desde la casa? ¿cuánto tiempo es esta vez? La chica se mueve a velocidad  $v$  en el suelo y a velocidad  $u < v$  cuando usa un bote.



Aquí podemos añadir a la última idea que si se pregunta la forma más rápida de llegar a un plano (en un problema de 3D) o a una línea (en 2D), entonces este plano o línea se puede sustituir por un punto muy lejos (en el infinito) en la dirección perpendicular a ella. La razón para eso es bastante simple: toma la misma cantidad de tiempo para llegar a cualquier punto en el plano (línea) desde ese punto muy lejano. Si pensamos en esto en términos de óptica geométrica, entonces significa que un conjunto de rayos de luz normales a la superficie cae sobre el plano (línea).

**Pr 18.** Un chico se sitúa en el punto  $A$  en un río, a una distancia  $a$  de la orilla. Puede nadar a velocidad  $u$  o correr a velocidad  $v > u$  en la orilla, el agua fluye en el río a velocidad  $w > u$ . El niño quiere llegar al punto  $C$  río arriba en la orilla del río con un tiempo mínimo. ¿A qué distancia  $x$  del punto  $B$  alineado con el punto  $A$  debería salir del agua?



Aquí tenemos dos opciones: primero, utilizar un enfoque de fuerza bruta y expresar el tiempo de viaje  $t$  en función de  $x$  y luego igualar  $\frac{dt}{dx} = 0$ . La segunda opción es aplicar los métodos de la óptica geométrica, sin embargo, observe que en el marco del laboratorio, la velocidad en el agua depende de la dirección de la natación, y En el marco del agua, los puntos inicial y final se encuentran en movimiento.

**Advertencia:** El principio de Fermat se puede aplicar solo si las velocidades son las mismas en todas las direcciones y los puntos iniciales y finales están en reposo.

Ahora tenemos dos opciones: primero, podemos tratar de modificar el problema para que mientras la respuesta sea la misma, el principio de Fermat sea aplicable (queda a tarea del lector hacer esto). La segunda opción es usar el método de Huygens para construir frentes de onda; consideremos este enfoque con más detalles.

**Idea 26:** Al estudiar un proceso reversible, a veces, es más fácil analizar el proceso inverso.

Observe que en el caso del problema 18, el proceso puede revertirse: si hacemos todas las velocidades opuestas, el río fluye de derecha a izquierda, el niño comienza a correr desde el punto  $C$  y quiere llegar al punto  $A$  en el río lo más rápido posible. Obviamente, si una cierta trayectoria es la más rápida entre todas las alternativas, entonces la misma se aplica al proceso inverso respectivo.

**Idea 27:** Para los problemas de ruta más rápida en cinemática, se puede utilizar el enfoque basado en el principio de Huygens.

Para los problemas de propagación de las ondas, según el principio de Huygens, los frentes de las ondas se pueden construir paso a paso, poniendo una serie de fuentes de luz en un frente de onda anterior. Luego, después de un corto período de tiempo  $t$ , alrededor de cada fuente de luz ficticia, se forma un frente de onda circular de radio  $ct$  (donde  $c$  representa la velocidad de la luz); el nuevo frente de onda general es la envoltura de todos los frentes de onda pequeños, vea la figura (los puntos naranjas son la primera generación de fuentes de Huygens y los círculos naranjas son los respectivos frentes de onda; las líneas rojas son los frentes de onda generales y el color marrón corresponde a las fuentes de Huygens de segunda generación).

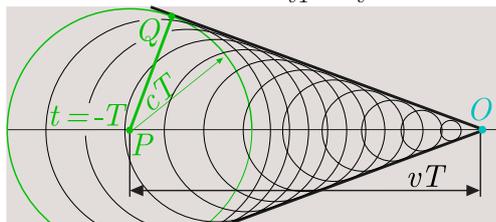


En el caso de las ondas de luz, una vez que tenemos el patrón de frentes de onda, los rayos de luz serían las curvas que están perpendiculares a los frentes de onda en todas partes.

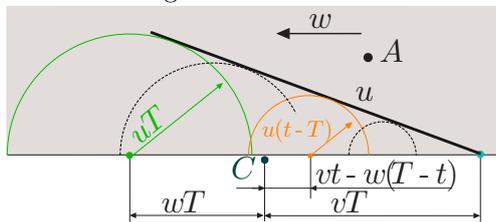
He aquí una simple demostración de cómo se puede aplicar el principio de Huygens para los cálculos, expresemos el ángulo del denominado *cono de Mach* en términos de velocidad de onda  $c$  y velocidad de fuente de onda  $u$ . Si la fuente de onda se

<sup>6</sup>Clásicamente la radiación de Cherenkov se usa para la radiación creada por cargas superlumínicas: en medio dieléctrico, la velocidad de las ondas de luz se reduce  $n$  veces, donde  $n$  es el coeficiente de refracción y las partículas relativistas pueden moverse más rápido que eso; sin embargo, las *explosiones sónicas* (onda de choque causada por un vuelo supersónico) y las olas detrás de barcos rápidos son causadas por el mismo fenómeno físico.

mueve más rápida que las ondas, da lugar a lo que es conocida como *radiación de Cherenkov*<sup>6</sup>. Consideremos un barco que se mueve a lo largo de una línea recta y construyamos el frente de onda como se discutió anteriormente, vea la figura a continuación. Hemos dibujado una serie de círculos correspondientes a las perturbaciones que han creado la fuente móvil a lo largo de su trayectoria en una serie de momentos. La que envuelve los frentes de onda es una línea recta, porque el radio de un círculo es proporcional a la distancia de su centro desde la posición actual  $O$  de la fuente de onda. El ángulo  $\angle POQ$  es llamado mitad del *ángulo del cono de Mach*, se llama *cono* porque en la geometría tridimensional los círculos se convierten en esferas y la envoltura de los frentes de onda se convierte en un cono. Es sencillo deducir que  $\sin \angle POQ = \frac{cT}{vT} = \frac{c}{v}$ .

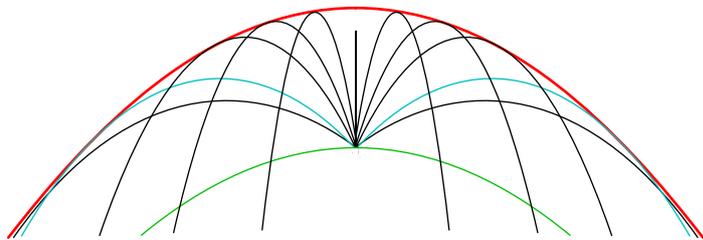


Continuando con el problema 18 (con las velocidades invertidas como se discutió anteriormente), necesitamos construir frentes de onda como los conjuntos de puntos más lejanos que el niño puede alcanzar para un tiempo  $T$  una vez que sale desde el punto  $C$  y comenzando a nadar en un momento de tiempo intermedio arbitrario  $t < T$ . La construcción de tal frente de onda se muestra en la figura a continuación.



Aquí, el círculo verde corresponde al conjunto de puntos más lejanos que el chico puede alcanzar si comienza a nadar inmediatamente y el punto cian representa su posición si continúa corriendo a lo largo de la costa; la línea negra gruesa muestra el frente de onda general. Si dejamos que el frente de onda evolucione, se propaga hacia el punto  $A$  y lo alcanza en un momento determinado  $T$ . Nuestro procedimiento esencialmente prueba todas las estrategias de natación y, por lo tanto,  $T$  equivale al tiempo de viaje más corto; lo que queda por hacer es rastrear lo que las fuentes de Huygens crearon en esa parte del frente de onda que alcanzó el punto  $A$ , es decir, lo que podría ser la trayectoria óptima del chico.

**Idea 28:** Las preguntas que involucran el lanzamiento óptimo de proyectiles a menudo se pueden reducir al *problema de rango balístico*: un cañón puede disparar proyectiles con una rapidez de lanzamiento fija; ¿en qué rango se pueden golpear los objetivos? Por lo tanto, es útil conocer la respuesta, los objetivos deben estar dentro de una *región parabólica* y el cañón está *en su foco*; este paraboloide es la envoltura de todas las trayectorias de proyectiles posibles, vea la figura (la curva roja es la envoltura, las curvas cian son trayectorias de ángulos de lanzamiento  $45^\circ$  y las curvas verdes de  $0^\circ$ ).



Para poder utilizar todo el potencial de la idea 28, los siguientes hechos deben tenerse en cuenta.

**Hecho 6:** Las curvas negras y cian (en la figura de arriba) representan las trayectorias óptimas para golpear objetivos en la parábola roja: para estas trayectorias, La velocidad de lanzamiento del proyectil en el origen es mínima.

De hecho, para un objetivo dentro de la región  $\mathcal{R}$ , la región se puede hacer más pequeña al reducir la velocidad de lanzamiento de tal manera que el objetivo aún permanezca dentro del campo de tiro.

**Hecho 7:** Cuando se dispara a un objetivo con la menor rapidez de lanzamiento posible, la trayectoria y el límite del rango de tiro (correspondiente a la velocidad de lanzamiento) son tangentes entre sí en la posición del objetivo.

Si confía en lo que se ha indicado anteriormente (o lo ha demostrado una vez y ahora quiere usarlo como hecho), es fácil averiguar los parámetros de la parábola: en primer lugar, la trayectoria del ángulo de lanzamiento de  $90^\circ$  coincide con la punta de la parábola y la curva roja debe tener la **misma forma** que la curva verde, ya que la curva verde representa la trayectoria óptima para objetivos a altitudes muy bajas debajo del horizonte.

Verifique lo anterior resolviendo el siguiente problema.

**Pr 19.** Un cañón está situado en el origen de los ejes de coordenadas y puede dar una velocidad inicial  $v_0$  a un proyectil, la dirección de disparo se puede elegir a voluntad. ¿Cuál es la región del espacio  $\mathcal{R}$  que puede alcanzar el proyectil?

Esta pregunta es un ejemplo de la clase de problemas que parecen fáciles, pero la solución puede llegar a ser muy larga si se resuelve a fuerza bruta. Esto puede llevar a errores o a renunciar por completo al problema.

**Advertencia:** Si las ecuaciones se vuelven tediosamente largas, entonces es el momento adecuado para hacer una pausa y pensar si puede haber una forma alternativa de llegar a la respuesta. Si existe una, vale la pena desistir de la otra y probar el otro camino y ver si es más corto.

En tales casos, antes de los cálculos reales, debe delinear una estrategia para abordar el problema: debe ver en su mente un “camino”, una secuencia de cálculos que espera poder realizar y que, si tiene éxito, le dará la respuesta.

Aquí una estrategia es compilar una ecuación para el ángulo de lanzamiento  $\alpha$  requerido para golpear un objetivo en las coordenadas  $(x, z)$ ; si hay soluciones para esta ecuación, el objetivo se encuentra dentro de la región  $\mathcal{R}$  y si no hay soluciones, entonces está fuera. Luego, la fórmula que describe la región proviene de la condición (desigualdad) que debe satisfacerse para la existencia de soluciones, además, es bastante fácil

darse cuenta de que si el punto  $T = (x, z)$  se encuentra dentro de la región  $\mathcal{R}$ , deberían haber dos soluciones para el ángulo de lanzamiento. De hecho, el objetivo puede ser golpeado tanto en la parte ascendente de la trayectoria del proyectil, como en la parte descendente de la misma<sup>7</sup>. Por lo tanto, esperamos que la ecuación tenga dos soluciones ( $T$  está dentro de  $\mathcal{R}$ ), una solución ( $T$  está en el límite de  $\mathcal{R}$ ), o no tenga soluciones ( $T$  está fuera de  $\mathcal{R}$ ). Tal comportamiento es consistente con la ecuación cuadrática, así que podemos esperar que con una buena parametrización (ver idea 24), obtenemos una ecuación cuadrática. Para resumir, formulemos:

**Idea 29:** Si se le pide que busque la región en la que existe una solución para un determinado problema, el límite de esta región a menudo se puede encontrar como una curva en la que se desvanece algún discriminante.

La solución del problema 19 también puede usarse para obtener una conclusión particular simple que formulamos como un hecho.

**Hecho 8:** Si el objetivo está al mismo nivel que el cañón, el ángulo de disparo óptimo (correspondiente a la velocidad de lanzamiento más pequeña) es  $45^\circ$ .

De hecho, de la solución del problema 19 tenemos una ecuación cuadrática para el ángulo de disparo, donde podemos poner  $z = 0$ ; el resultado requerido se obtiene de inmediato si utilizamos el hecho de que, para un disparo óptimo, el discriminante de la ecuación es cero.

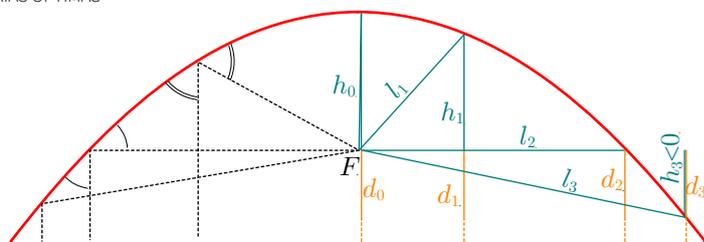
**Pr 20.** Bajo los supuestos del problema 19 y sabiendo que el límite de la región  $\mathcal{R}$  es una parábola, demuestre que el cañón está en el foco de la parábola.

Aunque haya una solución extremadamente fácil para este problema, puede no ser fácil de imaginar, porque se necesita de:

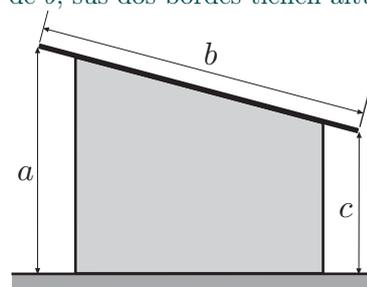
**Idea 30:** Para bastantes problemas de cinemática soluciones geométricas que hacen uso de propiedades de la parábola son posibles y generalmente más cortas que las alternativas.

**Hecho 9:** Cada parábola tiene un foco, cuyas propiedades son fácilmente expresadas en términos de óptica geométrica: si la parábola refleja luz, todos aquellos rayos paralelos al eje de simetría son reflejados hacia el foco (líneas punteadas en la figura); debido al principio de Fermat, significa que para cada punto en la parábola la distancia al foco más la distancia a la fuente de luz en el infinito son iguales,  $l_1 + h_1 + d_1 = 2h_0 + d_0 = \dots$ ; como  $d_0 = d_1 = \dots$ , tenemos que  $2h_0 = l_1 + h_1 = l_2 = l_3 + h_3$  (ver figura).

<sup>7</sup>Para ser más rigurosos, debemos considerar los dos puntos de intersección de la trayectoria del proyectil con una línea horizontal  $z = z_0$  y cómo se mueven estas intersecciones  $x = x_1$  y  $x = x_2$  (con  $x_2 > x_1$ ) cuando se cambia el ángulo de lanzamiento  $90^\circ$  a  $0^\circ$ : para  $\alpha = 90^\circ$ , ambos están en  $x = 0$  y comienzan a moverse a valores más grandes de  $x$  al aumentar  $\alpha$ . Para un determinado valor de  $\alpha$ ,  $x_2$  alcanza su valor máximo  $x_{\text{máx}}$  y comienza a disminuir; las dos soluciones se fusionan y desaparecen cuando la trayectoria es tangente a la línea  $z = z_0$ . Por lo tanto, durante este proceso, cada punto en el segmento  $0 < x < x_{\text{máx}}$  pasa exactamente dos veces por uno de los puntos de intersección (ya sea  $x_1$  o  $x_2$ ) y el objetivo en ese punto  $(x, z_0)$  puede ser alcanzado por dos valores correspondientes de  $\alpha$ .



**Pr 21.** ¿Cuál es la velocidad inicial mínima que debe darse a una piedra para lanzarla sobre un techo inclinado? el techo tiene un ancho de  $b$ , sus dos bordes tienen alturas  $a$  y  $c$ .



Este problema tiene dos soluciones, una a fuerza bruta y una breve pero intrincada. Sin embargo, ambas soluciones comienzan de la misma manera, utilizando:

**Idea 31:** Para encontrar un mínimo (o un máximo) tendremos que variar los parámetros libres (en este caso, el punto de lanzamiento y el ángulo) en incrementos infinitesimalmente pequeños y ver qué sucede con la cantidad de interés. Si aumenta para todas las variaciones permitidas, hemos encontrado un mínimo.

En el problema se pretende usar este método para demostrar que la piedra toca ambos bordes del techo.

Ambas soluciones comparten el siguiente paso, reducir el problema al caso  $c = 0$ . Esta reducción sería muy útil porque entonces conocemos el punto de lanzamiento óptimo: el borde derecho del techo. Para este paso se necesita:

**Idea 32:** Para una caída libre de un cuerpo, hay una integral de movimiento (cantidad que se conserva),  $\frac{1}{2}v^2 - gh$ , donde  $v$  es la rapidez instantánea y  $h$  es la altura del cuerpo.

Esto, por supuesto, es una forma particular de la ley de conservación de energía, que se considerará en muchos más detalles en las otras guías (principalmente en mecánica).

Luego tenemos que aplicar la idea 28; mientras que en el caso del enfoque de fuerza bruta, esta es una aplicación matemática directa de la idea. La solución más complicada hace uso de la idea 30 (y de hecho 9). Consideremos un problema más que ilustra el uso de la idea 30.

**Pr 22.** Se lanza un proyectil a un blanco con la menor rapidez posible; demuestre que la velocidad de lanzamiento es perpendicular a la velocidad final (es decir en el blanco).

Nótese que este problema se puede resolver sin la idea 30. Entonces podríamos optar por usar la idea 19 considerando

el movimiento relativo de los dos proyectiles que son lanzados simultáneamente a ángulos un poco diferentes (muy cercanos al ángulo óptimo) con la misma rapidez. También necesitará hacer uso de observaciones matemáticas formuladas a continuación como hechos.

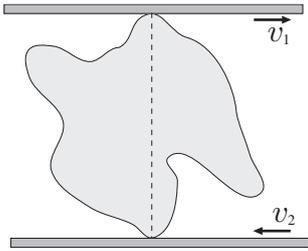
**Hecho 10:** Si una función  $f(x)$  tiene un mínimo o un máximo en  $x = x_0$  entonces para pequeñas variaciones  $\Delta x$  desde  $x_0$ , la variación del cambio de la función  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$  permanece cuadráticamente pequeña<sup>8</sup> y se puede despreciar.

**Hecho 11:** Como añadido a la suma vectorial (ver idea 1), si la diferencia entre dos vectores del mismo módulo es muy pequeña quiere decir que son casi perpendiculares.

Intente resolver el problema 22 usando este enfoque alternativo.

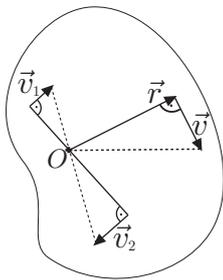
## 5. CUERPOS RÍGIDOS, BISAGRAS Y CUERDAS

**Pr 23.** Se ha apretado un bulto rígido entre dos cintas, una de las cuales se mueve a la velocidad  $v_1$  y la otra a  $v_2$ . En el momento dado, las velocidades son horizontales y los puntos de contacto del bulto y las placas están alineados. Marque en la figura todos los puntos del bulto con rapidez iguales a  $v_1$  y  $v_2$ .



Esta pregunta se basa en:

**Idea 33:** El movimiento de un cuerpo rígido siempre puede considerarse como rotación alrededor de un eje de rotación instantáneo (para geometría 2D, alrededor de un centro de rotación) con una cierta velocidad angular.



Este centro de rotación puede ser reconstruido si:

- (a) Sabemos las direcciones de las velocidades de dos puntos y estas direcciones no son paralelas, entonces es donde se intersecan las líneas perpendiculares dibujadas desde estos puntos;
- (b) Conocemos las velocidades de dos puntos y los vectores son paralelos y perpendiculares a la línea que conecta

estos puntos; entonces es donde se intersecan la línea que conecta los puntos y la línea que conecta las puntas de los vectores de velocidad (vea la figura)

Tenga en cuenta que también es posible que las velocidades de dos puntos sean iguales (por módulo y por dirección), en cuyo caso el centro de rotación está en el infinito, es decir, el cuerpo se mueve de manera traslacional. Todas las otras combinaciones no cubiertas por las opciones (a) y (b) son imposibles para un cuerpo rígido. Una vez que se ha encontrado el centro de rotación, se puede encontrar la velocidad de cualquier punto como un vector perpendicular a la línea dibujada desde el centro de rotación con un módulo proporcional a la distancia  $r$  desde el centro de rotación (ver figura), de acuerdo con la fórmula  $v = \omega r$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular instantánea. La última fórmula puede ser generalizada:

**Hecho 12:** Si un vector  $\vec{a}$  rota con velocidad angular  $\vec{\omega}$  de manera que el eje de rotación sea perpendicular a  $\vec{a}$  entonces su derivada con respecto al tiempo  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  es perpendicular a  $\vec{a}$  y  $|\frac{d\vec{a}}{dt}| = \omega a$

Esta fórmula se deriva de manera similar al hecho 11: necesitamos aplicar la definición 1 y considerar un pequeño incremento de tiempo  $\Delta t$ . Según la definición de derivadas de vectores,  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  es igual a  $\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$  al límite de incrementos infinitesimalmente pequeños  $\Delta\vec{a}$  y  $\Delta t$ . El incremento  $\Delta\vec{a}$  se calcula utilizando la definición 1: esta es la base del triángulo isósceles, cuyos lados iguales están formados por las posiciones inicial y final del vector  $\vec{a}$ . Como el vector gira a la velocidad angular  $\omega$ , el ángulo del vértice (en radianes) es  $\omega\Delta t$ ; por lo tanto, la longitud de la base es igual a  $2a \tan(\omega\Delta t/2) \approx a\omega\Delta t$ <sup>9</sup>. Así,  $|\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}| = \frac{a\omega\Delta t}{\Delta t} = a\omega$ <sup>10</sup>. Tenga en cuenta que la fórmula se puede reescribir a través de un producto vectorial como  $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{a}$ . Dentro de esta guía, los productos vectoriales no serán necesarios; sin embargo, es útil saber que un producto vectorial de dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  es igual al área  $S = ab \sin \alpha$  del paralelogramo construido entre los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  ( $\alpha$  es el ángulo entre  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ); el vector resultante es perpendicular a ambos  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , la dirección es dada por la regla de la mano derecha (gire la mano desde el primer vector hasta el segundo).

Ahora podemos aplicar el hecho 12 a un vector de velocidad en rotación: imagine que un punto gira con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor del origen de manera que su distancia al origen permanezca constante. Según la fórmula que obtenemos  $v = |\frac{d\vec{r}}{dt}| = \omega r$  y  $a = |\frac{d\vec{v}}{dt}| = \omega v = \omega^2 r$ . La última ecuación también se puede escribir para el vector de aceleración como  $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$ ; el signo negativo significa que la aceleración se dirige hacia el origen; por eso se llama *aceleración centrípeta*. Si la velocidad angular no es constante, el punto tendrá también una *aceleración tangencial* (tangente a la trayectoria).

**Definición 4:** La aceleración angular se define como la derivada con respecto al tiempo de la velocidad angular  $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ .

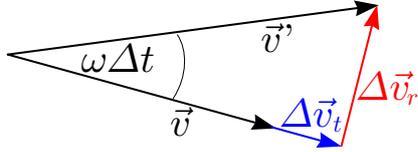
Consideremos el caso cuando el eje de rotación permanece fijo; entonces, tanto  $\vec{\epsilon}$  como  $\vec{\omega}$  tienen una dirección fija y, por lo tanto, son esencialmente cantidades escalares, de modo que los signos del vector se pueden eliminar. Para derivar una expresi-

<sup>8</sup>Esto es consecuencia de la expansión de Taylor, que se discutirá en otras guías.

<sup>9</sup>Aquí hemos utilizado el cálculo aproximado para ángulos pequeños:  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ , donde  $\alpha \ll 1$  se mide en radianes.

<sup>10</sup>Hemos reemplazado la igualdad aproximada por la igualdad estricta porque la tangente se toma desde un ángulo infinitamente pequeño.

sión para la aceleración tangencial, consideremos un pequeño incremento de tiempo  $\Delta t$ ; esto corresponde a un incremento de velocidad angular  $\Delta\omega$ , así como a un pequeño incremento de velocidad  $\Delta\vec{v}$ . Vamos a descomponer el incremento de velocidad en componentes radiales y tangenciales,  $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_r + \Delta\vec{v}_t$ . Ahora, el vector de velocidad cambia tanto su dirección como su longitud, vea la figura a continuación.



Tenga en cuenta que, en la figura, los incrementos son exagerados, en realidad, son muy pequeños. Es fácil ver en la figura que, para una aproximación de ángulo pequeño,  $\Delta v_r = \omega\Delta t \cdot v$ ; con esto recuperamos la expresión para la aceleración radial (centrípeta)  $a_r = \omega v$  solo necesitamos dividir la igualdad por  $\Delta t$ . Mientras tanto, debido a la pequeña aproximación del ángulo,  $|\Delta v_t| \approx |\vec{v}'| - |\vec{v}| = \omega' r - \omega r = \Delta\omega r = \varepsilon\Delta t r$ . Por lo tanto, en el límite de incrementos infinitesimales,  $a_t = \frac{|\Delta v_t|}{\Delta t} = \varepsilon r$ , esto nos lleva a:

**Hecho 13:** Si un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo entonces la aceleración de cualquiera de sus puntos tiene dos componentes: aceleración centrípeta  $\omega^2 r = v^2/r$  dirigida hacia el eje de rotación y una componente perpendicular a él, la aceleración tangencial  $\varepsilon r$ . ¡Nótese bien! la fórmula no se puede aplicar si tratamos con un eje de rotación instantáneo<sup>11</sup> (más precisamente, la fórmula puede usarse si la aceleración del eje de rotación instantánea es cero). La fórmula  $v^2/r$  también se puede utilizar para la aceleración perpendicular al movimiento de un punto a lo largo de una trayectoria curva; entonces,  $r$  es el radio de curvatura de la trayectoria.

**Pr 24.** El cicloide es una curva que se puede definir como la trayectoria de un punto marcado en el borde de una rueda de radio  $R$ . Determine el radio de curvatura de dicha curva en su punto más alto.

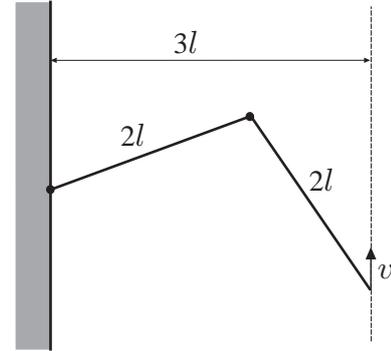
**Idea 34:** Para problemas de cinemática, a menudo la aceleración tangencial no se conoce inicialmente, pero la velocidad de rotación es conocida y, por lo tanto, la aceleración centrípeta se puede calcular fácilmente usando el hecho 13. Es posible que pueda determinar la dirección de la aceleración utilizando otros argumentos, en cuyo caso puede recuperar toda la aceleración utilizando la idea 4.

El siguiente problema ilustrará esta idea. Sin embargo, la siguiente idea también será útil.

**Idea 35:** Dado que la distancia entre dos puntos es fija en un cuerpo rígido, las proyecciones de velocidades de ambos puntos en la línea que los conecta son iguales. ¡Nótese bien! las respectivas proyecciones de aceleraciones no son necesariamente iguales debido a la aceleración centrípeta; cuando se trata de aceleraciones necesita usar el hecho 13 en el marco de referencia de un punto, en su lugar.

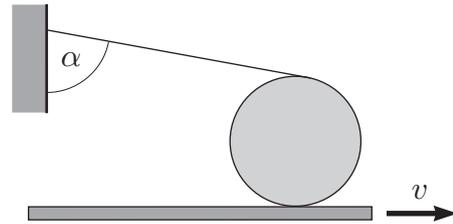
**Pr 25.** Una estructura con bisagras consiste en dos barras

de longitud  $2l$ . Uno de sus extremos está unido a una pared, el otro se está moviendo a una distancia de  $3l$  de la pared a una velocidad vertical constante  $v_0$ . Encuentre la aceleración de la bisagra que conecta las barras cuando a) la barra más cercana a la pared es horizontal b) la velocidad del punto de conexión es cero.



Ahora, continuemos con problemas de carretes en rotación:

**Pr 26.** Una cuerda se ha enrollado alrededor de un carrete, el otro extremo del hilo se fija a una pared. El cilindro se encuentra en una superficie horizontal que se tira con velocidad horizontal  $v$  (perpendicular al eje del cilindro). Encuentre la velocidad del eje del carreteo como una función de  $\alpha$ , el ángulo que la cuerda forma con la vertical. El carrete rueda sobre la superficie sin deslizarse.



Este problema se puede resolver utilizando la idea 33, sin embargo, también se puede resolver con la siguiente idea (se recomienda que pruebe ambos métodos). En estos casos, necesitamos:

**Idea 36:** Los problemas que involucran a los carretes y al (des)enrollamiento de cuerdas se pueden resolver escribiendo la ecuación de "balance de la cuerda", es decir, relacionando la velocidad de desenrollado de la cuerda con la velocidad del carrete.

Al escribir tales ecuaciones, es útil notar que mientras la cuerda es desenrollada no está girando, entonces la tasa de desenrollado es igual a  $\Omega R$ , donde  $\Omega$  es la velocidad angular del carrete y  $R$  su radio; si la cuerda desenrollada estuviera girando, se puede utilizar idea 17 para concluir que ahora la velocidad angular del carrete  $\Omega$  debe sustituirse con la diferencia de dos velocidades angulares. Para relacionar la velocidad de desenrollado de la cuerda con el movimiento del carrete, es útil la siguiente idea general (con un amplio ámbito de aplicación).

**Idea 37:** Dibuje dos estados muy cercanos (infinitesimalmente cercanos) del sistema y examine el cambio en la cantidad de interés (en este caso, la longitud de la cuerda).

Al hacer eso, no debemos olvidar que el cambio fue infini-

<sup>11</sup>Para el eje instantáneo  $r$  no sería constante, lo que hace que la derivación sea nula.

tesimal, por lo que podemos simplificar nuestros cálculos (por ejemplo, dos estados posteriores de la cuerda pueden considerarse paralelos). Tenga en cuenta que ya hemos utilizado este método cuando derivamos el hecho 13.

**Pr 27.** Un extremo de una barra de longitud  $l$  está apoyado por el piso y el otro se apoya contra una pared vertical. ¿Cuál es la velocidad  $u$  y la aceleración  $a$  del extremo inferior en el momento en que el extremo superior se desliza hacia abajo a una velocidad constante  $v$  y el ángulo entre el piso y la barra es  $\alpha$ ?

Aquí la velocidad se puede encontrar usando la idea 33 y la aceleración con la idea 34; sin embargo, se puede resolver con la siguiente idea (su solución completa se encuentra en la sección de sugerencias).

**Idea 38:** Si las partes de un sistema están conectadas por algunas cuerdas con longitud fija, entonces una forma de calcular las velocidades y las aceleraciones es escribir esta relación en términos de coordenadas y tomar la derivada temporal (segunda derivada para la aceleración) de la expresión completa.

## 6. TEMAS VARIADOS

**Idea 39:** Algunos problemas de cinemática se basan en la ley de continuidad<sup>12</sup>: si hay un flujo estacionario de algo y consideramos una cierta región del espacio, lo que fluye adentro de la región, fluye también hacia afuera.

Ilustramos la ley de continuidad con el siguiente problema.

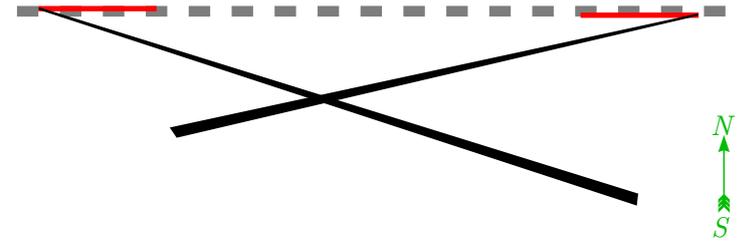
**Pr 28.** Una carretera de un solo carril está llena de autos que se mueven a la velocidad  $v = 90$  km/h. La distancia promedio entre los carros vecinos es tal que un observador permanente mediría un lapso de tiempo  $\tau = 2$  s desde la cabeza del primer automóvil hasta la cabeza del segundo automóvil. Un auto tiene que detenerse debido a un mal funcionamiento y una cola de autos en pie comienza a formarse detrás de él. Encuentre la velocidad  $u$  con la cual la longitud de la cola está creciendo si la distancia promedio entre los centros de los coches vecinos en la cola es  $l = 6$  m?

Tenga en cuenta que el flujo de automóviles no es estacionario en el marco de referencia del laboratorio; por lo tanto, primero debe usar la idea 1 para hacerlo estacionario.

**Idea 40:** En el caso de problemas relacionados con objetos en movimiento y medios en movimiento (aire, agua), si los objetos en movimiento dejan rastros y se le pide que analice un boceto (una foto), preste atención al hecho de que si los objetos se encontraron, el punto donde se encuentran corresponde a un punto de intersección de los rastros.

**Pr 29.** La figura de abajo es la copia de una foto aérea: hay dos trenes, (representados en rojo) ambos viajan con una rapidez de  $v = 50$  km/h a lo largo de un ferrocarril (línea discontinua gris). Sus motores emiten humo, cuyos caminos están representados por líneas negras. Determine la dirección y velocidad del viento (expresé la dirección del viento como un ángulo

en sentido horario desde el norte). Puede dibujar líneas y medir distancias usando una regla en la figura.



**Idea 41:** A veces es útil incluir un eje de tiempo además de las coordenadas espaciales al analizar gráficos, incluso si el texto del problema no menciona explícitamente la dependencia del tiempo. Por lo tanto, estudiaremos gráficos bidimensionales para problemas unidimensionales y gráficos tridimensionales para movimientos en el plano.

Intente aplicar esta idea al siguiente problema. Tenga en cuenta los siguientes hechos estereométricos: 3 puntos siempre se encuentran en un plano; una línea recta y un punto determinan un plano (a menos que el punto se encuentre en la línea).

**Pr 30.** Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se encuentran en línea recta, por lo que  $B$  se sitúa entre  $A$  y  $C$ . Tres cuerpos  $a$ ,  $b$  y  $c$  comienzan desde estos puntos moviéndose a velocidades constantes (pero diferentes). Se sabe que i) si faltara  $c$ , colisionarían  $a$  y  $b$  y ii) si faltara  $b$ , colisionarían  $a$  y  $c$  y sucedería antes que en i). ¿Colisionarían  $b$  y  $c$  si falta  $a$ ?

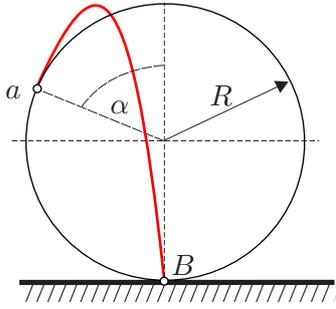
En matemáticas, para problemas geométricos, existe una técnica llamada construcciones auxiliares: la solución del problema se puede simplificar significativamente si se dibuja una o más líneas adicionales. Mientras que en física, tales construcciones se usan con menos frecuencia en algunos casos las construcciones auxiliares son muy útiles (de hecho, la idea 41 hace uso de dicha construcción). La siguiente idea es de ayuda para una construcción auxiliar más.

**Idea 42:** A veces es útil considerar un conjunto ficticio de partículas auxiliares en lugar de una sola partícula.

Si bien el siguiente problema se puede resolver mediante fuerza bruta, la introducción de un conjunto de partículas auxiliares (liberadas en toda la rueda al mismo tiempo) simplifica los cálculos.

**Pr 31.** Una rueda de radio  $R$  está situada a la altura  $R$  del suelo y gira a velocidad angular  $\Omega$ . En algún punto  $A$ , una gota de agua se separa de la rueda y llega al suelo en el punto  $B$  situado directamente debajo del eje de la rueda (ver figura). Encuentre el tiempo de caída y la ubicación del punto  $A$  (es decir, ángulo  $\alpha$ ).

<sup>12</sup>La ley de continuidad juega un papel importante en la física en general.



Además de los anteriores, hay una idea que ayuda a resolver este problema. Sin embargo, es muy poco estándar, es decir, casi no hay otros problemas donde se pueda usar esta idea. Para aplicar la idea en otros problemas debe formularse de forma muy general, específicamente para esta pregunta, imagine que al mismo tiempo con la gota en cuestión, pequeñas gotas se separan de todos los otros puntos de la rueda también. Está claro que en un marco de referencia en caída libre este conjunto de gotas forma un círculo en todo momento; no debería ser demasiado difícil encontrar el radio de ese círculo en función del tiempo. La primera gota que toca el suelo es la que nos interesa. Podemos expresar el tiempo a partir de la ecuación que describe la condición del contacto (la altura del punto más bajo del círculo se convierte en cero), idea 10.

**Idea 43:** Para algunos problemas, la principal dificultad es la comprensión de lo que está sucediendo; una vez que se entiende, los cálculos suelen ser bastante fáciles. Mantenga la mente en calma: en las competiciones de física, no se le pide que haga algo imposible, actúe como detective investigando paso a paso lo que está sucediendo y reduciendo las posibilidades mediante el método de exclusión.

¡Y aquí hay un caso de prueba para su detective interior!

**Pr 32.** Esta es la foto de una hélice giratoria de un avión se toma con la cámara de un teléfono. Para tal cámara, la imagen se escanea línea por línea: al principio, se lee la columna de píxeles de la imagen más a la izquierda, seguida de la segunda columna de píxeles, etc.

i) ¿En qué dirección gira la hélice vista el fotógrafo (horaria o antihoraria)?

ii) ¿Cuántas palas tiene la hélice?

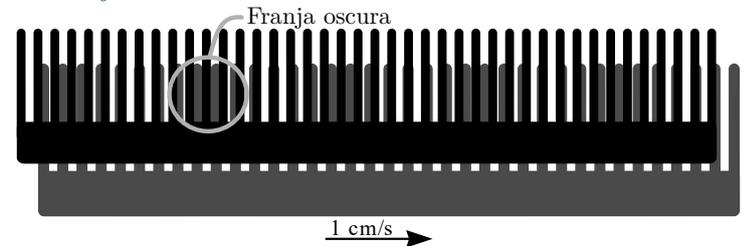
iii) ¿Cuántas rotaciones hace la hélice en un minuto si el tiempo total de escaneo de esta imagen fue de un octavo de segundo?



La primera parte del siguiente problema también se puede resolver utilizando la idea 43. La segunda parte, sin embargo, se vuelve matemáticamente desafiante; sería mucho más fácil resolverla utilizando la siguiente idea.

**Idea 44:** Los problemas de propagación de las ondas a menudo se pueden analizar convenientemente utilizando los vectores de onda: usando coordenadas ortogonales  $(x, y, z)$  y tiempo  $t$ , una onda sinusoidal  $a(x, y, z, t)$  puede representarse como  $\text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ , donde el producto escalar del vector de onda  $k$  y el radio vector  $\vec{r}$  igual a  $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ . Aquí  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda y la rapidez de propagación de la onda sería  $v = \omega/k$ <sup>13</sup>.

**Pr 33.** i) Hay dos peines que se muestran en la siguiente figura. La figura representa correctamente las proporciones de los peines; la escala de la figura es desconocida. El peine gris se mueve con una velocidad de  $v = 1 \text{ cm/s}$  (la dirección de su movimiento se muestra en la figura); el peine negro está en reposo. Encuentre la velocidad y la dirección del movimiento de las franjas oscuras.



ii) Ahora, tenemos la misma situación (y la misma pregunta) que antes, excepto que el peine negro está bajo un pequeño ángulo  $\alpha \ll 1$  con respecto al peine gris (para propósitos numéricos use  $\alpha = 0,1 \text{ rad}$ ).

¿Cómo aplicar la idea 44 al problema 33? Preste atención a lo siguiente, en lugar de un peine móvil, podemos hacer una onda  $a(x, y, t) = \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ ; entonces, los centros de las púas corresponden a puntos donde  $a(x, y, t) = 1$ . Si tenemos dos peines superpuestos, la “región transparente” donde los centros de las púas de ambos peines están en la misma posición y se pueden encontrar como los puntos donde  $a_1(x, y, t)a_2(x, y, t) = 1$  y las regiones donde las púas están casi en la misma posición se pueden encontrar como los puntos donde  $a_1(x, y, t)a_2(x, y, t) \approx 1$ . Ahora tenemos un producto de dos ondas sinusoidales, por lo que podemos decir que el patrón de Moiré (así es como se llaman estas franjas oscuras) se debe a una interacción no lineal de ondas. Además, para responder a la pregunta sobre cuál es la velocidad de propagación del patrón de Moiré, necesitamos descomponer este producto de senos en una suma de senos (para un seno, podemos calcular la velocidad como la razón de frecuencia angular y el módulo del vector de onda).

**Idea 45:** Las leyes de conservación conocidas son las de la energía, el momento y el momento angular<sup>14</sup>. Sin embargo, a veces se pueden conservar cantidades adicionales (entonces se debe demostrar que se conserva), lo que convierte problemas matemáticamente muy difíciles de resolver en todo lo contrario.

¿Cuáles pueden ser indicios de que una ley de conservación

<sup>13</sup>Ondas sinusoidales son estudiadas con más detalles en la guía de óptica física.

<sup>14</sup>Estos no suelen ser aplicables a problemas de cinemática.

no trivial es válida para un problema? Bueno, si entiende claramente que la dificultad es matemática (usted entiende lo que está pasando y puede escribir las ecuaciones) y lo que tiene a mano son ecuaciones diferenciales<sup>15</sup> entonces ese podría ser el caso. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema.

**Pr 34.** Un perro está persiguiendo a un zorro que corre a una velocidad constante  $v$  a lo largo de una línea recta. El módulo de la velocidad del perro es constante y también igual a  $v$ , pero el vector  $\vec{v}$  siempre se dirige hacia el zorro. Cuando el perro detectó al zorro y lo comenzó a perseguir, la distancia entre ellos era de  $L$  y, en el primer momento, sus vectores de velocidad formaron un ángulo recto. ¿Cuál es la distancia mínima entre ellos durante la persecución?

Aquí podemos expresar las componentes de velocidad del perro en términos de sus coordenadas (usando también las coordenadas del zorro, que son funciones conocidas del tiempo); estas son ecuaciones diferenciales. Como no se supone que usted sea capaz de resolver ecuaciones diferenciales para esta guía, este no debería ser el camino a seguir (a menos que esté debidamente parametrizado, ver idea 24, estas ecuaciones en realidad no son fáciles de resolver). Tenga en cuenta que en las competencias de física, siempre debe tener en cuenta cuáles son las habilidades matemáticas con las que se supone que está familiarizado, esto puede ayudarlo a reducir las opciones cuando no esté seguro de cuáles enfoques seguir<sup>16</sup>. Si bien las habilidades adicionales a veces son útiles, también pueden llevarlo fácilmente a un enfoque incorrecta (matemáticamente innecesariamente compleja o incluso imposible de resolver); por lo tanto, aplique sus habilidades adicionales solo si puede ver en su mente todo el camino hacia la respuesta, es decir, cuando esté seguro de que no tendrá dificultades matemáticas.

Tenga en cuenta que tales leyes de conservación no triviales pueden incluir todas estas cantidades que ingresan a las ecuaciones diferenciales, a excepción de las derivadas para las cuales se escriben estas ecuaciones. Por ejemplo, aquí, las ecuaciones expresan velocidades en términos de coordenadas, por lo que las velocidades no se pueden incluir. Si las ecuaciones expresaran aceleraciones en términos de velocidades y coordenadas, entonces ambas velocidades y coordenadas podrían ingresar a la ley (pero no a las aceleraciones). La ley de conservación se demuestra con una derivada con respecto al tiempo igual a cero. Por ejemplo, si nuestra ley de conservación fuera una suma de dos distancias, tendríamos que mostrar que las tasas de cambio de esas dos distancias son iguales por módulo y tienen signos opuestos.

## 7. CONCLUSIÓN

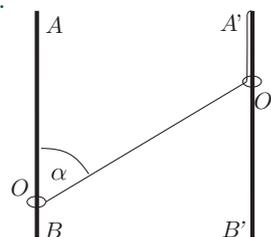
Algunas de las ideas anteriormente mencionadas (en particular, 1, 4, 5, 10, 14, 18, 19, 31, 37) son más universales que otras; en cualquier caso, todas valen la pena de recordar. Siempre es útil resumir en la mente las ideas usadas al encontrar la solución a un problema nuevo y tal vez usted podrá idear enfoques ¡completamente nuevos! A continuación, se presentan problemas basados en las ideas anteriores para más práctica.

<sup>15</sup>Estas son ecuaciones que relacionan derivadas de coordenadas (velocidades o aceleraciones como funciones de coordenadas y/o velocidades y que definen la evolución del sistema).

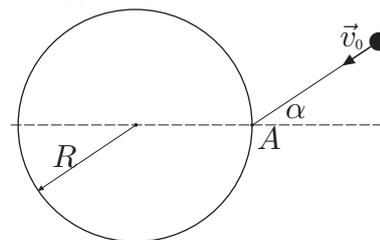
<sup>16</sup>Por supuesto, tales argumentos no pueden usarse para problemas de la vida real.

**Pr 35.** Un niño está nadando en un río de ancho  $L$ ; la velocidad del agua es  $u = 2$  m/s y el niño puede nadar con velocidad  $v = 1$  m/s. Estando en punto  $A$  cerca de la orilla, quiere llegar a un punto  $B$  cerca de la otra orilla que está directamente al otro lado del río ( $\vec{AB} \perp \vec{u}$ ). Dado a que el río es demasiado rápido, no puede evitar ser llevado río abajo a una cierta distancia  $a$  desde el punto  $B$ ; ¿cuál es el valor más pequeño posible de  $a$  que él puede alcanzar para la dirección de natación óptima?

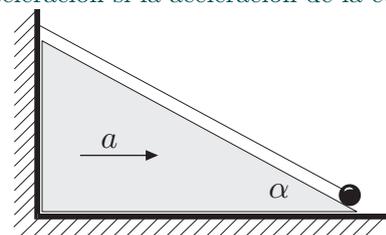
**Pr 36.** Los anillos  $O$  y  $O'$  se deslizan libremente a lo largo de las varillas fijas verticales  $AB$  y  $A'B'$  (ver figura); la distancia entre los rieles es  $b$  una cuerda que no se puede estirar se ha atado al anillo  $O$  y se ha tirado del anillo  $O'$ . El otro extremo de la cuerda se fija al punto  $A'$ . En el momento en que  $\angle AOO' = \alpha$ , el anillo  $O'$  se mueve hacia abajo a una velocidad constante  $v$ . Encuentre la velocidad y la aceleración del anillo  $O$  en ese momento.



**Pr 37.** Una pequeña pelota se mueve a una velocidad de  $v_0$  a lo largo de una superficie horizontal lisa y cae en un pozo cilíndrico vertical en el punto  $A$ , después de lo cual comienza a rebotar elásticamente contra la pared y el fondo horizontal liso. El pozo tiene profundidad  $H$  y radio  $R$ ; el ángulo entre  $\vec{v}_0$  y el diámetro del pozo dibujado a través del punto  $A$  es  $\alpha$ . ¿Qué condición se debe cumplir entre  $R$ ,  $H$ ,  $v_0$  y  $\alpha$  para que la pelota salga del pozo nuevamente? La rotación de la pelota puede ser despreciada.

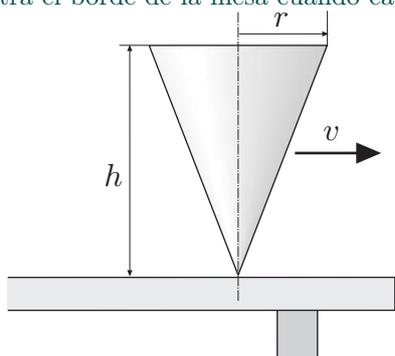


**Pr 38.** Una pelota  $A$  se encuentra en una cuña con un ángulo de  $\alpha$ . También está atada a una cuerda que no se puede estirar, cuyo otro extremo está unido a una pared vertical en el punto  $B$  (ver figura). ¿Cuál será la trayectoria de la pelota? ¿Cuál es su aceleración si la aceleración de la cuña es de  $a$ ?



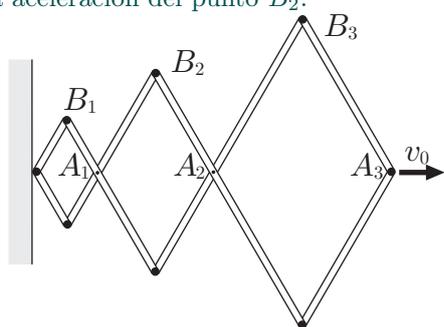
**Pr 39.** Un perro está persiguiendo a un zorro que corre a una velocidad constante  $v_1$  a lo largo de una línea recta. El módulo de la velocidad del perro es constante e igual a  $v_2$ , pero el vector  $\vec{v}$  siempre se dirige hacia el zorro. La distancia entre los animales era de  $l$  en el momento en que sus vectores de velocidad eran perpendiculares. ¿Cuál fue la aceleración del perro en ese instante?

**Pr 40.** Un trompo que tiene la forma de un cono (altura  $h$  y radio  $r$ ) se mueve a lo largo de una mesa lisa y gira rápidamente. ¿Cuál tiene que ser su velocidad de traslación  $v$  para evitar un choque contra el borde de la mesa cuando cae de esta?



**Pr 41.** Una cuerda uniforme ha sido fabricada con un material inflamable, la reacción de combustión viaja a lo largo de la cuerda a una velocidad  $v$ . La velocidad de una onda de choque en el aire es  $c$ , con  $c < v$ . ¿En qué curva debe colocarse la cuerda para hacer que la onda de choque alcance un punto dado al mismo tiempo desde todos los puntos de la cuerda? (encontrar una fórmula cuantitativa para la forma requiere resolver una ecuación diferencial simple).

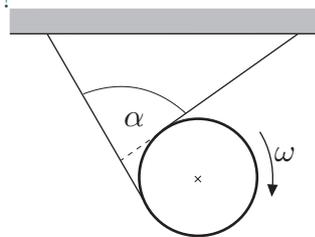
**Pr 42.** Una estructura con bisagras consiste en rombos con longitudes laterales de  $l$ ,  $2l$  y  $3l$  (ver figura). El punto  $A_3$  se mueve a una velocidad horizontal constante  $v_0$ . Encuentre las velocidades de los puntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $B_2$  en el momento en que todos los ángulos de la estructura sean iguales a  $90^\circ$ . Además, encuentre la aceleración del punto  $B_2$ .



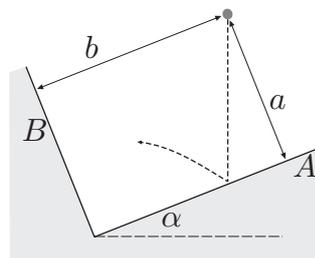
**Pr 43.** Dos lanchas parten simultáneamente de dos puertos ( $A$  y  $B$ ) a una distancia de  $l$  entre sí, las velocidades de las embarcaciones son  $v_1$  y  $v_2$ , respectivamente. Los ángulos entre sus velocidades y la línea que conecta  $A$  y  $B$  son  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente. ¿Cuál es la distancia mínima entre las lanchas?

**Pr 44.** Un disco pesado de radio  $R$  está rodando hacia abajo, desenrollando dos cuerdas en el proceso. Las cuerdas están unidas al techo y siempre permanecen bajo tensión durante el movimiento. ¿Cuál fue la magnitud de la velocidad del centro

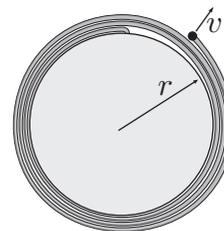
del disco cuando su velocidad angular era  $\omega$  y el ángulo entre las cuerdas era  $\alpha$ ?



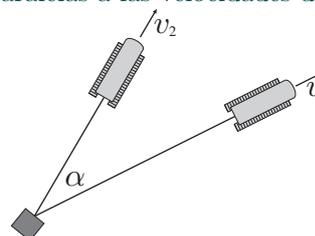
**Pr 45.** Se han colocado dos tablas en ángulo recto entre sí. Su línea de contacto es horizontal y uno de ellos ( $A$ ) hace un ángulo de  $\alpha$  con la horizontal. Se lanza una pelota elástica en un punto a la distancia  $a$  del plano  $A$  y  $b$  del  $B$ . En promedio, ¿cuántas veces rebota la pelota contra la pared  $B$  por cada vez que rebota contra la pared  $A$ ? Las colisiones son absolutamente elásticas.



**Pr 46.** Un extremo de una cuerda de una masa despreciable se ha unido al lado de un cilindro, no lejos del suelo. El propio cilindro se ha fijado en una superficie horizontal lisa y resbaladiza, con su eje vertical. La cuerda ha sido enrollada  $k$  veces alrededor del cilindro. El extremo libre de la cuerda se ha amarrada a un bloque, al que se le da una velocidad horizontal  $v$  dirigida a lo largo del radiovector dibujado desde el eje del cilindro. ¿Cuánto tiempo tardara la cuerda en enrollarse completamente alrededor del cilindro de nuevo, esta vez al revés? (este problema conduce a una ecuación diferencial muy simple; si no sabe cómo resolverlo, la siguiente igualdad puede ser útil:  $l \frac{dl}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(l^2)}{dt}$ ).



**Pr 47.** Una caja pesada se tira de dos tractores. Uno de estos tiene la velocidad  $v_1$ , el otro  $v_2$ , el ángulo entre las velocidades es  $\alpha$ . ¿Cuál es la velocidad de la caja si asumimos que las cuerdas son paralelas a las velocidades de los tractores?



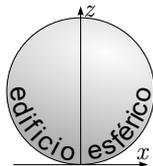
**Pr 48.** Una niña está corriendo en un gran campo de hielo con velocidad  $v = 5$  m/s hacia el norte. El coeficiente de

fricción entre sus pies y el hielo es  $\mu = 0,1$ . Suponga como una simplificación que la fuerza de reacción entre la niña y el hielo permanece constante (en realidad varía con cada empuje, pero la suposición se justifica por el hecho de que el valor promediado en un paso se mantiene constante).

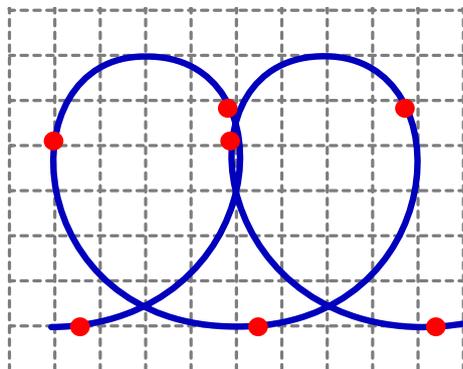
i) ¿Cuál es el tiempo mínimo necesario para que cambie su dirección de movimiento hacia el este y que la velocidad final también sea  $v = 5 \text{ m/s}$ ?

ii) ¿Cómo se llama la forma de la trayectoria óptima?

**Pr 49.** Una pelota es lanzada con una velocidad inicial  $v_0$  y se mueve en un campo gravitacional homogéneo de magnitud  $g$ ; desprecie el arrastre del aire. El punto de lanzamiento se puede seleccionar libremente en el nivel del suelo  $z = 0$  y el ángulo de lanzamiento se puede ajustar según sea necesario; el objetivo es golpear el punto más alto de un edificio esférico de radio  $R$  (ver figura) con la menor rapidez inicial posible  $v_0$  (la pelota no rebota en el edificio antes de golpear el objetivo). Dibuje cualitativamente la forma de la trayectoria óptima de la pelota. ¿Cuál es la velocidad de lanzamiento mínima  $v_{\min}$  necesaria para alcanzar el punto más alto de un edificio esférico de radio  $R$ ?



**Pr 50.** La figura representa una foto que se tomó usando un tiempo de exposición muy largo (la cámara estaba apuntando directamente hacia abajo). Lo que puede ver es un rastro de una lámpara azul que ardía continuamente, pero también destellaba periódicamente con una luz roja (después de cada  $t = 0,1 \text{ s}$ ). La lámpara se fijó a la superficie de un disco sólido, a la distancia  $a = 4,5 \text{ cm}$  desde su eje de simetría. El eje era vertical y el disco se deslizaba y giraba libremente sobre una superficie de hielo horizontal y lisa. ¿Cuál es la velocidad del centro del disco? Puede tomar medidas de la figura usando una regla.



**Pr 51.** Hay un capital  $O$  y tres ciudades  $A$ ,  $B$  y  $C$ , conectadas con la capital a través de las carreteras 1, 2 y 3 como se muestra en la figura de la izquierda. Cada camino tiene una longitud de  $2a$ . Dos carros viajan de una ciudad a otra: parten de sus respectivos puntos de partida simultáneamente y viajan con una rapidez constante  $v$ . La figura de la derecha representa la razón de cambio de la distancia entre los autos (valores negativos significa que la distancia disminuye) medida por los

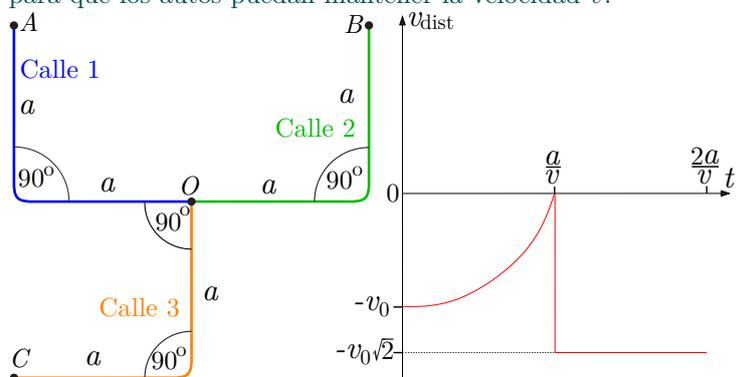
dispositivos GPS de los coches. Los autos toman los giros tan rápido que los dispositivos GPS no registrarán el comportamiento durante estos períodos.

i) ¿Cuáles ciudades fueron los puntos de partida y destino de los coches? Justifique su respuesta.

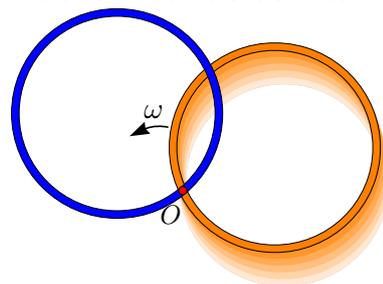
ii) ¿Cuál es el área entre la curva  $v_{\text{dist}}$  y el eje del tiempo  $t$  para el intervalo  $t = 0$  a  $t = a/v$ ?

iii) Ahora consideremos un caso en el que tres autos (denotados por  $A$ ,  $B$  y  $C$ ) salen simultáneamente de sus ciudades ( $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente) hacia la capital; todos los autos viajan con una rapidez constante  $v$ . Dibuje los gráficos para la razón de cambio de distancia entre los siguientes pares de autos:  $A - B$  y  $B - C$ .

iv) Supongamos que ahora los dispositivos GPS son lo suficientemente buenos como para registrar los períodos de viraje. Dibuje un nuevo gráfico apropiado para el par de autos  $B - C$ . La curvatura de las curvas es lo suficientemente pequeña como para que los autos puedan mantener la velocidad  $v$ .



**Pr 52.** Considere dos anillos con un radio  $r$  como se muestra en la figura: el anillo azul está en reposo y el anillo naranja gira alrededor del punto  $O$  (que es uno de los puntos de intersección de los dos anillos) con una velocidad angular constante  $\omega$ . Encuentre las velocidades mínima y máxima  $v_{\min}$  y  $v_{\max}$  del otro punto de intersección de los dos anillos.



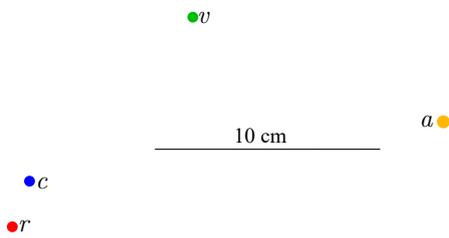
**Pr 53.** Una bicicleta en movimiento se fotografía utilizando un tiempo de exposición relativamente largo con una cámara inmóvil. Como resultado, la bicicleta aparece distorsionada en la foto; sin embargo, ciertos puntos de ciertos rayos aparecen nítidos. Determine la forma de la curva sobre la que se encuentran los puntos nítidos de los rayos.

**Pr 54.** Una lámpara está unida al borde de un disco, que se desliza girando sobre el hielo. La lámpara emite pulsos de luz: la duración de cada pulso es despreciable, el intervalo entre dos pulsos es  $\tau = 100 \text{ ms}$ . El primer pulso es de luz naranja, el siguiente es cerúleo, seguido de rojo, verde, amarillo y nuevamente naranja (el proceso comienza a repetirse periódicamente).

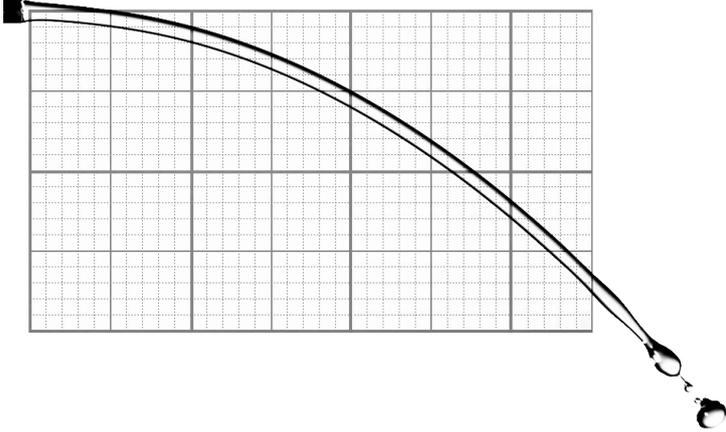
te). El movimiento del disco se fotografía usando un tiempo de exposición tan largo que se obtienen exactamente cuatro pulsos grabados en la foto (ver figura). Debido a la falta de pulsos y al pequeño tamaño de la lámpara, cada pulso corresponde a un punto de color en la foto. Los colores de los puntos se proporcionan con las letras correspondientes: naranja (n), cerúleo (c), rojo (r), verde (v) y amarillo (a). Las fuerzas de fricción que actúan sobre el disco pueden ser despreciadas.

i) Marque en la figura con números del uno al cuatro el orden de los pulsos (puntos). Justifique su respuesta. ¿Qué se puede decir sobre el valor del tiempo de exposición?

ii) Usando la figura provista, encuentre el radio del disco  $R$ , la velocidad del centro del disco  $v$  y la velocidad angular  $\omega$  (se sabe que  $\omega < 30 \text{ rad/s}$ ). La escala de la figura es proporcionada por la imagen de una línea de longitud  $l = 10 \text{ cm}$ ;



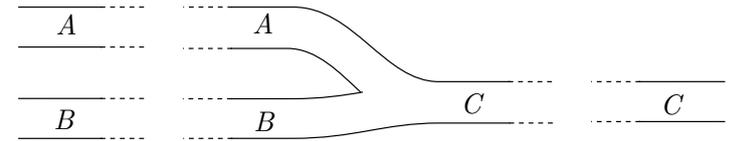
**Pr 55.** La foto muestra un chorro de agua, junto con la cuadrícula de fondo. La medida mínima de la cuadrícula es igual al diámetro del chorro en la salida del tubo horizontal. El caudal de agua es constante en el tiempo y si un recipiente de volumen  $V = 150 \text{ cm}^3$  se utiliza para recoger el agua que fluye, se llenaría en  $t = 5 \text{ min}$ . Encuentre el diámetro del chorro a la salida de la tubería.



**Pr 56.** En un río ancho, dos barcos se mueven con velocidades constantes. La velocidad del agua en el río es constante en toda el área representada en la figura y paralela a la costa. La figura se basa en una foto que fue tomada desde el aire, con la cámara dirigida directamente hacia abajo. Las posiciones de los barcos están marcadas con un cuadrado y un triángulo y las posiciones de basura caídas de los barcos con estrellas. Uno de los barcos partió del punto A; se sabe que los barcos se encontraron en un momento determinado. ¿Desde qué punto costero partió el otro barco? Resuelva el problema utilizando construcciones geométricas.



**Pr 57.** Consideremos la unión de dos carriles  $A$  y  $B$  en un solo carril  $C$ , ver figura. Durante una hora pico, todos los carriles están llenos de autos; la distancia media entre los autos se puede asumir que es igual para todos los carriles. Las longitudes de los carriles  $A$ ,  $B$  y  $C$  son respectivamente iguales a  $L_A = 1 \text{ km}$ ,  $L_B = 3 \text{ km}$  y  $L_C = 2 \text{ km}$ . La rapidez media de los carros en el carril  $A$  es  $v_A = 3 \text{ km/h}$ ; y el tiempo de viaje de un coche en el carril  $B$  es  $t_B = 36 \text{ min}$ . ¿Cuánto tiempo demorará un automóvil en viajar desde el comienzo del carril  $A$  hasta el final del carril  $C$ ?



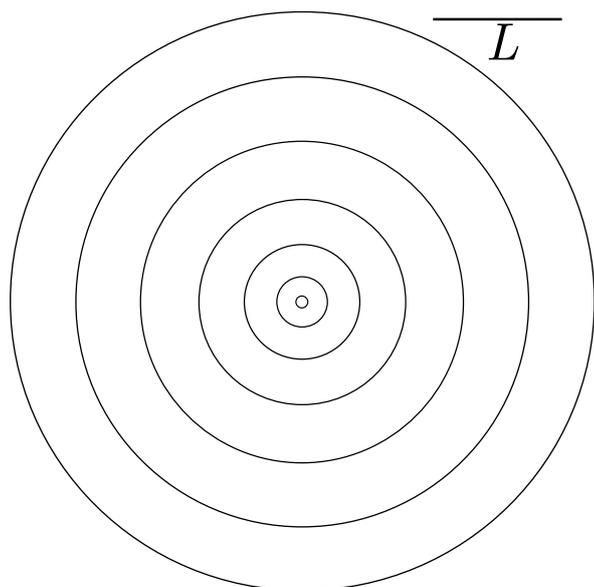
**Pr 58.** En un día lluvioso sin viento, un hombre de pie se moja en  $t = 2 \text{ min}$ ; si corre con una rapidez  $v_2 = 18 \text{ km/h}$ , se mojaría en  $t_2 = 0,5 \text{ min}$ . ¿Cuánto tardará en mojarse al caminar con una rapidez de  $v_1 = 6 \text{ km/h}$ ? Supongamos que la forma del cuerpo de un hombre puede ser aproximada (a) con un prisma rectangular vertical; (b) con una esfera. Aquí “mojarse” se define como recibir una cierta cantidad de agua.

**Pr 59.** Una fotógrafa tomó una foto de una cascada. Las gotas se veían como puntos debido a la luz del sol reflejada en estas. Debido a la rápida velocidad de caída de las gotas, los puntos crearon franjas brillantes en la foto. Cuando la cámara estaba en una posición de “panorámica”, la longitud de las franjas era  $l_1 = 120 \text{ píxeles}$ ; cuando la cámara giró alrededor del eje óptico de la lente en  $180^\circ$  en una posición de “cabeza abajo”, la longitud de las rayas era  $l_2 = 200 \text{ píxeles}$ . ¿Cuál fue la longitud de las rayas cuando la cámara estaba en una posición “retrato”, es decir, rotada  $90^\circ$ ? Supongamos que el tiempo de exposición fue igual en los tres casos. Si hay varias posibilidades, de todas las respuestas posibles.

*Sugerencia:* los componentes principales de la cámara son la lente que crea una imagen en el sensor y el obturador. El propósito del obturador es limitar el tiempo durante el cual el sensor está expuesto a la luz a un corto (y apropiado) período de tiempo: normalmente, cubre el sensor y la imagen creada por la lente cae sobre el sensor solo cuando se abre el obturador. El obturador está hecho de dos cortinas: al principio, la primera cortina está cubriendo el sensor; cuando se toma una foto, se mueve hacia abajo con una cierta velocidad  $v$  abriendo

el sensor; una vez que el sensor ha sido abierto por el período de tiempo requerido, la segunda cortina se mueve hacia abajo con la misma velocidad  $v$ , cubriendo nuevamente el sensor. Para lograr tiempos de exposición muy cortos, ambas cortinas se mueven juntas, creando una rendija estrecha y angosta a través de la cual la luz puede pasar para alcanzar el sensor.

**Pr 60.** Si se arroja una piedra a un estanque, se crea una onda circular que se expande en el tiempo. La siguiente figura representa la propagación de tal onda: diferentes círculos corresponden a la posición de la cresta de la onda en diferentes momentos del tiempo; las instantáneas subyacentes se han tomado con un intervalo regular (pero desconocido).

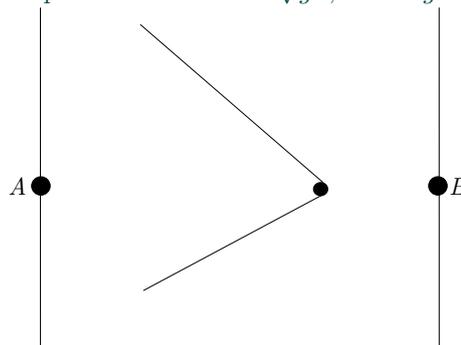


Tenga en cuenta que la velocidad de la onda depende de la longitud de onda y aquí, la longitud de onda efectiva crece con el tiempo: al principio, la longitud de onda es del orden del radio del círculo, pero más tarde, tiende hacia un valor que es del orden de la profundidad del agua  $h$ . Resulta que al partir la cresta de la onda se desplaza con aceleración.  $a = g/\pi$ , donde  $g$  es la aceleración de caída libre; más tarde, tiende hacia el valor  $v_\infty = \sqrt{hg}$ . Con base en este hecho, estime la profundidad del estanque  $h$  asumiendo que es constante en todas partes; exprese su respuesta en términos de la escala de longitud  $L$  proporcionada en la figura. Puede tomar medidas de la figura usando una regla.

**Pr 61.** Una lancha se aproxima a una línea de costa recta perpendicularmente y a una distancia  $L$  comienza a retroceder dibujando un semicírculo de radio  $R$  y finalmente parte perpendicularmente de la costa. La velocidad de la lancha es constante e igual a  $v$ , se puede suponer que la velocidad de las ondas de agua es constante e igual a  $u$  (con  $u < v$ ). ¿Cuánto tiempo tomará para que las ondas de la estela detrás de la lancha alcancen la costa (medido desde el momento en que la lancha comienza a girar)?

**Pr 62.** En un río ancho, una lancha se mueve con una rapidez constante  $v = 7 \text{ m/s}$  de un pueblo  $A$  a un pueblo  $B$  al

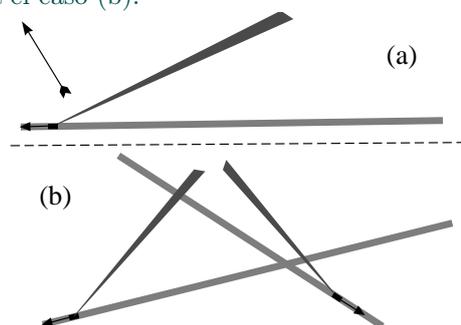
otro lado del río. Al responder a las siguientes preguntas, puede tomar medidas de la figura a continuación que muestra las olas detrás de la lancha. ¿Cuál es la velocidad del agua en el río y cuál es la profundidad del agua  $h$ ? Nota: la velocidad de las olas en aguas poco profundas<sup>17</sup> es  $w = \sqrt{gh}$ , donde  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .



**Pr 63.** Los bocetos proporcionados (a) y (b) están hechos con base en imágenes satelitales preservando proporciones. Representan tractores, junto con sus rastros de humo. Los tractores se movieron a lo largo de los caminos en la dirección indicada por las flechas. La velocidad de los tractores era  $v_0 = 30 \text{ km/h}$ . Para el boceto (a), la dirección del viento se indica con la flecha. Al resolver el problema, puede dibujar líneas y medir distancias con una regla.

i) Usando el boceto proporcionado, encuentre la velocidad del viento para el caso (a).

ii) Usando el boceto proporcionado, encuentre la velocidad del viento para el caso (b).

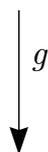


**Pr 64.** La siguiente instantánea muestra dos pelotas que se lanzaron simultáneamente con la misma velocidad inicial, pero en diferentes direcciones desde el punto  $P$ . ¿Cuál fue la velocidad inicial si  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ?

• Pelota 1

• Pelota 2

•  $P$   
Punto de  
lanzamiento



10m

<sup>17</sup> Cuando la profundidad del agua es bastante menor que la longitud de onda.

**Pr 65.** Un barco viajó desde su puerto de origen a una isla a una distancia de  $l = 4$  km directamente hacia el sur. Su trayectoria consistió en tres segmentos rectos, cuyas direcciones no fueron registradas. Durante cada uno de los segmentos, el barco mantuvo una velocidad constante; sin embargo, se mantuvo una rapidez diferente para diferentes segmentos. Durante el tiempo de viaje, la rapidez y la dirección del viento se midieron desde el barco. El tiempo de viaje en el primer segmento fue  $t_1 = 3$  min, la velocidad del viento medida fue  $v_1 = 15$  m/s y el viento sopló directamente desde el este. El tiempo de viaje en el segundo segmento fue  $t_2 = 1,5$  min, la velocidad del viento medida fue  $v_2 = 10$  m/s y el viento sopló directamente desde el sureste. El tiempo de viaje en el tercer segmento fue  $t_3 = 1,5$  min, la velocidad del viento medida fue  $v_3 = 5$  m/s y el viento sopló directamente desde el suroeste. ¿Cuál fue la velocidad del viento? se sabe que la velocidad y la dirección del viento fueron constantes durante todo el tiempo de viaje.

**Pr 66.** Hay una rampa larga de ángulo de pendiente constante a lo largo de la cual las pelotas pueden deslizarse sin fricción (la rampa es estrecha, de modo que el movimiento de las pelotas es prácticamente unidimensional). Hay  $N$  pelotas idénticas perfectamente elásticas que se deslizan sobre ese canal. El número total de colisiones por parejas entre las pelotas en el canal depende de sus velocidades y posiciones iniciales. ¿Cuál es el mayor número posible de colisiones? (Si no sabe cómo se moverán dos pelotas absolutamente elásticas después de una colisión, consulte la sección de sugerencias).

## 8. SUGERENCIAS

1. En el marco de referencia del agua es evidente que partir del bote y regresar a él tomó la misma cantidad de tiempo.
2. En el marco del avión rojo, el avión azul se mueve a lo largo de una línea  $s$  que forma un ángulo  $\alpha = \arctan \frac{3}{4}$  con la línea discontinua horizontal en la figura. La distancia del avión rojo desde esta línea se encuentra más convenientemente considerando dos triángulos rectángulos similares, el mayor de los cuales está formado por la línea  $s$  y las dos líneas discontinuas en la figura.
3. Use el marco de referencia que se mueve con una velocidad  $\frac{v}{2}$  para encontrar la componente horizontal de la velocidad del punto de intersección. Ahora, en el marco de referencia del laboratorio conocemos la dirección de esta velocidad, así como la proyección horizontal ahora aplique la idea 4.
4. Dado que la velocidad ascendente es constante, es suficiente calcularla para una sola posición del globo: cuando su altura es pequeña y, por lo tanto, la velocidad horizontal es casi cero; aplique la idea 5. Para  $t = 7$  min, la velocidad angular ascendente es cero, por lo tanto, el globo debe moverse a lo largo de la línea que conecta el globo y el punto de observación; aplique la idea 4.
5. En el marco de referencia de la pizarra solo hay fuerza horizontal (la fuerza de fricción) y tiene una dirección constante antiparalela a la velocidad.
6. De acuerdo con la idea 7, usamos el marco de referencia de la cinta transportadora, pero como se nos pregunta acerca

de la velocidad en el marco de referencia del laboratorio, debemos volver al marco del laboratorio. En el marco de referencia de la cinta transportadora, el vector de velocidad se acorta con el tiempo que conserva la dirección, es decir, se puede representar como  $\vec{w} = k\vec{w}_0$ , donde su valor inicial  $\vec{w}_0 = \vec{v}_0 - \vec{u}_0$  y el factor  $k$  toma valores de 0 a 1. Entonces, la velocidad en el marco de referencia del laboratorio es  $\vec{v} = \vec{u}_0 + k\vec{w}_0$ : Este es un vector que conecta el ángulo recto del triángulo rectángulo definido por sus catetos  $\vec{u}_0$  y  $\vec{v}_0$  con un punto en la hipotenusa; la posición específica de este punto depende del valor del factor.  $k$  (que es función del tiempo).

7. Expresé el desplazamiento lateral del balón como la suma de dos componentes: desplazamiento lateral en el marco de referencia del aire (un procedimiento trigonométrico, que no depende de  $t$ ) y el desplazamiento lateral del marco de referencia móvil.
8. Enfoque algebraico: tome uno de los ejes (digamos  $x$ ) para que sea perpendicular al plano de la raqueta y el otro ( $y$ ) paralelo a esta. La ausencia de rotación significa que las componentes  $y$  de las velocidades de la pelota y la raqueta son iguales,  $u_y = v_y$  y, no hay una fuerza paralela que actúe sobre la pelota, por lo tanto,  $v'_y = v_y$ . Usando la idea 13 encontramos que  $v'_x = -v_x + 2u_x$ . Aplicando la idea 15 a los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{v}'$  nos da una ecuación para encontrar  $u_x$ ; aplique el teorema de Pitágoras para obtener  $|\vec{u}|$ . Para encontrar el ángulo  $\beta$ , exprese  $\tan \beta = u_y/u_x$ .

Enfoque geométrico: dibuje un trapecio recto de la siguiente manera: descomponemos  $\vec{v}$  en componentes paralelas y perpendiculares,  $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ ; marquemos los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  de manera que  $\vec{AB} = \vec{v}_x$  y  $\vec{BC} = \vec{v}_y$  (luego,  $\vec{AC} = \vec{v}$ ). Ahora marcamos los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$  de manera que  $\vec{CD} = \vec{v}'_y = \vec{v}_y$ ,  $\vec{DE} = -\vec{v}_x$  y  $\vec{EF} = 2\vec{u}_x$ ; luego,  $\vec{CF} = \vec{v}'_y - \vec{v}_x + 2\vec{u}_x \equiv \vec{v}'$  y  $\vec{AF} = 2\vec{v}_y + 2\vec{u}_x \equiv 2\vec{u}$ . Debido a las condiciones del problema,  $\angle ACF = 90^\circ$ . Marcamos ahora el punto  $G$  como el centro de  $AF$ ; luego,  $GC$  es la mediana del trapecio  $ABDF$  (y por lo tanto, paralela a  $AB$  y al eje  $x$ ) y la mediana del triángulo  $ACF$ . Lo que queda por hacer es expresar la hipotenusa de  $\triangle ACF$  en términos de  $v = |\vec{AC}|$  y aplicar la idea 16.

9. Use el marco de referencia donde el espejo está en reposo, la fuente  $S$  gira con velocidad angular  $\omega$ . Ahora regrese al marco de laboratorio y encuentre la velocidad angular de la imagen en ese marco.
10. El área debajo del gráfico, desde  $t = 0$  hasta el momento dado, indica el desplazamiento y las regiones debajo del eje  $t$  hacen contribuciones negativas. Por lo tanto, si un cierto momento  $t$  corresponde a un desplazamiento máximo, entonces  $v(t) = 0$  (de lo contrario, el desplazamiento podría incrementarse en cierta medida haciendo que  $t$  sea ligeramente más pequeño o más grande, dependiendo del signo de  $v(t)$  (Alternativamente, podemos decir que los extremos corresponden a la derivada igual a cero y la derivada de  $\Delta x$  es  $v$ .) Los mismos argumentos nos llevan a la conclusión de que para valores  $t$  más pequeños debemos tener  $v$  positivo y para  $t$  un poco más grande  $v$  es negativo. Por lo tanto, los candidatos son  $t = 4,7$  s,  $t = 7$  s,

$t = 12,5$  s y  $t = 18,3$  s. Calcule las áreas para ver cuál de ellas maximizan el desplazamiento.

11. Dividamos el desplazamiento en pequeños pedazos,  $s = \sum \Delta s$ , donde  $\Delta s = v\Delta t$ . Si la función  $v(t)$  fuera conocida, la última fórmula habría completado nuestra tarea, ya que  $\sum v(t)\Delta t$  es la suma de rectángulos que conforman el área debajo del gráfico  $v - t$ . Sin embargo, la aceleración se nos da en función de  $v$ , por lo tanto, necesitamos sustituir  $\Delta t$  con  $\Delta v$ . Mientras intentamos hacer eso, podemos introducir la aceleración (que es función de  $v$ ):

$$\Delta t = \Delta v \cdot \frac{\Delta t}{\Delta v} = \frac{\Delta v}{\Delta v/\Delta t} = \frac{\Delta v}{a}.$$

Este resultado nos sirve perfectamente bien:

$$s = \sum v\Delta t = \sum \frac{v}{a}\Delta v \rightarrow \int \frac{v}{a(v)} dv,$$

es decir, el desplazamiento es igual al área de superficie debajo de un gráfico que representa  $\frac{v}{a(v)}$  como función de  $v$ .

12. Use el marco de una de las pelotas que se deslizan de acuerdo con la suma vectorial de aceleraciones, la otra se mueve con una aceleración horizontal constante. Aplique la idea 2 para encontrar la posición donde la distancia es mínima. Exprese la respuesta en términos de la distancia  $AB$ ; aplique la idea 10 para encontrar la distancia  $AB$ .
13. Si el eje  $x$  es paralelo al plano (y apunta hacia abajo), la pelota realiza una caída libre a lo largo del eje  $x$ , siendo la aceleración igual a  $g \sin \alpha$ ; si el eje  $y$  es perpendicular al plano, la pelota rebota a lo largo del eje  $y$  con aceleración  $g \cos \alpha$ .
14. Use coordenadas perpendiculares para que el eje  $x$  esté a lo largo de la línea de contacto de las dos superficies y el eje  $y$  yacza sobre la superficie inclinada; entonces, el movimiento en la dirección  $x$  es independiente del movimiento en el plano  $y - z$ . Debido a la idea 21, la rapidez permanece constante durante la transición de un plano al otro. Use hecho 3 junto con el gráfico proporcionado para calcular el valor de  $g_y$ , la proyección de la aceleración en el eje  $y$ . Ya que conocemos la aceleración de caída libre.  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , la relación  $g_y = g \sin \alpha$  nos permite encontrar el ángulo  $\alpha$ .
15. De acuerdo con el primer método, usamos el marco que gira conjuntamente con las tortugas, de modo que en el nuevo marco, las tortugas se mueven radialmente hacia el centro, para encontrar la velocidad de cada una de las tortugas necesitamos usar el vector de velocidad local del marco giratorio en la ubicación de la tortuga en particular. De acuerdo con el segundo método, en cada momento, proyectemos las velocidades de dos tortugas en la línea recta que las conecta de esa manera podemos encontrar la tasa de cambio de distancia entre las dos tortugas.
16. Escriba la relación entre pequeños incrementos de las cantidades:  $dk = v \cdot dt/(L + ut)$ ; la respuesta se obtiene integrando en ambas partes de la igualdad.
17. Aparentemente, la niña necesitará llegar a la costa  $OM$  en el ángulo correcto vea la idea 2, ahora podemos aplicar la idea 25 en conjunto con el hecho 5 a la refracción de su trayectoria en la costa  $OP$  para encontrar el ángulo al que

necesita llegar a la costa  $OP$ . (Las respuestas se expresan directamente en términos de este ángulo).

18. *Primer enfoque:* use el marco de referencia del agua, debido a que la velocidad de natación es independiente de la dirección de natación. En ese marco, el niño se mueve en la costa con rapidez igual a  $v + w$ . Está claro que el niño debe comenzar a nadar de inmediato, es decir, no importa si el punto  $A$  se está moviendo o está inmóvil en el nuevo marco. También está claro que si hemos encontrado la manera más rápida de llegar al punto  $C$ , la misma trayectoria nos daría la manera más rápida de llegar a cualquier otro punto aguas arriba en la misma costa; en particular, podemos tomar un punto  $C'$  que se mueve junto con el agua (está inmóvil en el marco del agua) y la trayectoria óptima seguirá siendo la misma. Con estas modificaciones, tenemos un problema en el que podemos aplicar el principio de Fermat; el problema de la óptica geométrica resultante es esencialmente el problema de encontrar el ángulo de la reflexión interna total. Para el *segundo enfoque*, una vez que el frente se encuentra con el punto  $A$ , el frente forma un cateto de un triángulo rectángulo  $APQ$ , donde  $Q$  es el punto donde el frente se encuentra con la orilla del río y  $P$  es la posición de esa fuente de Huygens en la orilla del río que crea la onda circular que cumple el punto  $A$ . Observe que el punto  $P$  es el punto donde el niño necesita comenzar a nadar en el marco de referencia del agua y se desplaza por  $wT$  desde el punto correspondiente en el marco del laboratorio.
19. Una vez escrita la trayectoria paramétricamente,  $x = x(t)$  y  $z = z(t)$ , el tiempo  $t$  puede ser eliminado; como resultado, se obtiene una ecuación relacionando  $x$ ,  $y$  y el ángulo de disparo  $\alpha$ , la cual consideramos como una ecuación para encontrar el ángulo  $\alpha$ . El ángulo entra en esta ecuación a través de dos términos, uno que contiene  $\tan \alpha$  y el otro  $\cos^{-2} \alpha$ . Para resolver tales ecuaciones, una posibilidad es expresar todas las funciones trigonométricas a través de una sola. Es posible expresar  $\tan \alpha$  mediante  $\cos \alpha$ , pero eso implica una raíz cuadrada, lo cual es inconveniente. Mientras tanto,  $\cos^{-2} \alpha$  se puede expresar muy bien en términos de  $\tan \alpha$ , como resultado se obtiene una ecuación cuadrática para  $\tan \alpha$ .
20. Utilice el hecho de que todos los rayos verticales que se reflejan en el límite del rango pasan a través del foco. Basta con encontrar el punto de intersección de dos rayos. Tome un rayo en  $x = 0$  y el otro tal que alcance el límite del rango en el nivel  $z = 0$  (conocemos la tangente del límite del rango en ese punto mediante el hecho 8).
21. Paso 1, prueba por contradicción: si la trayectoria no toca ninguno de los bordes, la velocidad de lanzamiento, obviamente, puede reducirse ligeramente mientras se mantiene el ángulo constante. Si toca solo un borde, deje que sea el borde más lejano, el niño puede avanzar un poco hacia adelante para que ahora la trayectoria no toque ninguno de los bordes. Paso 2: de la ley  $v(z)^2 - 2gz = \text{const}$ , concluimos que la rapidez a la altura  $z = c$  [denotada como  $v(c)$ ] es una función de crecimiento definida por la rapidez a nivel del suelo  $v(0)$ : si la rapidez  $v(0)$  es mínima

entonces  $v(c)$  también es mínima. Paso 3, enfoque de fuerza bruta: encuentre la velocidad mínima de lanzamiento desde el borde derecho  $F$  del techo requiriendo que el otro borde con coordenadas  $P = (a - c, \sqrt{b^2 - (a - c)^2})$  pertenezca a la parábola encontrada en problema 19. *Enfoque geométrico* (idea 30: según la idea 28 (tenga en cuenta los hechos 6 y 7), al lanzar de manera óptima desde el punto  $F$  al punto  $P$ , el punto  $P$  pertenece a la parábola envolvente (que separa la región donde los objetivos se pueden golpear con una rapidez dada, ver idea 28), y  $F$  es su foco; consideremos ahora que la rapidez mínima respectiva es  $u$  [recordemos que esta es la rapidez a la altura del punto  $F$ , es decir,  $u = v(c)$ ]. Según la idea 28, al lanzar desde  $F$ , se puede llegar a cualquier punto de la parábola envolvente con la misma velocidad  $u$  si ajustamos el ángulo de lanzamiento; para llegar a la punta  $Q$  de la parábola envolvente tenemos que tirar hacia arriba. Ahora sería una tarea trivial encontrar la velocidad de lanzamiento  $u$  de la ley de conservación de energía si se conociera la altura  $h = |FQ|$  de la parábola envolvente. Para obtener  $h$ , utilizamos la propiedad de una parábola (ver hecho 9): la suma de la distancia de un punto desde el foco y la altura del punto es constante:  $b + (a - b) = h + h$ .

22. Debido a la idea 28, junto con hechos 6, 7 y 9, un rayo vertical dirigido hacia el objetivo se refleja en la trayectoria del proyectil hacia el foco, es decir, hacia el cañón. Haga uso de la idea 26 vemos que la trayectoria de este proyectil también es óptima para disparar la posición del cañón desde la ubicación del objetivo; por lo tanto, la trayectoria del proyectil refleja un rayo vertical dirigido hacia el cañón hacia el objetivo. Si combinamos estas dos observaciones, vemos que un rayo vertical dirigido hacia el cañón se gira después de dos reflexiones de la trayectoria por  $180^\circ$ , lo que significa que las superficies reflectantes deben haber sido perpendiculares entre sí (demostrar esto matemáticamente se deja al lector como un problema geométrico simple).

Para la solución alternativa, consideramos el movimiento de dos proyectiles de velocidades iniciales  $\vec{v}$  y  $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$  como se sugirió anteriormente, es decir, con  $|\Delta\vec{v}| \ll |\vec{v}|$ ,  $\Delta\vec{v} \perp \vec{v}$  y  $|\vec{v}'| \approx |\vec{v}'|$ . En el marco de referencia de caída libre, salen a una velocidad constante  $\Delta\vec{v}$ , la velocidad relativa que se dio al principio. Por lo tanto, en el destino, el vector de desplazamiento entre los proyectiles  $\Delta\vec{r} = t\Delta\vec{v}$  ( $t$  es el tiempo de vuelo) que es perpendicular a la velocidad inicial  $\vec{v}$ . Por otro lado, podemos aplicar el hecho 10 considerando la dependencia de la coordenada  $x$  del proyectil a la altitud del objetivo en función del ángulo de lanzamiento. Por lo tanto, concluimos que mientras el primer proyectil golpea el objetivo, el otro también debe estar muy cerca de él (al nivel del objetivo),  $\vec{v}$  da el ángulo de disparo óptimo y, por lo tanto,  $\vec{v}'$  es casi óptimo): si uno de ellos está en el objetivo, el otro estará allí muy pronto.<sup>18</sup> Recuerde que cuando el primer proyectil está en el objetivo, el otro es desplazado por  $t\Delta\vec{v}$  de él, es decir,

su velocidad actual  $\vec{u} \parallel t\Delta\vec{v} \perp \vec{v}$ .

23. Observe que todos los puntos que tienen la misma velocidad se encuentran a la misma distancia del centro de rotación instantánea.
24. Iguale la aceleración encontrada en los marcos de referencia inerciales del laboratorio y el centro de la rueda.
25. a) Primero usamos la idea 35: cuando lo aplicamos a la barra izquierda, llegamos a la conclusión de que la velocidad de la bisagra es vertical y, cuando aplicamos la idea a la barra derecha, llegamos a la conclusión de que el módulo es  $v$ . Ahora podemos aplicar el hecho 13 para calcular la proyección horizontal de la aceleración de la articulación. Para utilizar la idea 34, también necesitamos saber la dirección de la aceleración. Esta información se obtiene si cambiamos al marco de referencia subiendo a velocidad constante  $v$ : la velocidad de la articulación es cero y, por tanto, la aceleración centrípeta es cero. b) Observe que en el marco de referencia se mueve hacia arriba con velocidad constante.  $v$ , la pregunta b) es la pregunta a) reflejada.
26. Primer método: encuentre el centro de rotación instantáneo calculando la dirección de las velocidades de dos puntos del cilindro: primero, punto  $A$  donde la cuerda se encuentra con el cilindro (note que la velocidad de  $A$  como el punto de una cuerda es igual a la velocidad de  $A$  como punto de un cilindro y aplique la idea 35 a la cuerda) y el punto  $B$  donde el cilindro se encuentra con la placa (¿cuál es la componente vertical de la velocidad del punto del cilindro  $B$ ?).

Segundo método: haga un dibujo con dos posiciones cercanas del cilindro y la cuerda: marquemos en la posición izquierda de la cuerda un punto  $P$  donde la cuerda se encuentra con el cilindro y, en su posición correcta, punto  $P'$  que está a la misma altura que el punto  $P$ . Vamos a denotar el punto donde la cuerda se fija a la pared por  $Q$ . Luego, el segmento de cuerda  $QP'$  consiste en un segmento recto  $QP''$  y un segmento curvo  $P''P'$ . Sin embargo, como el desplazamiento del cilindro  $PP'$  es pequeño, la longitud de la curva  $QP''P'$  tiene casi la misma longitud que la línea recta  $QP'$ . Mientras que la longitud desenrollada real  $|QP| - |QP''|$  es contribuida por dos rotaciones (rotación del cilindro y rotación de la cuerda), la diferencia de longitud  $|QP| - |QP'|$  es contribuida solo por la rotación de los cilindros (el punto  $P'$  está en la misma posición relativa en el cilindro que el punto  $P$ ) y, por lo tanto, es igual a  $\omega R\Delta t$ . Por otro lado, podemos expresar esta longitud trigonométricamente en términos del desplazamiento del cilindro  $PP'$ .

27. Consideremos que el eje  $y$  sea la coordenada del extremo superior y  $x$  la del extremo inferior. Entonces la barra tiene una longitud  $l^2 = x^2 + y^2$ ;  $l$  que es constante, por lo que su derivada debe ser cero. Tomemos la derivada con respecto al tiempo de la expresión completa, utilizando la regla de la cadena de matemática:  $0 = x\dot{x} + y\dot{y} = xu + yv$  (un punto encima de un símbolo significa su derivada

<sup>18</sup>Más precisamente, la distancia más cercana será cuadráticamente pequeña; mientras tanto, el vector de desplazamiento  $t\Delta\vec{v}$  es linealmente pequeño, es decir, mucho más grande.

con respecto tiempo). A partir de eso, podemos expresar  $u = -vy/x = -v \tan \alpha$ .

28. Vaya al marco de referencia que se mueve con velocidad  $u$  y donde el límite entre la cola y los autos en movimiento es estacionario, iguale el flujo de automóviles (automóviles pasan por unidad de tiempo) en la región de la cola a su valor en la región de los automóviles en movimiento.
29. El punto de intersección  $P$  de dos rastros corresponde al momento en que se encontraron las locomotoras de los trenes: y fue transportado por el viento hasta donde está actualmente. Entonces, en función de la velocidad de los trenes, encontramos su punto de encuentro  $Q$ ; ya que las velocidades son iguales, este es el punto medio del segmento  $AB$  que conecta las posiciones actuales de las locomotoras del tren. El segmento  $AB$  se cubrió durante el intervalo de tiempo dado a la velocidad  $2v = 100 \text{ km/h}$ ; este valor puede usarse como una escala para encontrar la velocidad del viento basada en la longitud del segmento  $QP$  (mida  $|AB|$  y  $|PQ|$ ).
30. Primero, concluimos, en base a las dos colisiones, que todos los cuerpos se mueven en el mismo plano, de aquí en adelante el plano  $(x, y)$ . Según la idea 41, trazamos las trayectorias de los cuerpos en 3D (como líneas  $x = x_a(t)$ ,  $y = y_a(t)$ ;  $x = x_b(t)$ ,  $y = y_b(t)$ ;  $x = x_c(t)$ ,  $y = y_c(t)$ ). Las colisiones corresponden a las intersecciones de estas líneas y la intersección de dos líneas significa que las dos líneas son coplanares (están en el mismo plano).
31. En el marco de caída libre, todas las partículas se mueven con velocidades constantes; cada partícula tenía una velocidad inicial igual a la velocidad de la rueda en el punto de liberación, es decir, tangencial a la rueda e igual por módulo a  $\Omega R$ . Por lo tanto, el conjunto de partículas se expande como un círculo, cuyo radio se puede calcular a partir del teorema de Pitágoras. En el marco de referencia del laboratorio, el centro del círculo realiza una caída libre. Una gota que llega al punto  $A$  corresponde al círculo en expansión que toca el suelo.
32. Observaciones útiles: cada columna de píxeles se obtiene muy rápido, casi simultáneamente; por lo tanto, cada columna de píxeles representa un corte vertical del objeto real en la posición respectiva durante un determinado momento del tiempo. Sin embargo, diferentes columnas corresponden a diferentes tiempos. Cada forma vertical curvada en la foto es una secuencia de cortes verticales y, por lo tanto, debe corresponder a la misma pala de la hélice. En la mitad superior de la foto, la línea de escaneo se mueve hacia el movimiento de las cuchillas y no pasa por alto ninguna de las cuchillas: si numeramos las palas con 1, 2 y 3, entonces la secuencia de palas en la mitad superior debe ser 1, 2, 3, 1, 2, ... En la mitad inferior de la foto, la línea de escaneo y las palas se mueven en la misma dirección y, las palas son más rápidas, por lo que aquí la secuencia es de 3, 2, 1, 3 ... La línea de escaneo se mueve aparentemente con una velocidad constante, por lo tanto, la posición horizontal en la foto se puede usar para medir el tiempo.
33. i) Mientras que el peine gris se mueve a la mitad del paso de los dientes, una raya oscura se mueve hacia donde actualmente hay una raya blanca, es decir, a la mitad de la distancia de la franja oscura. Por lo tanto, la velocidad de la franja es tantas veces más rápida que la cantidad de dientes grises que se pueden contar por franja.
- ii) El producto de dos ondas se puede expandir como  $a = \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t) \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2} \{ \cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - \omega t] - \cos[(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - \omega t] \}$ . Las franjas donde  $a \approx 1$  son donde el senoide "lento" es casi uno,  $\cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - \omega t] \approx 1$ ; esta es una onda sinusoidal que se mueve con rapidez  $u = \omega / |\vec{k}_1 - \vec{k}_2|$ .
34. Consideremos la evolución del vector  $\vec{r}$  que apunta del perro al zorro; calcule las tasas de cambio de los módulos  $|\vec{r}|$  y  $r_x$ , la proyección de  $\vec{r}$  en el eje  $x$  (paralela a la velocidad del zorro). ¿Es posible hacer una combinación lineal de  $r_x$  y  $|\vec{r}|$  tal que su derivada de tiempo sea cero? En caso afirmativo obtendríamos una nueva ley de conservación que se podría utilizar para obtener la respuesta.
35. Use una suma vectorial para dibujar un rectángulo de velocidades  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ , donde  $\vec{w}$  es la velocidad del chico relativa a la costa. Aplique la idea 2: si fijamos la posición del vector  $\vec{u}$  y dibujamos los posibles triángulos para diferentes direcciones de natación, veremos que las posibles posiciones del punto final de  $\vec{v}$  se encuentran en un círculo. Ahora bien, no es difícil concluir que la natación óptima corresponde al vector  $\vec{v}$  tangente al círculo.
36. Introduzca las coordenadas  $x$  (la posición vertical del anillo  $O$ ) y  $y$  (la posición vertical del anillo  $O'$ ), con los orígenes en  $A$  y  $A'$ , respectivamente. También introduzca la longitud de la cuerda  $L$  (que se eliminará más adelante de la respuesta). Relacione estas cantidades entre sí a través del teorema de Pitágoras (mantenga los términos cuadrados para evitar las raíces cuadradas y facilitar la manipulación) y aplique la idea 38.
37. Aplique la idea 20: el movimiento vertical es independiente del movimiento en el plano horizontal. La pelota puede escapar al pozo si golpea el borde superior del pozo. Esto ocurrirá si el período de movimiento vertical se relaciona con el tiempo entre dos colisiones con las paredes del pozo para el movimiento horizontal como un número racional (la razón de dos enteros).
38. Use la idea 1 y use el marco de referencia de la cuña, determine allí la aceleración de la pelota, sume aceleraciones vectorialmente para encontrar la aceleración de la pelota en el marco del laboratorio. Una vez que se conoce la aceleración y la velocidad inicial la trayectoria también se podrá encontrar fácilmente.
39. Aplique el hecho 12 para calcular la aceleración (la derivada con respecto al tiempo del vector velocidad). La velocidad angular de la rotación del vector velocidad se puede encontrar usando la idea 37.
40. Aplique la idea 1, use el marco del cono (en caída libre) en donde la esquina de la mesa acelera hacia arriba con magnitud  $g$ .
41. Aplique la idea 24 (trabaje con coordenadas polares  $r$  y  $\varphi$ ). Expresé el incremento de la longitud de la curva al cuadrado  $dl^2$  a través de los incrementos al cuadrado  $d\varphi^2$  y

$dr^2$  (use el teorema de Pitágoras); y relacione  $dr^2$  con  $dl^2$  a través de las velocidades de propagación. Tenga en cuenta que las ecuaciones diferenciales en la forma  $k dx = x dy$  (donde  $k$  es una constante) se pueden resolver separando las variables, es decir, trayendo todas las  $x$  y las  $y$  a los lados respectivos de la igualdad (aquí,  $k \frac{dx}{x} = dy$ ), e integrando a ambos lados de la igualdad (lo que conduce aquí a  $k \ln(x/x_0) = y$ , donde  $x_0$  es una constante emergente al tomar las integrales indefinidas<sup>19</sup>).

42. Denotando la longitud diagonal vía  $d$ , relacione la distancia de  $A_3$  desde la pared hasta  $d$ ; exprese la derivada con respecto al tiempo de  $d$  en términos de  $v$  (ver idea 38 en la página 13), y usa este resultado para encontrar las rapidezces de  $A_1$  y  $A_2$ . Use la idea 1 (cambie al marco de referencia del centro del rombo más grande) para encontrar la dirección de la aceleración de  $B_2$ . Aplique la idea 34 para deducir el módulo de la aceleración: cambie al marco donde  $A_2$  (o  $A_3$ ) están en reposo y el punto  $B_3$  se mueve a lo largo de un círculo y determine la aceleración centrípeta, la proyección de toda la aceleración en la barra  $A_2B_3$ .
43. Aplique las ideas 1 (use el marco de referencia de uno de los barcos) y la idea 2. Se necesita del ángulo entre la línea  $AB$  y la velocidad relativa; tenga en cuenta que la tangente de ese ángulo se puede expresar fácilmente.
44. Aplique la idea 33 se puede encontrar la dirección de las velocidades para esos dos puntos del disco donde las cuerdas son tangentes a este. Tenga en cuenta la idea 35 y observe que los extremos superiores de las cuerdas tienen velocidades cero (en el punto de contacto, la cuerda y la parte respectiva del disco tienen las mismas velocidades).
45. Aplique la idea 20: el movimiento a lo largo de cada una de las tablas es independiente. Use el hecho 4 (las componentes de aceleración de caída libre serán  $g \cos \alpha$  y  $g \sin \alpha$ ); calcule los períodos de colisiones para cada uno de los movimientos.
46. Aplique la idea 21 para concluir que la rapidez del bloque se mantiene constante. Exprese la rapidez angular  $\omega$  de la parte desenrollada de la cuerda en términos de su longitud actual  $l$ ; note que  $\omega$  también es igual a la rapidez angular del punto  $P$  donde la cuerda es tangente al cilindro; relacione esta velocidad con la velocidad a la que se desenrolla la cuerda,  $\frac{dl}{dt}$ . Aplique la fórmula proporcionada para concluir que  $\frac{d(l^2)}{dt}$  permanece constante durante el desenrollado y el enrollado. No olvide que también hay un período en el que la cuerda está completamente desenrollada y el bloque “dibuja” un semicírculo.
47. Aplique la idea 35 para determinar las proyecciones de velocidad de la caja  $\vec{v}$  a las direcciones de las cuerdas. Usando la idea 16 se puede concluir que el cuadrilátero formado por el vector  $\vec{v}$  como una diagonal y las proyecciones de  $\vec{v}$  ya que sus dos lados son cíclicos mientras que  $\vec{v}$  es el diámetro de su circuncírculo. Aplique el teorema del coseno para determinar la longitud de la otra diagonal y el teorema de seno para determinar  $|\vec{v}|$ , el diámetro del

circuncírculo.

48. Primer enfoque: aplique la idea 1: use el marco inercial que se mueve con la velocidad inicial de la niña; mientras que la aceleración de la niña es constante en módulo, la dirección se puede ajustar según sea necesario. Como en este marco de referencia, la velocidad inicial es cero, la tarea de optimización se vuelve bastante trivial. Segundo enfoque: estudie la evolución del vector de velocidad de la niña  $\vec{v}$  en el plano  $(v_x, v_y)$ : la aceleración  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  es constante en módulo, de ahí el punto final de  $\vec{v}$  se mueve con una rapidez constante  $|\vec{a}|$  de su posición inicial  $(0, v)$  a su posición final  $(v, 0)$ .
49. Hay al menos tres soluciones diferentes; la más simple está basado en la idea 30, y es bastante similar a la solución geométrica del problema 21. Todas las soluciones comienzan de la misma manera que las de problema 30 por (a) demostrando que la trayectoria óptima necesita tocar la esfera en un cierto punto  $P$  antes de golpear la esfera en su parte superior  $T$ , y (b) aplicando la idea 26 considerando el lanzamiento desde  $T$  en lugar de lanzar desde un punto desconocido al nivel del suelo.

El primer método hace uso de las propiedades geométricas de la parábola envolvente (ver ideas 28 y 30, y los hechos 6, 7 y 9):  $|TP| + |PA| = 2|TQ| + R$ , donde  $PA$  es una línea vertical,  $A$  se encuentra a la misma altura que el centro de la esfera  $O$  y  $Q$  es la punta de la parábola envolvente. Como la velocidad de disparo está definida por  $|TQ|$  (para más detalles vea las sugerencias del problema 21), solo necesitamos calcular  $|TP|$  y  $|PA|$ . Ya que  $TP$  es una línea que viene del foco, se refleja en la parábola en  $P$  a una línea vertical; ya que la parábola es tangente a la esfera, también se refleja por la esfera a una línea vertical que significa que  $\angle TPO = \angle OPA$ . Como  $TO \parallel PA$  podemos concluir que  $\angle TOP = \angle OPA$  y, como  $\triangle TOP$  es isósceles,  $\angle OTP = \angle TPO$ ; junto con la igualdad  $\angle TPO + \angle TOP + \angle OTP = 180^\circ$  concluimos que  $\angle OTP = 60^\circ$ , lo que nos da de inmediato  $|TP| = R$  y  $|PA| = \frac{R}{2}$ .

El segundo método hace uso de la expresión para la parábola envolvente (idea 28) con un foco en  $T$ : anote la ecuación para encontrar los puntos de intersección de la esfera y la parábola; esta será una ecuación bicuadrada. Según el hecho 7, en el caso óptimo, la trayectoria parabólica, la parábola envolvente y la esfera son tangentes entre sí en el mismo punto; por lo tanto, en este caso óptimo, existen exactamente dos soluciones simétricas para la ecuación bicuadrática (si la velocidad de lanzamiento es menor que la óptima, entonces hay 4 soluciones y, si es más grande, entonces no hay soluciones). Aplique la idea 29 para encontrar la rapidez.

La tercera solución hace uso del resultado del problema 22 y la idea 24: si usamos  $\varphi = \angle TOP$  como parámetro, sabemos que desde el punto  $T$ , el ángulo de disparo óptimo debe ser igual a  $90^\circ - \varphi$ . Por lo tanto, podemos anotar las condiciones por las que atraviesa la trayectoria  $P$  y las velocidades final, inicial y final son perpendiculares (idea

<sup>19</sup>Es mejor mantener  $\ln(x/x_0)$  en vez de  $\ln(x) - \ln(x_0)$  de lo contrario, sería difícil verificar si las dimensiones de las expresiones son correctas.

- 15). Esto nos da tres ecuaciones que contienen  $\varphi$ , tiempo de contacto  $t$  y rapidez inicial  $v$  como incógnitas. Parece que este sistema de ecuaciones se simplifica muy bien.
50. Se puede ver que los puntos rojos se repiten en los mismos lugares del cicloide azul para cada uno de sus períodos y hay tres puntos por período; de acuerdo con la idea 6, haremos uso de este hecho (en caso de que fuera necesario realizar cálculos considerablemente más largos) para concluir que el período de rotación del disco es tres veces más largo que el período de parpadeo, es decir, 0,3 s. La distancia recorrida corresponde a la longitud del período de 4 unidades de cuadrícula; el valor de una unidad de cuadrícula se puede encontrar al notar que la altura del cicloide es igual a  $2a$ .
51. i)  $v_{\text{dist}}$  siempre es negativo, por lo tanto, en general, la distancia disminuyó, por lo que los autos deben haber comenzado desde diferentes ciudades.  $O$  no podría haber sido el punto de partida de un automóvil porque, en ese caso, la distancia final habría sido la misma o mayor que al principio. Ahora solo tenemos que considerar tres posibilidades, de las cuales dos se excluyen fácilmente en función del comportamiento de  $0 < t < \frac{a}{v}$ .
- ii) Use la idea 18.
- iii) y iv) Calcule la velocidad relativa de acuerdo con la resta de vectores y proyecte en la línea que conecta los autos para diferentes posiciones en su camino.
52. Use el mismo enfoque que en el problema 3: use el marco de referencia que gira con la rapidez angular  $\frac{\omega}{2}$  para obtener la rapidez angular de la línea  $OP$ , siendo  $P$  el punto de intersección. Considere el triángulo isósceles  $QOP$  (donde  $Q$  es el centro del anillo azul) para obtener la rapidez angular de la línea  $QP$ .
53. Tenga en cuenta que, para un rayo, tal punto  $P$  aparece nítido y su velocidad es paralela al pico. Aplique la idea 33: el centro de rotación instantáneo es el punto más bajo  $G$  de la rueda (ya que está en contacto con el suelo y, por lo tanto, tiene velocidad cero). Por lo tanto,  $GP$  debe ser perpendicular al rayo; ahora recuerde la idea 16.
54. i) Use el hecho de que falta el punto naranja; el tiempo de exposición debe ser apropiado para capturar exactamente cuatro puntos.
- ii) Use la idea 1: en el marco de referencia del centro del disco, el vector de desplazamiento  $\vec{d}$  entre los destellos vecinos tiene siempre el mismo módulo  $d = 2R \sin(\omega\tau/2)$ , y los vectores de desplazamiento vecinos siempre están girados en el mismo ángulo  $\omega\tau$ . En el marco de referencia del laboratorio, vector de desplazamiento constante adicional  $\vec{v}\tau$  se debe agregar debido al movimiento de traslación del marco:  $\vec{d}' = \vec{d} + \vec{v}\tau$ . Por eso, si llevamos todos los vectores de desplazamiento a tales posiciones, sus puntos de partida coinciden, los puntos finales se encuentran en un círculo de radio  $\vec{c}\vec{r}$ ,  $\vec{r}\vec{v}$  y  $\vec{v}\vec{a}$ , dibuje el circuncírculo del triángulo formado por los puntos finales de los vectores; a partir de esa figura podemos medir tanto el ángulo de rotación  $\omega\tau$  (para encontrar  $\omega$ ), desplazamiento constante  $a = v\tau$  (para encontrar  $v$ ) y el radio del círculo  $d = 2R \sin(\omega\tau/2)$  (para encontrar  $R$ ).
55. Para la parábola  $y = kx^2$  del chorro, el factor  $k$  se puede determinar a partir de la figura; esto se relaciona con la unidad de rejilla desconocida  $d$ , la rapidez inicial  $v$  de chorro y  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . La idea 39 relaciona el flujo  $\frac{\pi}{4}d^2v$  con la tasa de llenado del recipiente; tenemos dos ecuaciones y dos parámetros desconocidos, por lo que el sistema de ecuaciones se puede resolver.
56. Usando la idea 1 podemos concluir que toda la basura debe estar en la misma línea con el barco desde donde cayeron: esto nos permite concluir, qué basura corresponde a cada barco. Usando la idea 40 marcamos el punto donde los barcos se encontraron el punto de intersección de dos rastros. La distancia de los barcos desde ese punto es proporcional a la velocidad de los barcos. La distancia de  $A$  desde el punto donde el camino del bote se cruza con la línea costera da la distancia transportada por el flujo de agua (el desplazamiento del marco de referencia); a partir de ese momento cuando los barcos se encontraron, el desplazamiento del marco de referencia fue más pequeño y se puede encontrar geoméricamente a partir de triángulos similares formados por las siguientes líneas: el rastro, la línea que conecta el barco con su punto de partida, la línea de costa y una línea paralela a la costa, dibujada a través del punto de intersección de los rastros. La construcción análoga de triángulos similares para el otro barco completará el problema.
57. Aplique la idea 39: considere la cantidad de autos que pasan por un punto dado en la unidad de tiempo (la frecuencia de autos), e iguale la suma de las frecuencias del auto de los dos carriles que se unen con la frecuencia del carril  $C$ ; esto le dará la velocidad en el carril  $C$  (el resto de los cálculos son sencillos).
58. Aplique la idea 39: introduzca la densidad  $\rho$  de agua en aire; entonces, el flujo de agua (masa por unidad de tiempo) es dado por  $A\rho v$ , donde  $A$  es el área de la sección transversal y  $v$  es la rapidez del hombre en relación con las gotas de lluvia. Para un hombre rectangular, calculamos el flujo total en dos partes: agua que cae en la superficie horizontal debido a la velocidad vertical de las gotas de lluvia y agua que cae en la superficie vertical debido al movimiento del hombre. Para un hombre esférico, necesitamos calcular la velocidad relativa usando la regla del paralelogramo para sumar las velocidades. En cualquier caso, obtenemos un sistema de ecuaciones a partir del cual se pueden eliminar las superficies y la velocidad del viento.
59. La longitud de los rastros se define por el intervalo de tiempo durante el cual la imagen de la gota permanece dentro del espacio entre las cortinas. Esto, a su vez, es inversamente proporcional a ese componente de la velocidad relativa de la imagen que es perpendicular al borde de la cortina. En un caso, la velocidad de las cortinas  $\vec{v}$  y la velocidad de la imagen de la gota  $\vec{u}$  son paralelas, en el otro caso antiparalelas y en el tercer caso perpendiculares. En el caso antiparalelo hay dos posibilidades: no sabemos cuál es más rápido, la cortina o la imagen. Si bien formalmente tenemos tres cantidades desconocidas,  $v$ ,  $u$  y, el ancho de la brecha  $d$ , estos entran en las ecuaciones solo en dos

combinaciones,  $v/d$  y  $u/d$ , es decir, esencialmente solo hay dos parámetros desconocidos. Por lo tanto, las expresiones para  $l_1$  y  $l_2$  Se puede resolver con respecto a  $v/d$  y  $u/d$ , que se utilizan para calcular el valor de  $l_3$ .

60. Para pequeños círculos, los radios deben formar una secuencia  $r_n = \frac{g}{2\pi} n^2 \tau^2$  (con  $n = 1, 2, \dots$ ); para anillos más grandes deberíamos tener que  $r_{n+1} - r_n = \sqrt{hg}\tau$ . Tomando medidas de la figura, podemos determinar  $\frac{g}{2\pi} n^2 \tau^2$  y  $\sqrt{hg}\tau$  como productos de  $L$  y un cierto valor numérico; esto nos da dos ecuaciones desde donde podemos eliminar  $\tau$  y expresar  $h$ .
61. Aplique la idea 27 y construya el frente de ola detrás de la lancha. Tenga en cuenta que localmente, el frente se propaga perpendicularmente a sí mismo, de modo que el primero en llegar a la costa es la parte del frente de onda que inicialmente estaba (es decir, en el punto de creación detrás de la lancha) paralela a la costa. También podemos concluir utilizando el principio de Huygens que cerca de la lancha, el frente de onda forma un ángulo  $\arcsen \frac{u}{v}$  con la trayectoria del bote.
62. Aplique la idea 1: use el marco de referencia del agua. Suponemos que el agua se mueve como un todo, a través de toda la profundidad, por lo tanto, en el marco de referencia del agua, la velocidad de la ola es la misma para todas las direcciones de propagación. Así podemos concluir que en el marco del agua, la velocidad de la embarcación es paralela a la bisectriz del ángulo formado por las olas. Sabemos que en el marco de referencia del laboratorio, la lancha se mueve en paralelo a la línea  $AB$ , por lo tanto, podemos deducir la velocidad del agua del triángulo de velocidades utilizando el valor conocido de la velocidad de la lancha. Por el principio de Huygens, sabemos que el ángulo entre la bisectriz y el frente de onda es  $\arcsen \frac{v}{w}$ , por lo tanto, podemos medir el ángulo para encontrar  $w$  y calcular la profundidad  $h = w^2/g$ .
63. i) Use la idea 1: en el marco de referencia del aire, el rastro es paralelo a la velocidad relativa del tractor. Entonces,  $\vec{v}_{\text{tractor}} - \vec{v}_{\text{viento}}$  es paralelo al rastro; estos dos vectores forman un triángulo que se puede construir fácilmente (conocemos las direcciones de sus dos lados y una longitud), donde la longitud de  $\vec{v}_{\text{viento}}$  puede ser medida.  
ii) Siguiendo la idea 40 nos convendría hacer uso del punto de intersección de los rastros de humo. Sin embargo, los tractores no se encontraron. Por lo tanto, debemos dibujar un sendero más que se hubiera observado si los tractores se encontraran en el cruce de la carretera (desplazar el tractor izquierdo junto con su rastro de manera apropiada). Luego, la velocidad del viento se puede relacionar de inmediato con la distancia del punto de intersección de los senderos desde el cruce de la carretera (solo es necesario compararla con la distancia de los tractores del cruce).
64. La idea principal es considerar el movimiento en un marco de referencia en caída libre, en este las pelotas se mueven con velocidades constantes, por lo tanto, están en los vértices base  $B$  y  $C$  de un triángulo isósceles. En ese marco, el punto de lanzamiento es el vértice superior  $A$  del triángulo isósceles. La posición actual del punto  $A$  en el marco

del laboratorio se puede encontrar al construir el triángulo isósceles. El punto  $A$  ha caído en el marco del laboratorio desde el punto  $P$  con la aceleración de caída libre y el tiempo de caída se puede encontrar al medir la distancia de caída  $|AP|$ . Las velocidades se pueden encontrar midiendo la distancia de caída  $|AB|$  (o  $|AC|$ ) en el marco descendente.

65. Considere el movimiento del barco en el marco de referencia del aire. Más específicamente, basándose en los datos del viento, calcule el vector de desplazamiento (es decir, el desplazamiento en el este-oeste y el desplazamiento en las direcciones norte-sur); conociendo el vector de desplazamiento en el marco del laboratorio, calcule el vector de desplazamiento del aire y, con base en eso, su velocidad.
66. Para empezar, debe saber que (como dictan las leyes de conservación de energía y de impulso) si dos pelotas absolutamente elásticas de masa igual colisionan centralmente mientras se mueven a lo largo de la misma línea, intercambiarán sus velocidades: la pelota  $A$  sale con la velocidad inicial de la pelota  $B$  y viceversa.

A continuación, hay dos ideas principales que deben aplicarse: primero, considere el movimiento de las pelotas en un marco de referencia deslizándose libre donde todas las pelotas se mueven con velocidades constantes. La segunda es la idea 41: agregue un eje de tiempo y estudie los gráficos. Notará que el gráfico  $x - t$  consiste en  $N$  líneas que se intersecan con los puntos de intersección correspondientes a las colisiones. El número de intersecciones se encuentra como el número de diferentes posibilidades de escoger 2 líneas del conjunto de  $N$  líneas.

## 9. RESPUESTAS

- $v_r = 4 \text{ km/h}$ ,  $v_l = 16 \text{ km/h}$ .
- 4 km.
- $u = v/2\sqrt{1 - (a/2r)^2}$ .
- Velocidad ascendente 4,85 m/s;  $h = 2000 \text{ m}$ ; velocidad del viento  $u = 2,8 \text{ m/s}$ .
- Una línea recta.
- $2/\sqrt{5} \text{ m/s}$ .
- $t = \frac{s}{u} + \frac{L}{v \cos \alpha} = 1,8 \text{ s}$ .
- $u = v/2 \cos \alpha$ ;  $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ .
- $v(t) \equiv 2\omega a$ .
- 18,75 m.
- 39 m.
- $t = \sqrt{(t_1^2 - t_2^2)}/2$ .
- $8d \tan \alpha$ .
- $\alpha = \arcsen 0,5 = 30^\circ$ .
- 6,7 s.
- $e^{100} - 1$  segundos.
- $x = \cos \alpha(l - h \tan \beta)$  y  $t = \frac{h \cos \beta}{v} + \frac{l \sen \alpha}{u}$ , donde  $\beta = \arcsen(v \sen \alpha / u)$ , si  $\tan \beta < l/h$ ; si no  $x = 0$  y  $t = \sqrt{h^2 + l^2}/v$ .

18.  $x = a \left( \frac{w}{u \cos \alpha} - \tan \alpha \right)$ , donde  $\alpha = \arcsen \left( \frac{u}{w+v} \right)$ .

19.  $z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ .

20.

21.  $v_{\min} = \sqrt{g(a+b+c)}$ .

22.

23. Arcos concéntricos de radios  $l_1$  y  $l_2$ , donde  $l_1$  y  $l_2$  son las distancias del centro de rotación desde las cintas superior e inferior respectivamente.

24.  $r = 4R$ .

25.  $a_1 = v_0^2/\sqrt{3}l$ ;  $a_2 = v_0^2/\sqrt{3}l$ .

26.  $v_0 = v/(1 + \sen \alpha)$ .

27.  $u = -v \tan \alpha$ ,  $a = \frac{v^2}{l \cos^3 \alpha}$ .

28.  $u = \frac{v}{v\tau/l-1} \approx 3,4 \text{ m/s}$ .

29.  $u \approx 15 \text{ km/h} \approx 4,2 \text{ m/s}$ ,  $\alpha \approx 27^\circ$ .

30. Sí.

31.  $t = 2\sqrt{\frac{R}{g} \left( 1 + \frac{R\Omega^2}{g} \right)}$  y  $\alpha = \arctan(\Omega t)$ .

32. Antihoraria; 3; 15 Hz.

33.  $7 \text{ cm/s}$ ;  $\frac{1 \text{ cm/s}}{\sqrt{\alpha^{-2}+1/49}} \approx 5,7 \text{ cm/s}$ .

34.  $l/2$ .

35.  $L\sqrt{3}$ .

36.  $v_0 = v \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$ ,  $a = \frac{v^2}{b} \tan^3 \alpha$ .

37.  $nv_0\sqrt{2H/g} = mR \cos \alpha$  con los enteros  $n$  y  $m$ .

38.  $a = 2a_0 \sen(\alpha/2)$ .

39.  $a = v_1v_2/l$ .

40.  $v \geq \sqrt{r^2g/2h}$ .

41. Una espiral logarítmica  $\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1} \ln \frac{r}{r_0} = \varphi$ .

42.  $v_0/6$ ,  $v_0/2$ ,  $v_0\sqrt{5}/6$ ,  $\sqrt{2}v_0^2/36l$ .

43.  $l \sen \phi$ , donde  $\tan \phi = |v_1 \sen \beta - v_2 \sen \alpha|/|v_2 \cos \beta - v_1 \cos \alpha|$ .

44.  $\omega R / \cos(\alpha/2)$ .

45.  $\sqrt{a \tan \alpha / b}$ .

46.  $2\pi^2kr(2k+1)/v$ .

47.  $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha} / \sen \alpha$ .

48.  $\sqrt{2}v/\mu g$ ; una parábola.

49.  $\sqrt{4,5gR}$ .

50.  $20 \text{ cm/s}$ .

51. i) De A y C hacia la capital; ii)  $a(2 - \sqrt{2})$ ; iii) para A-B: 0 hasta el punto de viraje,  $-2v$  de aquí en adelante; para B-C: constantemente a  $-v\sqrt{2}$ ; iv) la rapidez cae rápidamente hasta  $-2v$ .

52.  $v_{\min} = v_{\max} = \omega r$ .

53. Un círculo (anillo) tocando el suelo y pasando por el centro de la rueda.

54. El pulso cerúleo fue el primero;  $300 \text{ ms} < T < 500 \text{ ms}$ ;  $v \approx 65 \text{ cm/s}$ ,  $\omega \approx 23 \text{ rad/s}$ ,  $R \approx 5 \text{ cm}$ .

55. Definimos  $k \approx 0,014$  mediante la forma del chorro  $y = kx^2$  usando las unidades de la cuadrícula; luego  $d = (32V^2k/\pi^2t^2g) \approx 1 \text{ mm}$ .

56. Conecte el triángulo (de aquí en adelante  $T$ ) con una línea  $s_1$  a una de las dos estrellas inferiores, conecte el cuadrado ( $S$ ) con una línea  $s_2$  a la estrella restante; dibuje una línea horizontal  $s_3$  a través de la intersección entre  $s_1$  y  $s_2$ ; marque el punto de intersección  $Q$  entre las líneas  $s_3$  y  $TA$ ; el punto de partida  $B$  del otro barco es el punto de intersección de la costa superior con la línea  $SQ$ .

57. 35 min.

58. 1 min;  $\sqrt{1,5} \text{ min} \approx 73 \text{ s}$ .

59. 150 o 600 píxeles.

60.  $h \approx 3,2L$ .

61.  $\frac{R}{v} \arccos \frac{u}{v} + \frac{L}{u} - R\sqrt{u^{-2} - v^{-2}}$ .

62.  $v \approx 1,8 \text{ m/s}$ ;  $h \approx 2,0 \text{ m}$ .

63. i)  $v_{\text{viento}} \approx 13 \text{ km/h}$ ; ii)  $v_{\text{viento}} \approx 21 \text{ km/h}$ .

64.  $v \approx 20 \text{ m/s}$ .

65.  $\approx 12 \text{ m/s}$ .

66.  $\frac{N(N-1)}{2}$ .