

MECÁNICA CUÁNTICA

Jaan Kalda

Traducción al inglés por Stanislav Zavjalov

Traducción al español de la versión 0.4 por Roberto Marín

Versión: 13 de noviembre de 2019

1. INTRODUCCIÓN

Cuando aprendemos algo nuevo, siempre intentamos interpretar lo nuevo en términos de viejas nociones familiares. En el caso de la mecánica cuántica, parece que no hay partículas como las conocemos de la mecánica clásica: masas puntuales o cuerpos con cierta masa y velocidad. En su lugar, cualquier partícula debe describirse mediante lo que se denomina *función de onda*. Usando los conceptos de la mecánica clásica, se puede decir que una partícula mecanocuántica debe describirse como una onda, pero al ser una onda, todavía puede exhibir propiedades similares a las partículas. Resulta que estas propiedades aparentemente similares a las partículas todavía pueden explicarse utilizando consideraciones de onda. El texto en letra pequeña se puede omitir en la primera lectura.

2. FUNCIÓN DE ONDA

En la mecánica clásica, el estado de una partícula sin grados de libertad¹ internos se puede describir completamente por su **momento y coordenadas**; en mecánica cuántica, el estado completo de una partícula se describe por su llamada **función de onda** Ψ , que generalmente es un número complejo y que podría representarse, por ejemplo, como una función de coordenadas y tiempo, como: $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$. La probabilidad de encontrar la partícula en el tiempo t en la posición con las coordenadas x, y y z es proporcional² al módulo cuadrado de la función de onda compleja, $|\Psi|^2 = \Psi(x, y, z, t)\Psi^*(x, y, z, t)$, donde $\Psi^*(x, y, z, t)$ es el conjugado complejo de $\Psi(x, y, z, t)$. Lo que realmente significa “encontrar” la partícula en un punto del espacio dado es en realidad una pregunta difícil, volveremos a ella más adelante. En resumen, este es una manera corta para decir que se ha realizado una medición para encontrar la posición de la partícula y el resultado de esa medición fue (x, y, z) .

El ejemplo del fotón podría ser útil para comprender la idea de la función de onda: la parte real de la función de onda del fotón es el vector de campo eléctrico y la parte imaginaria es el vector de campo magnético (esta afirmación es cierta en el sistema de unidades de Gauss; en SI, la parte imaginaria de la función de onda es el producto de la inducción magnética y la velocidad de la luz). La probabilidad de encontrar un fotón en cualquier punto es proporcional a la densidad de energía electromagnética (intensidad de luz) en ese punto.

Al comparar el electrón y el fotón, debemos tener en cuenta que para los fotones se usa una función de onda vectorial, para los electrones, un escalar. La diferencia surge porque el momento angular de un fotón sobre un eje a través de su “centro de masa” puede tener tres valores diferentes (que corresponden a las polarizaciones lineal y dos circulares, horaria y antihoraria). No discutiremos más este tema.

2.1. Momento y energía

En la mecánica cuántica, los llamados *estados estacionarios* o *estados propios de energía* desempeñan un papel importante. En tal estado, la partícula tiene un valor único bien definido de energía E (el llamado valor propio).

Hay al menos dos buenas razones para esto. En primer lugar, cualquier estado de un sistema mecánico-cuántico es representable como una superposición de estados estacionarios (exactamente de la misma manera que el movimiento aleatorio de los osciladores acoplados se representa como una superposición de modos normales). En segundo lugar, generalmente un sistema cuántico que se ha traído del estado de equilibrio se encontrará rápidamente en un estado con la energía más baja posible, de modo que no se incumplan las leyes de conservación. Después de todo, la energía más baja es también una energía única y bien definida.

Resulta (la razón de ser la ecuación de Schrödinger, que podría considerarse como un postulado de la mecánica cuántica), que en un estado con una energía E bien definida, la función de onda evoluciona de la siguiente manera: $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar}$, de modo que la función de onda oscila con frecuencia angular ω , que está relacionada con la energía por la fórmula

$$E = \hbar\omega = h\nu. \quad (1)$$

La frecuencia lineal $\nu = \omega/2\pi$; la cantidad h se conoce como la constante de Planck, mientras que $\hbar = h/2\pi$ se conoce como la constante de Planck *reducida*.

Tenga en cuenta que la energía en 1 es la energía total (cinética más potencial) de un sistema mecánico-cuántico (por ejemplo, de una partícula), mientras que el nivel cero de energía potencial pueda elegirse libremente. Observe cómo un cambio del nivel cero de la energía potencial por un valor U significa que la función de onda se multiplica por un factor adicional $e^{iUt/\hbar}$ (lo anterior también se aplica a estados no estacionarios), que no altera en absoluto la cantidad tangible físicamente (la probabilidad de encontrar la partícula) porque el módulo de este factor es todavía unitario. Hay algunas lecciones prácticas importantes que se pueden aprender de esto:

(a) Para el movimiento y las colisiones de electrones y neutrones no relativistas, se puede usar la expresión para la energía cinética no relativista, $p^2/2m$, ya que las partículas no desaparecen y tiene sentido medir la energía cinética con respecto al estado inmóvil (en otras palabras, la energía de la masa en reposo puede ser ignorada).

(b) Para la absorción y emisión de fotones, se usa la expresión de energía relativista $E = mc^2$.

(c) El nivel cero de energía potencial puede ser elegido arbitrariamente.

En la mecánica cuántica, la ley de conservación de energía podría considerarse como la condición para la resonancia. Supongamos que hay un sistema con dos niveles de energía $E_1 < E_2$. Supongamos que el sistema se transfiere del estado de energía baja al otro estado mediante la absorción de una partícula (un fotón) con energía E_3 . La ley de conservación de energía es $E_2 = E_1 + E_3$, que podría reescribirse usando frecuencias angulares en la forma $\omega_2 - \omega_1 = \omega_3$. En el lado izquierdo de la ecuación está la frecuencia angular de la fun-

¹Dicho grado de libertad interna podría ser, por ejemplo, la rotación sobre su propio eje.

²En la mecánica cuántica no relativista, las partículas nunca se crean ni se destruyen y la probabilidad de encontrar la partícula en todo el espacio es, por lo tanto, la unidad. De ahí la integral de $|\Psi|^2$ en todo el espacio también debe ser igual a la unidad. Al realizar la corrección integral de la constante frente a la función de onda, normalmente nos referimos a esa constante cuando decimos, a continuación, que la función de onda es proporcional a algo.

ción de onda del sistema, si elegimos el nivel cero de energía en $E = E_1$, mientras que en el otro lado de la ecuación está la frecuencia del fotón. Por lo tanto, la interacción (absorción del fotón) solo puede suceder si se cumple la condición de resonancia: la frecuencia electromagnética es igual a la diferencia en las frecuencias de los dos estados estacionarios.

Considere un oscilador armónico cuántico simple: una partícula que se mueve en un potencial parabólico (la energía potencial es proporcional al cuadrado del desplazamiento desde el equilibrio). Supongamos que la frecuencia angular clásica de esta partícula es ω_0 . Este oscilador puede ir de un nivel de energía mecánico-cuántico (E_i) a otro (E_j , correspondiente a oscilaciones de amplitud más altas) mediante la absorción de ($n = 1, 2, 3 \dots$) fotones. Estos fotones son ondas electromagnéticas que deben estar en resonancia con el oscilador, de modo que la frecuencia angular electromagnética debe ser igual a la frecuencia propia del oscilador ω_0 . De la ley de conservación de energía $E_j - E_i = \hbar n \omega_0$ deducimos que los niveles de energía del oscilador armónico simple tienen que ser de la forma

$$E_n = \hbar n \omega_0 + C.$$

Una solución rigurosa de la ecuación de Schrödinger muestra que para el nivel cero de energía potencial al mínimo del potencial, la constante $C = \hbar \omega_0 / 2$.

Este resultado puede generalizarse fácilmente a osciladores con m grados de libertad. Por la mecánica clásica, sabemos que, en este caso, el sistema tiene m frecuencias propias $\omega_j, j = 1, 2, \dots, m$. La j -ésima frecuencia propia se puede excitar si se cumple la condición de resonancia, de modo que la frecuencia electromagnética es ω_j . Por lo tanto, uno tiene que emplear m enteros diferentes n_j para describir los niveles de energía estacionarios de tal oscilador:

$$E = \sum_{j=1}^m \hbar \omega_j n_j + C.$$

Esta expresión de energía se ve como si tuviéramos partículas diferentes, de energías $\omega_j, j = 1, 2, \dots, m$ y los enteros n_j describen los números de estas partículas. En el caso de las oscilaciones elásticas (ondas estacionarias) de la red cristalina, estas denominadas *cuasipartículas* (por lo que no son realmente partículas físicas) se llaman *fonones*.

Hemos visto que la energía del oscilador está *cuantizada* lo que significa que solo puede asumir ciertos valores discretos.

Como hemos visto, en un estado estacionario se conoce la dependencia temporal de la función de onda y, por lo tanto, la parte interesante es su dependencia espacial $\psi(x, y, z)$. Resulta (de la ecuación de Schrödinger) que en un estado con un momento \vec{p} definido de manera única, la función de onda es una onda plana sinusoidal, $\psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, donde el vector de onda \vec{k} está relacionado con el momento a través de la fórmula

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad (2)$$

El vector de onda apunta a lo largo de la dirección de la propagación de la onda y su módulo es $k = 2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda. La función $\psi = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$ se llama *función propia* del momento.

Tenga en cuenta que, para una partícula, la velocidad de grupo de la función de onda considerada como una onda es igual a la velocidad clásica de la partícula: $\hbar \omega = p^2/2m = (\hbar k)^2/2m + U$. Al derivar esto da $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \hbar k/m = p/m = v$. Esto también es válido para los fotones: $v_g = c$.

2.2. Función de onda como función del momento

Como se vio antes, la función de onda de una partícula con un momento bien definido es una onda plana sinusoidal que

llena todo el espacio, por lo que la posición de la partícula es totalmente desconocida.

El cuadrado del módulo de la función de onda $|\psi(\vec{r})|^2 \equiv |\psi(x, y, z)|^2$ da la probabilidad de encontrar la partícula en un punto dado. Esta declaración debe considerarse como un postulado dado sobre una base empírica (experimental). La pregunta de qué se entiende realmente por “encontrar la partícula” se abordará más adelante. Por el momento, es importante tener en cuenta que la función de onda no solo puede darse como una función de la coordenada \vec{r} , sino también como la del momento $\vec{p} \equiv (p_x, p_y, p_z)$, o $\psi = \psi(\vec{p}) \equiv \psi_{\vec{p}}$. Aquí, estamos tratando con un truco matemático (llamado “análisis de Fourier”), donde una función de onda arbitraria se puede representar como la suma de varios estados de momento bien definido, $\psi_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$. En esta representación, el cuadrado del valor absoluto de la amplitud de cada componente $|\psi_{\vec{p}}|^2$ da la probabilidad de encontrar la partícula con el momento correspondiente \vec{p} (en general, la amplitud $\psi_{\vec{p}}$ es un número complejo cuyo argumento proporciona el desplazamiento de fase de la onda componente correspondiente).

Abordemos matemáticamente este tema. El análisis de Fourier nos dice que cualquier función $f(x)$ puede representarse como la suma de funciones sinusoidales, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx} dk$, donde la cantidad $f_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$, que depende del vector de onda k , se denomina componente de Fourier de la función $f(x)$. Cambiando las variables $k \rightarrow p/\hbar$, podemos escribir la integral dada para la función de onda en la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p e^{ipx/\hbar} dp, \quad (3)$$

donde el factor

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx. \quad (4)$$

Las fórmulas 3 y 4 no son para aprender de memoria en este punto, sino para proporcionar evidencia a esta afirmación: cada función de onda se puede representar como una superposición de estados (funciones de onda $\psi(x) = e^{ipx/\hbar}$) de manera que el momento está bien definido en un valor único p ; se puede considerar que las amplitudes ψ_p de estos estados proporcionan la dependencia de la función de onda dada en el momento.

Para hacer una comparación adicional, considere el estado donde la partícula tiene una coordenada única bien definida x_0 ; entonces su función de onda es $\psi = \delta(x-x_0)$. La función $\delta(x)$ se denomina función delta de Dirac (el área debajo del gráfico de esta función es 1 y solo tiene un valor distinto de cero en el punto $x = 0$).

Ahora podemos expresar una función de onda arbitraria $\psi(x)$ como una superposición donde cada componente tiene una coordenada única:

$$\psi(x) = \int \psi(x_0) \delta(x-x_0) dx_0.$$

Tenga en cuenta que, en el lado derecho del signo de igualdad, el factor frente al estado de la posición bien definida $\delta(x-x_0)$ es la función inicial $\psi(x)$ en la posición $x = x_0$, cuyo módulo cuadrado es la probabilidad para encontrar la partícula en x_0 . Por lo tanto, no debería sorprender que en 3, el módulo cuadrado del factor frente a $e^{ipx/\hbar}$ (que es $|\psi_p|^2$) da la probabilidad de encontrar la partícula con el momento p .

La transferencia de la función $\psi(x)$ a otra ψ_p podría considerarse como una rotación espacial en el espacio funcional (de *Hilbert*) (donde la función ψ es un vector), porque al igual que en las fórmulas de rotación espacial ordinaria, las nuevas coordenadas de el vector ψ_p se representan mediante la combinación lineal de las coordenadas anteriores $\psi(x)$. La única diferencia es que como el número de coordenadas en los espacios ordinarios es finito, la combinación lineal se escribe con una suma; en el espacio de Hilbert, sin embargo, el conjunto de coordenadas es incontable (es un continuo) y por lo tanto la suma se reemplaza por la integral. Mientras que en el espacio ordinario un vector independiente de coordenadas se representa con una pequeña flecha sobre el símbolo, en el espacio de Hilbert la notación $|\psi\rangle$ se utiliza normalmente. Por lo tanto $|\psi\rangle$ representa la función de onda para la cual no está decidida o no importa si deberíamos investigar su dependencia en función de la coordenada x , el momento p o una cantidad física diferente.

Las fórmulas anteriores asumen un movimiento unidimensional, que se puede describir con una coordenada x y momento p . En tres dimensiones, una sola integral se reemplaza por triple integral (sobre x , y y z o sobre p_x , p_y y p_z), el producto px por el producto escalar $\vec{p} \cdot \vec{r}$ y el factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ por un factor $(2\pi\hbar)^{-3/2}$.

2.3. Principio de indeterminación

El principio de indeterminación es un resultado puramente matemático, que proviene de la conexión entre las dos representaciones de la función de onda: en el espacio de coordenadas y de momento (fórmulas 3 y 4). Es posible probar que si se definen las incertidumbres de coordenadas y de momento δx y δp como desviaciones de la media cuadrática de los correspondientes \bar{x} y \bar{p} , entonces se mantiene la siguiente desigualdad:

$$\delta x \cdot \delta p \geq \hbar/2. \tag{5}$$

Matemáticamente estas definiciones se pueden describir como:

$$\bar{x} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 x dx, \quad \bar{p} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_p|^2 p dp,$$

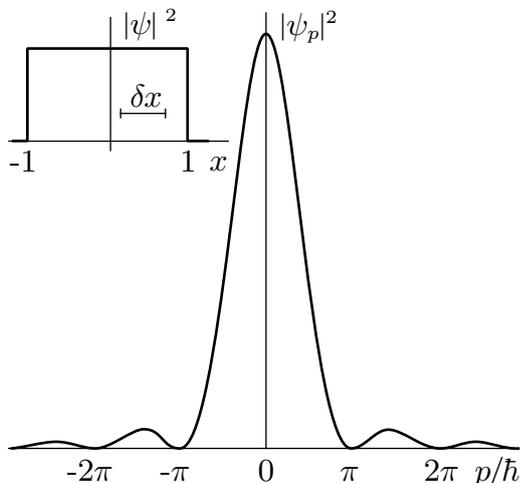
$$\delta x \equiv \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 (x - \bar{x})^2 dx}, \quad \delta p \equiv \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_p|^2 (p - \bar{p})^2 dp}.$$

En la desigualdad 5 la igualdad se observa si la función de onda es gaussiana, $\psi(x) = \pi^{1/4}(\delta x)^{-1/2}e^{-x^2/4(\delta x)^2}$; en todos los demás casos, es una desigualdad estricta.

El principio de incertidumbre se usa a menudo en las estimaciones de mecánica cuántica, donde se reemplaza el signo de desigualdad con una igualdad aproximada y las desviaciones de la raíz media cuadrada con anchos característicos Δx y Δp . En cuyo caso obtendríamos una estimación más precisa con la expresión

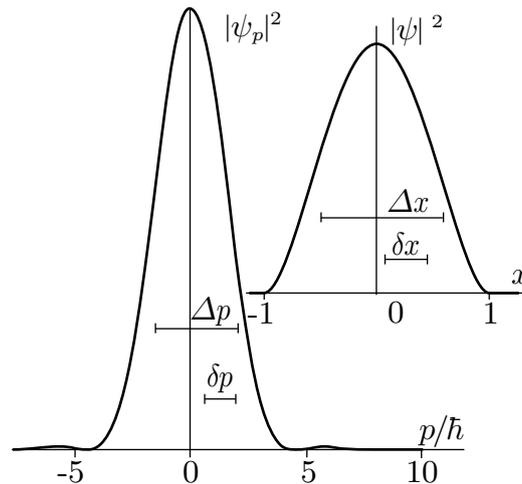
$$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar, \tag{6}$$

¿ $\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$ o $\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar/2$? Las respuestas podrían diferir hasta $4\pi \approx 13$ veces y un error tan grande debería evitarse incluso en las estimaciones (aunque al estimar, no se pueden descartar como incorrectas ni las respuestas que difieren de la respuesta verdadera en un factor de, por ejemplo, $(2\pi)^3 \approx 248$, al pensar cuidadosamente las acciones de uno, normalmente es posible lograr la diferencia por menos de un factor de dos). Investiguemos esta pregunta en dos ejemplos concretos de funciones de onda, vea las figuras.



La primera figura describe una probabilidad igual de que la partícula se encuentre a lo largo del eje x si su coordenada está en el rango $-1 \leq x \leq 1$, mientras que fuera de este rango no es posible encontrar la partícula. Este es exactamente el tipo de distribución que surge cuando un electrón, fotón, etc.,

pasa a través de una sola rendija; en ese caso, la distribución de probabilidad en función del impulso, $|\psi_p|^2$, es exactamente la misma que la distribución de intensidad en el patrón de difracción (en la pantalla). Normalmente consideraremos que el ancho típico del máximo de difracción es del orden de $\Delta p = \pi\hbar$ (es aproximadamente el ancho del pico en la mitad del máximo). La probabilidad $|\psi_p|^2$ oscila y la amplitud de oscilación es inversamente proporcional al cuadrado de momento (ver figura); por lo tanto, la desviación de la raíz cuadrada media no es finita, $\delta p = \infty$. La incertidumbre en la posición es, según la integral anterior, $\delta x = 1/\sqrt{3}$, que es aproximadamente 3,5 veces más pequeña que el ancho de la rendija $\Delta = 2$. Por lo tanto, encontramos $\delta x \cdot \delta p = \infty$ y $\Delta x \cdot \Delta p = 2\pi\hbar = h$.



La segunda figura representa la distribución de probabilidad de encontrar la partícula, $|\psi(x)|^2 = (1 - x^2)^2$ para $|x| \leq 1$ y $|\psi(x)|^2 = 0$ para $|x| \geq 1$. En este caso, la función de onda $\psi(x)$ es continua y, por lo tanto, la distribución de probabilidad en el espacio de momento se localiza con mayor fuerza que en el caso de la rendija y, la desviación de la media cuadrática de la raíz es, de hecho, finita: $\delta p \approx 1,34$. Al calcular la integral, no es difícil encontrar $\delta x = 1/\sqrt{7}$, de modo que $\delta x \cdot \delta p \approx 0,507\hbar$ (y la solución está cerca del mínimo absoluto $\hbar/2$). Los cálculos muestran que los anchos de los dos picos en la mitad del máximo son $\Delta p \approx 3,6\hbar$ y $\Delta x \approx 1,1$. Así $\Delta x \cdot \Delta p \approx 4\hbar \approx 0,63h$.

Los dos ejemplos dados muestran que la estimación 6 se ajusta cuando uno toma los anchos característicos del intervalo como las incertidumbres Δp y Δx ; la estimación 5 es válida para las desviaciones de la raíz cuadrada media (a menos que la localización sea débil y la desviación de la raíz cuadrada media sea en realidad infinita).

El principio de incertidumbre para el par p_x y x se mantiene porque la función de onda para un estado de p_x definido es una función sinusoidal de x (y cualquier estado puede representarse como una superposición de sinusoides para diferentes p_x). Obviamente, lo mismo aplica para p_y y y así como para p_z y z , pero si recordamos la fórmula 1, también lo es para E y t (y, de hecho, también para el momento angular y el ángulo de rotación), las variables que forman dichos pares se denominan *variables conjugadas*. La conexión entre E y t suele ser útil para describir el estado excitado de un átomo o una molécula: si teóricamente el valor de la energía en un estado estacionario es E_n , entonces debido a inestabilidades, colisiones, etc., el átomo o la molécula no pueden residir en ese estado por más tiempo

que algún tiempo característico τ . Por lo tanto, su energía en el estado excitado no será exactamente E_n , pero puede estar en el rango de ancho Γ alrededor del valor central E_n , donde

$$\Gamma \cdot \tau \sim h. \quad (7)$$

La cantidad Γ se denomina ancho del nivel de energía y τ se conoce como la vida útil del nivel excitado.

2.4. Aproximación cuasiclásica

Si uno desea obtener las formas precisas de las funciones de onda en estado estacionario y los niveles de energía correspondientes, generalmente tendrá que resolver la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, uno puede avanzar bastante lejos (e incluso a veces obtener el resultado correcto) empleando la llamada aproximación cuasiclásica (también conocida como la aproximación WKB). En este enfoque, primero se considera una partícula que se mueve en un potencial conocido como una partícula clásica y se encuentra la dependencia de su momento p en la coordenada x . Luego uno dice que la función de onda de la partícula es casi un senoide con un vector de onda variable: $\psi(x) \approx \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right]$. Esta es, por supuesto, una relación aproximada: la igualdad solo se mantiene si la partícula es libre (el momento es constante). Aun así, la igualdad casi se mantiene si el cambio relativo de momento en una longitud de onda es pequeño [de modo que $|p(x) - p(x + \hbar/p)| \ll p(x)$]. Supongamos que esta onda de longitud de onda variable se propaga a lo largo del eje x o a lo largo de una trayectoria circular (por ejemplo, en el caso de un electrón que orbita alrededor de un átomo). Si la partícula se mueve en un pozo potencial tan profundo que sus paredes siguen reflejándolo, entonces la onda también se refleja y comienza a rebotar (oscilar) hacia adelante y hacia atrás. El patrón de onda es estable si hay un número entero de longitudes de onda en un período de oscilación (entonces se forma una onda estacionaria). Por ejemplo, si estamos tratando con un pozo potencial con paredes verticales y un fondo horizontal de longitud L , entonces el impulso dentro del pozo es constante y la condición de onda estacionaria da $2Lp = nh$, lo que significa que $p = nh/2L$ y el n -ésimo nivel de energía es $E_n = p^2/2m = n^2\hbar^2/8L^2m$. En un átomo de hidrógeno, un electrón de masa m orbita alrededor del núcleo en un pozo simétrico $U = -kZe^2/r$ (donde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$). La energía cinética de un electrón que se mueve en una órbita circular es $p^2/2m = -U/2$, por lo tanto, $p^2r = kmZe^2$. Escribimos la condición de onda estacionaria como $2\pi rp = 2\pi\hbar n$ (donde n es el número de ondas estacionarias) y luego $rp = n\hbar$.

Esta última relación muestra que el momento angular rp está cuantizado. Resulta que esta conclusión es más general y no solo es característica de las órbitas circulares: el momento angular con respecto a un eje fijo solo puede ser un número entero de \hbar (una excepción a esta regla son las llamadas *partículas de Fermi* o *fermiones*) (por ejemplo, el electrón): el momento angular interno (denominado *espín*) de los fermiones solo puede ser un número medio entero de \hbar . En el caso de los electrones, siempre es $\pm\hbar/2$.

Combinando estos dos últimos resultados, encontramos $p = kmZe^2/n\hbar$ y por lo tanto la energía total

$$E_n = U/2 = -p^2/2m = -\frac{m}{2}(kZe^2/n\hbar)^2.$$

2.5. Efecto túnel

El efecto túnel es un efecto no clásico sorprendente, donde una partícula de energía E es capaz de pasar a través de

una barrera de energía potencial $U > E$ de una manera, donde debajo de la barrera adquiere una energía cinética negativa $p^2/2m = E - U$. Una energía cinética negativa significa un momento imaginario y un vector de onda $k = \frac{i}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}$ y la función de onda ya no es un senoide, sino una función exponencial en decrecimiento: $\psi(x) = e^{-x\sqrt{2m(U-E)}/\hbar}$. Por lo tanto, si el ancho de la barrera L es grande [$L\sqrt{2m(U-E)} \gg \hbar$], la función de onda de la partícula cae exponencialmente por debajo de la barrera y la partícula no puede pasar (se refleja). Por otro lado, si $L\sqrt{2m(U-E)} \sim \hbar$, entonces la función de onda aún se reduce (la partícula se refleja con cierta probabilidad), pero no en exceso: hay una probabilidad pequeña de hacer *túneles*.

Un enfoque ordenado relaciona la tunelización cuántica con el principio de indeterminación para la energía: la condición para la tunelización podría reescribirse en la forma $\frac{2(U-E)L}{\sqrt{2(U-E)/m}} \sim \hbar$ y podría interpretarse de la siguiente manera: la partícula "toma prestada", por un corto tiempo $\tau = L/v$ [donde $v = \sqrt{2(U-E)/m}$] la energía $2(U-E)$, de la cual se usa $U-E$ para superar la barrera y se deja una $U-E$ adicional como energía cinética para pasar la barrera; la energía no se puede tomar prestada por más tiempo de lo que permite el principio de indeterminación.

2.6. Mediciones en mecánica cuántica

La interpretación clásica de Copenhague de la mecánica cuántica establece que, como resultado de una medición de la mecánica cuántica, la función de onda *colapsa*. Supongamos que se realiza un experimento para medir el momento de la partícula. Antes de la medición, la función de onda de la partícula era una superposición de estados de momento bien definido, $\psi = \int \psi_p e^{ipx/\hbar} dp$. Tras la medición, se obtiene un cierto resultado p_m : así, del estado $\int \psi_p e^{ipx/\hbar} dp$ se ha obtenido un estado $\psi_{p_m} e^{ip_mx/\hbar} dp$. Una medición repetida del impulso de la partícula a partir de ahora siempre encontrará el mismo valor p_m del momento de la partícula, a menos que la partícula se vea afectada por otra cosa. Este cambio de estado de una superposición de *funciones propias* de la cantidad medida, que también incluyó el resultado final entre muchas otras contribuciones, en el estado correspondiente a la función propia de solo el resultado medido es exactamente lo que se conoce como el *colapso* de la función de onda. Recuerde que una función propia de una cantidad física se define como una función de onda que la partícula debe tener para tener esta cantidad física bien definida. La probabilidad de que se encuentre cualquiera de estos resultados posibles es proporcional al módulo cuadrado de la amplitud correspondiente en la superposición inicial. Una lección importante que se debe aprender es que cada medida cambia el estado del sistema.

Esta interpretación funciona perfectamente bien en la práctica, pero puede ser insatisfactoria desde el punto de vista filosófico. El problema es que la interacción de una partícula con un dispositivo de medición macroscópico se trata de manera diferente a las interacciones entre partículas. En este último caso, no se produce ningún colapso. Para concretar, veamos la interacción de dos partículas, por ejemplo, electrones. Si una partícula se describe mediante la función de onda que es (en el caso de la representación espacial) una función de tres coordenadas espaciales y tiempo $\psi(\vec{r}, t)$, entonces la función de onda de dos partículas ya es una función de seis coordenadas: $\Psi = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$, donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son los vectores de posición respectivos de las dos partículas. Si las partículas no interactúan, esta función de siete variables se convierte en un producto de dos funciones de cuatro variables, $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi_1(\vec{r}_1, t)\psi_2(\vec{r}_2, t)$ (mucho de la misma manera que la la probabilidad combinada de dos eventos independientes es el producto de dos probabilidades individuales); en caso de interacciones, la separación de variables ya no es posible: uno tiene que resolver la

ecuación de Schrödinger de siete dimensiones. Las interacciones de más de dos partículas se tratan de manera análoga y, para n partículas, se trata de una función de onda que depende de $3n + 1$ variables. ¡Y ni siquiera se menciona el colapso de la función de onda! Entonces, ¿cómo entra en juego este colapso? La interpretación clásica deja esta pregunta sin respuesta. La tumultuosa interacción entre los mundos macroscópico y microscópico da lugar a varias paradojas, como el gato de Schrödinger y la paradoja de la teletransportación (Einstein-Podolsky-Rosen).

Una interpretación alternativa de la mecánica cuántica, la llamada *interpretación de múltiples mundos* debida a Hugh Everett y otros, es capaz de justificar tanto el colapso de la función de onda como las paradojas mencionadas. Las implicaciones prácticas de esta interpretación son en su mayoría las mismas que en la interpretación clásica. Sin embargo, una ventaja adicional es que el módulo cuadrado de la función de onda se identifica con la probabilidad no por medio de un postulado, sino a través de una prueba matemática. En esta interpretación, se postula que la realidad física corresponde a la función de onda del Universo Ψ , que es una función de las coordenadas de todas las partículas en el Universo (incluidas aquellas que comprenden a los seres vivos); evoluciona todo el tiempo de acuerdo con la ecuación de Schrödinger y no experimenta colapsos en absoluto. Por lo tanto, Ψ incluye todos los resultados de medición posibles para cualquier medición concebible. Para simplificar, consideremos la función de onda del sistema combinado “observador (experimentador) + partícula” y supongamos que solo hay dos resultados posibles para esta medición, ‘1’ y ‘2’. Antes y después de la medición, el observador y la partícula no interactúan, por lo que se pueden separar las variables y representar el estado inicial del sistema como el producto $|M_0\rangle|O_0\rangle$, donde $|M_0\rangle$ es el estado inicial del observador, mientras que el estado inicial de la partícula es la superposición de dos estados posibles, $|O_0\rangle = \alpha|O_1\rangle + \beta|O_2\rangle$; aquí $|O_1\rangle$ y $|O_2\rangle$ son los estados de las ‘partículas’ en los que la cantidad medida está bien definida. Después de la medición, el estado del sistema toma la forma $\alpha|M_1\rangle|O_1\rangle + \beta|M_2\rangle|O_2\rangle$, donde $|M_j\rangle$ es el estado del observador según el cual el resultado de la medición es ‘ j ’. Pero para garantizar que un observador concreto tenga una y solo una opinión del resultado de la medición, decimos que los mundos se han dividido o que el Universo se ha dividido en dos: en una rama, hay un observador con el estado $|M_1\rangle$, en el otro, con el estado $|M_2\rangle$. En qué Universo cada individuo concreto (incluyendo a ti mismo) terminará es puramente arbitrario; en cualquier Universo parece que se ha producido un colapso de la función de onda (de modo que $|M_1\rangle$ ve la partícula en estado puro $|O_1\rangle$).

La ramificación del Universo no solo ocurre durante una medición, sino en cualquier momento en que se produce una disipación de energía (proceso irreversible). Debido a la irreversibilidad, los mundos desconectados no pueden volver a conectarse. Se puede decir que todas las probabilidades de la mecánica cuántica cobran vida en mundos diferentes y aquí solo somos testigos de una posible realización. Puede haber un mundo donde los dinosaurios nunca perecieron.