

# PROBLEMAS DE MECÁNICA

Jaan Kalda

13 de noviembre de 2019

Traducción parcial al inglés por: S. Ainsaar, T. Pungas, S. Zavjalov

Traducción al español de la versión 1.2 por Roberto Marín

## 1. INTRODUCCIÓN

Esta guía es la secuela de los problemas en cinemática y tiene dos partes principales: *sección 3, Estática* y *sección 4, Dinámica*; la *sección 5* contiene problemas de revisión. El objetivo principal de esta colección de problemas es presentar las ideas de resolución más importantes; usando estas, uno puede resolver la mayoría (> 95%) de los problemas de olimpiadas en mecánica. Por lo general, primero se indica un problema y luego aparecen algunas ideas y sugerencias relevantes (la letra “C” delante del número de una idea se refiere a la idea correspondiente numerada en la guía de cinemática). Las respuestas a los problemas se enumeran al final de la guía (*sección 7*). Precedidas por sugerencias bastante detalladas (*sección 6*), pero se recomienda que las utilice solo como último recurso, después de que sus mejores esfuerzos para abordar un problema fracasen (aun así, una vez que haya resuelto un problema con éxito por sí mismo, es útil verificar si su enfoque fue el mismo que el sugerido por las sugerencias).

El principio más importante de esta guía sostiene que casi todos los problemas de la olimpiada son “variaciones” de un conjunto específico de temas: las soluciones se derivan de las ideas de soluciones correspondientes. Por lo general, no es muy difícil reconocer la idea correcta para un problema dado, después de haber estudiado suficientes ideas de soluciones. Descubrir todas las ideas necesarias durante la resolución real ciertamente mostraría mucha más creatividad y ofrecería una mayor satisfacción, pero lamentablemente la habilidad de concebir ideas es difícil (o incluso impracticable) para aprender o enseñar. Además, puede llevar mucho tiempo llegar a una nueva idea y los que confían en probarla durante una olimpiada estarán en desventaja en comparación con aquellos que dominan las ideas.

En la ciencia en su conjunto, las ideas de solución desempeñan un papel similar al de las olimpiadas: la mayoría de los artículos científicos aplican y combinan ideas conocidas para resolver problemas nuevos (o, lo que es peor, antiguos), en el mejor de los casos, desarrollan y generalizan las ideas. Rara vez surgen nuevas ideas genuinamente buenas y muchas de ellas se conocen más tarde como obras maestras de la ciencia. Sin embargo, como todo el repertorio de ideas científicas abarca más que mecánica, no es tan fácil recordarlas y utilizarlas en los problemas correctos. La habilidad respectiva es altamente valorada; un logro especial sería emplear una idea conocida en una situación no convencional (inesperada, novedosa).

Además de las ideas, la guía también presenta “hechos” y “métodos”. La distinción es en gran parte arbitraria, algunas ideas podrían haber sido llamadas métodos o hechos y viceversa; se ha intentado perseguir la siguiente categorización. Los hechos son hallazgos fundamentales o particulares, cuyo conocimiento puede ser útil o necesario para la resolución de problemas, pero que no están formulados como “recetas”. Si bien en teoría, todos los problemas pueden resolverse a partir de los primeros principios (los “hechos” fundamentales), pero, por lo

general, este enfoque de “fuerza bruta” lleva a cálculos largos y, en ocasiones, poco complejos; las “ideas” son recetas de cómo resolver problemas más fácilmente. Los “métodos” son “ideas” de aplicabilidad particularmente amplia.

Se han utilizado varias fuentes para los problemas: las rondas regionales y nacionales de las Olimpiadas de Estonia, las Olimpiadas de Estonia y Finlandia, las Olimpiadas Internacionales de Física, la revista “Kvant”, las Olimpiadas de la Unión Soviética y de Rusia; algunos problemas se han modificado (ya sea más fácil o más difícil), algunos son “folklore” (se desconocen los orígenes).

De manera similar a la guía de cinemática, los problemas se clasifican como **simple**, **normal** y **difícil**: los números de los problemas se colorean de acuerdo con este código de color (¡tenga en cuenta que la dificultad es una categoría subjetiva!).

Finalmente, no se desespere si hay algunas cosas (o algunas secciones) que no puede entender por el momento: simplemente pase al siguiente tema o al siguiente problema; puede volver a las partes que no entendió más tarde.

## 2. LEYES TEÓRICAS BÁSICAS

Aquellos que estén familiarizados con las leyes básicas de la mecánica pueden omitir esta sección (aunque, aun así, puede leerla y obtener una nueva perspectiva) y comenzar en la *sección 3*. De hecho, se espera que la mayoría de los lectores puedan hacer esto porque casi todos los cursos de física comienzan con la mecánica y es poco probable que alguien se sienta atraído por esta guía que apunta a desarrollar habilidades avanzadas de resolución de problemas sin ninguna experiencia previa en física. Sin embargo, se han hecho intentos para mantener esta serie de guías de estudio independientes; esto explica la inclusión del capítulo actual. Aun así, esta sección está muy comprimida y en algunos lugares tiene un formalismo matemático que puede *parecer* intimidante para principiantes (por ejemplo, el uso del símbolo de suma  $\sum$  y diferenciales), por lo tanto, no es una lectura fácil. Para comenzar, si le resulta demasiado difícil comenzar con esta sección, tome un libro de texto de mecánica de la escuela secundaria y diríjase aquí a la *sección “Estática”*.

### 2.1. Postulados de la mecánica clásica

La mecánica clásica, el tema de esta guía, es una ciencia basada completamente en las tres leyes de Newton<sup>1</sup>, formulados aquí como “hechos”.

**Hecho 1:** (1.<sup>a</sup> ley de Newton.) Si bien el movimiento de los cuerpos depende del sistema de referencia (por ejemplo, un cuerpo que se mueve con una velocidad constante en un sistema se mueve con una aceleración en otro sistema si la aceleración relativa de los sistemas no es cero), existe el llamado *sistema de referencia inercial* donde los hechos 2–5 son válidos para todos los cuerpos.

**Hecho 2:** (2.<sup>a</sup> ley de Newton.) En un sistema de referencia inercial, una aceleración  $\vec{a}$  distinta de cero de un cuerpo siempre es causada por una *influencia* externa; cada cuerpo puede ser caracterizado por una *masa inercial*  $m$  (en lo que sigue el

<sup>1</sup>I. Newton 1687.

adjetivo “inercial” será abandonado) y cada influencia puede caracterizarse por una cantidad vectorial  $\vec{F}$  denominada *fuerza*, para que la igualdad  $\vec{F} = m\vec{a}$  es válida para cualquier sistema cuerpo-influencia.

El hecho 2 nos sirve también como **definiciones** de la masa de un cuerpo y de la magnitud de una fuerza. De hecho, si tenemos una *fuerza de referencia* fija que (a) garantiza tener siempre la misma magnitud y (b) se puede aplicar a un cuerpo arbitrario entonces podemos definir la masa de cualquier otro cuerpo en kilogramos<sup>2</sup> numéricamente igual a la razón de su aceleración a la aceleración de un cuerpo estándar cuando ambos cuerpos están sujetos a la fuerza de referencia<sup>3</sup>. La 2.<sup>a</sup> ley de Newton es válida si se trata de una definición autoconsistente, es decir, si la masa obtenida es independiente de la fuerza de referencia utilizada. Del mismo modo, la magnitud de cualquier fuerza en *Newtons* (denotado como  $N \equiv \text{kg m/s}^2$ ) se puede definir para que sea igual al producto de la masa y la aceleración de un cuerpo sujeto a esa fuerza; la 2.<sup>a</sup> ley de Newton es válida y esta definición es autoconsistente si el resultado es independiente del cuerpo de prueba utilizado.

Para resumir: la 2.<sup>a</sup> ley de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$  nos sirve tanto como la definición de la masa de un cuerpo (suponiendo que hayamos elegido una masa estándar) y la fuerza de una interacción; la ley garantiza que estas sean definiciones autoconsistentes: la masa de un cuerpo y la magnitud de una fuerza son independientes del procedimiento de medición.

**Hecho 3:** Las fuerzas se suman vectorialmente: si hay muchas fuerzas  $\vec{F}_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) actuando sobre un cuerpo de masa  $m$  entonces el hecho 2 sigue siendo válido con  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ .

La suma vectorial  $\sum_i \vec{F}_i$  se puede calcular usando la regla del paralelogramo o con la suma de componentes:  $F_x = \sum_i \vec{F}_{ix}$ , donde el índice  $x$  denota la componente en  $x$  (proyección en el eje  $x$ ) de un vector; se pueden escribir expresiones similares en los ejes  $y$  y  $z$ .

**Hecho 4:** Las masas se suman como cantidades escalares: si un cuerpo está formado por partes más pequeñas de masas  $m_j$  ( $j = 1 \dots m$ ) entonces la masa total del cuerpo compuesto es igual a la suma de las masas de sus componentes,  $m = \sum_j m_j$ .

**Hecho 5:** (3.<sup>a</sup> ley de Newton.) Si un cuerpo  $A$  ejerce una fuerza  $\vec{F}$  en un cuerpo  $B$  entonces el cuerpo  $B$  ejerce simultáneamente en el cuerpo  $A$  una fuerza antiparalela del mismo módulo  $-\vec{F}$ .

## 2.2. Reglas básicas derivadas de los postulados

Los hechos 1–5 pueden ser considerados como los postulados de la mecánica clásica (Newtoniana), confirmada por experimentos. *Todo los “hechos”, teoremas, etc. subsiguientes pueden ser derivados matemáticamente usando estos postulados.*

Hasta ahora hemos utilizado un concepto vago de *aceleración de un cuerpo*. Todo está bien mientras se mueva un cuerpo

<sup>2</sup>Se define tomando el valor numérico fijo de la constante de Planck  $h$  en  $6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , donde el metro y el segundo tienen su propia definición en el SI.

<sup>3</sup>Esto se logra con una balanza de Kibble que aprovecha los fenómenos electromagnéticos para medir la constante de Planck con gran exactitud.

<sup>4</sup>De ahora en adelante se usarán los anglicismos: momento, momento angular y torque como traducciones del inglés de las cantidades: *momentum*, *angular momentum* y *torque* en lugar de los términos: ímpetu, momento cinético y momento debido al uso regular de los primeros.

<sup>5</sup>Como los cuerpos rígidos, en cuyo caso las masas puntuales están unidas por fuerzas intermoleculares juntas en un cuerpo macroscópico.

de manera *traslacionalmente*, es decir, todos sus puntos tienen el mismo vector de aceleración. Sin embargo, si un cuerpo tiene un tamaño considerable y gira, entonces puntos diferentes tienen diferentes aceleraciones, por lo que necesitamos aclarar, la aceleración de qué punto debe usarse. Para superar esta dificultad y mantener nuestro conjunto de postulados 1–5 tan simple como sea posible, asumamos que el hecho 2 es válido para las llamadas *masas puntuales*, es decir, para cuerpos muy pequeños cuyas dimensiones son mucho más pequeñas que las distancias de viaje características; luego, la posición de una masa puntual se describe mediante un punto único que tiene una velocidad y una aceleración definidas de manera inequívoca. Podemos generalizar el hecho 2 a cuerpos de tamaño finito reales dividiéndolos de forma ficticia en pequeños pedazos, cada uno de los cuales puede tratarse como una masa puntual.

Para empezar, se puede derivar (ver apéndice 1) la formulación genérica de la 2.<sup>a</sup> ley de Newton.

**Hecho 6:** (Ley de conservación del momento<sup>4</sup>/2.<sup>a</sup> ley de Newton). Para el momento neto  $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$  de un sistema de masas puntuales<sup>5</sup>,

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}, \quad (1)$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza neta (la suma de *fuerzas*) actuando en el sistema. En particular, **el momento neto se conserva ( $\vec{P} = \text{const}$ ) si  $\vec{F} = 0$ .**

Sustituyendo  $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i$  (donde  $\vec{r}_i$  denota el vector de posición de la  $i$ -ésima masa puntual), podemos reescribir la ecuación 1 como:

$$M \frac{d^2 \vec{r}_{cm}}{dt^2} = \vec{F},$$

donde

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (2)$$

se llama *centro de masa*. Este resultado aclara: en el caso de cuerpos macroscópicos, el hecho 2 sigue siendo válido si utilizamos la aceleración del centro de masa.

De acuerdo con la 2.<sup>a</sup> ley de Newton, una vez que sepamos cómo las fuerzas de interacción entre los cuerpos dependen de las distancias entre cuerpos y de las velocidades, podemos (en teoría) calcular cómo evolucionará el sistema en el tiempo (tales sistemas se denominan como *sistemas deterministas*). De hecho, conocemos las aceleraciones de todos los cuerpos y, por lo tanto, podemos determinar las velocidades y las posiciones después de un pequeño incremento de tiempo: si el incremento de tiempo  $\Delta t$  es lo suficientemente pequeño, los cambios en las aceleraciones  $\Delta \vec{a}$  pueden ser despreciados, lo que significa que la nueva velocidad para el  $i$ -ésimo cuerpo será  $\vec{v}'_i = \vec{v}_i + \vec{a}_i \Delta t$  y el nuevo vector de posición  $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i \Delta t$ ; todas las dependencias temporales  $\vec{v}_i(t)$  y  $\vec{r}_i(t)$  (con  $i = 1 \dots N$  donde  $N$  es el número de cuerpos) se pueden obtener avanzando en el tiempo paso a paso. En términos matemáticos, se trata de una integración numérica de un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*: la segunda derivada de las coordenadas  $\ddot{x}_i$ ,  $\ddot{y}_i$  y  $\ddot{z}_i$  se expresan

en términos de las coordenadas  $x_i, y_i, z_i$  y las primeras derivadas  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ <sup>6</sup>. Si bien en principio, estos cálculos siempre se pueden hacer, al menos numéricamente y suponiendo que tenemos suficiente poder de cómputo, en la práctica la resolución matemática puede ser muy difícil<sup>7</sup>. Aparte de los hechos 1–5, la mecánica newtoniana es una colección de “recetas” para una solución más fácil de estas ecuaciones diferenciales.

Entre tales recetas, encontrar y aplicar leyes de conservación tiene un papel central. Esto se debe a que, según lo dicho anteriormente, la evolución de los sistemas mecánicos se describe mediante un sistema de ecuaciones diferenciales y cada ley de conservación reduce el orden de ese sistema en uno; esto hace que el procedimiento matemático sea mucho más simple. Las leyes de conservación pueden derivarse matemáticamente de las leyes de Newton; si bien es definitivamente útil saber cómo se hace, la mayoría de los problemas mecánicos se pueden resolver sin estar familiarizado con este procedimiento. Por eso, las leyes de conservación se derivan en los apéndices 1,2 y 3; aquí solo proporcionamos las formulaciones. Ya nos hemos ocupado de la ley de conservación del momento (ver hecho 6), para que podamos pasar al siguiente.

**Hecho 7:** (Ley de conservación del momento angular). Para el momento angular neto  $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$  de un sistema de cuerpos,

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\tau}, \quad (3)$$

donde

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

es el torque neto que actúa sobre el sistema; aquí  $\vec{F}_i$  representa la fuerza neta que actúa sobre la  $i$ -ésima masa puntual. En particular, el momento angular neto del sistema se conserva si  $\vec{\tau} = 0$ .

La ecuación 3 se deriva en el apéndice 2 y puede ser considerada como la 2.<sup>a</sup> ley de Newton para el movimiento de rotacional de los cuerpos.

En geometría tridimensional, el cálculo de los productos vectoriales para determinar el torque neto y el momento angular puede ser bastante difícil. Afortunadamente, la mayoría de los problemas de la Olimpiada tienen que ver con la geometría bidimensional: vectores de velocidad, momento y radio se encuentran en el plano  $x - y$  y los productos vectoriales (torques y momentos angulares) son paralelos al eje  $z$ , es decir, podemos considerar  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  y  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  como escalares, caracterizados por su proyección en el eje  $z$  (en lo que sigue se denotarán como  $L$  y  $\tau$ , respectivamente). De acuerdo con la definición del producto vectorial, el signo de dicho torque es positivo si la rotación del vector  $\vec{r}$  a el vector  $\vec{F}$  corresponde a un movimiento hacia la derecha y negativo de lo contrario. Así podemos escribir  $\tau = |\vec{r}| \times |\vec{F}| \sin \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo entre el vector del radio y la fuerza y puede ser positivo (rotación desde  $\vec{r}$  a  $\vec{F}$  es hacia la derecha) o negativo. Podemos

introducir el *brazo*  $h = |\vec{r}| \sin \alpha$  (ver figura), en cuyo caso

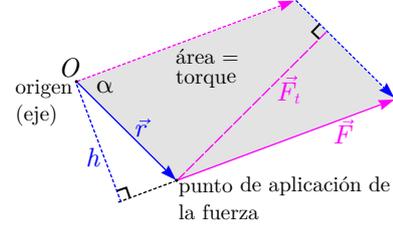
$$\tau = |\vec{F}| h;$$

del mismo modo podemos usar la componente tangencial de la fuerza  $F_t = |\vec{F}| \sin \alpha$  y obtener

$$\tau = |\vec{r}| F_t.$$

Un procedimiento similar puede ser aplicado a los momentos angulares:

$$L = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \alpha = h |\vec{p}| = |\vec{r}| p_t.$$



La disciplina de *estática* estudia el *equilibrio de los cuerpos*, es decir, condiciones cuando hay un marco de referencia inercial donde un cuerpo permanece inmóvil. Está claro que tanto el momento como el momento angular de un cuerpo en equilibrio necesitan ser constantes, por lo tanto, *la suma de todas las fuerzas, así como la suma de todos los torques que actúan sobre un cuerpo, deben ser cero*; esto se aplica también a cualquier parte ficticia de un cuerpo. Si bien hay problemas estáticos que estudian cuerpos deformables (que cambian de forma cuando se le aplican fuerzas), hay una importante idealización del *cuerpo rígido*: un cuerpo que conserva su forma bajo cualquier fuerza (no demasiado grande).

Mientras que para la 2.<sup>a</sup> ley de Newton (ecuación 1) y para la condición de equilibrio de fuerza estática, no importa dónde se aplique la fuerza, en el caso de momento angular (ecuación 3) y para la condición de equilibrio de torques, se vuelve importante. En la mecánica clásica, las fuerzas se dividen en *fuerzas de contacto* que se aplican en el punto de contacto de dos cuerpos (fuerzas de elasticidad en sus diversas formas, tales como fuerzas normales y de fricción, ver abajo) y las *fuerzas de cuerpo* que se aplican a cada punto del cuerpo sólido (como la gravedad y las fuerzas electrostáticas). El punto de aplicación de las fuerzas de contacto es obviamente el punto de contacto; en el caso de las fuerzas del cuerpo, el torque puede calcularse dividiendo todo el cuerpo (sistema de cuerpos) en partes tan pequeñas (masas puntuales) e integrando los pares aplicados a cada uno de estos. Es fácil ver que con la fuerza de cuerpo total (es decir, la suma de todas las fuerzas de cuerpo aplicadas a diferentes partes del cuerpo)  $\vec{F}$  y el torque total  $\vec{\tau}$  aplicado a un cuerpo, siempre se puede encontrar un radiovector  $\vec{r}$  que  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ , es decir, aunque las fuerzas del cuerpo se aplican a cada punto del cuerpo, el efecto neto es como si la fuerza neta  $\vec{F}$  fueran aplicada a un cierto centro de aplicación efectiva; en algunos casos, existen reglas simples para encontrar los centros de aplicación efectivos, por ejemplo, en el caso de un campo de gravedad homogéneo, parece ser el centro de masa<sup>8</sup>.

<sup>6</sup>Aquí asumimos que la fuerza depende solo de las coordenadas y velocidades de los cuerpos; con la excepción de la fuerza de *Abraham-Lorentz* (teniendo en cuenta la radiación ciclotrón) esto siempre se satisface.

<sup>7</sup>Además, existe la posibilidad de un comportamiento caótico cuando en los sistemas de muchos cuerpos, las pequeñas diferencias en las condiciones iniciales conducen a un crecimiento exponencial de las diferencias, de la misma manera que es imposible colocar un lápiz afilado verticalmente en su punta sobre una superficie plana.

<sup>8</sup>De manera similar, si dos cuerpos entran en contacto en un área de tamaño finito (en lugar de en unos pocos puntos de contacto), tendríamos que encontrar el torque total al integrar en el área de contacto y siempre se puede encontrar el punto de aplicación efectiva de estas fuerzas.

En el nivel microscópico de la mecánica cuántica, tal división de fuerzas pierde sentido, porque, por un lado, los campos que median fuerzas corporales también son cosas materiales y, en este sentido, todas las fuerzas son fuerzas de contacto. Por otro lado, las fuerzas de contacto clásicas también están mediadas a nivel microscópico a través de los campos, de modo que, en cierto sentido, todas las fuerzas son fuerzas del cuerpo. En cualquier caso, un nivel macroscópico tal división sigue siendo útil.

**Hecho 8:** (Ley de conservación de la energía; para más detalles, ver apéndice 3). Si definimos la energía cinética para un sistema de masas puntuales (o cuerpos rígidos en movimiento traslacional) como:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2,$$

y el trabajo total realizado por todas las fuerzas durante desplazamientos infinitamente pequeños  $d\vec{r}_i$  de las masas puntuales es:

$$dW = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

entonces el cambio de la energía cinética es igual al trabajo total realizado por todas las fuerzas,

$$dK = dW;$$

aquí,  $\vec{F}_i$  denota la fuerza total que actúa en la  $i$ -ésima masa puntual. El trabajo realizado por las *fuerzas conservativas* depende solo de los estados iniciales y finales del sistema (es decir, en las posiciones de las masas puntuales) y no a lo largo de las trayectorias que se movieron las masas puntuales. Esto significa que el trabajo realizado por fuerzas conservativas puede expresarse como la disminución de una determinada función de estado.  $\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$  que se conoce como la *energía potencial*; para desplazamientos infinitesimales podemos escribir  $dW_{\text{cons}} = -d\Pi$ <sup>9</sup>. Por lo tanto, si definimos la energía mecánica completa como  $E = K + \Pi$  entonces

$$dE = dW',$$

donde  $dW'$  representa el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas; si no hay tales fuerzas entonces  $dE = 0$ , por lo tanto

$$E = \Pi + K = \text{const.} \quad (4)$$

Aquí se necesitan algunos comentarios. Primero, mientras que el momento de un cuerpo es el momento de su centro de masa, la energía cinética de un cuerpo compuesto *no es* sólo la energía cinética de su centro de masa: la energía cinética en el marco del centro de masa (“CM”) necesita ser agregada, también,

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{u}_i^2,$$

donde  $\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$  es la velocidad de la  $i$ -ésima masa puntual en el marco CM<sup>10</sup>. Más adelante se analizará cómo calcular la energía cinética en el marco del centro de masa cuerpos rígidos en rotación.

Finalmente, notemos que las fuerzas dependen de las velocidades (por ejemplo, fuerzas de fricción) y/o del tiempo

(por ejemplo, la fuerza normal ejercida por una pared móvil), no pueden ser conservativas porque el trabajo realizado por tales fuerzas a lo largo de un trayecto dependen claramente de qué tan rápido se mueven los cuerpos. Se proporciona una excepción por aquellas fuerzas dependientes de la velocidad que son siempre perpendiculares a la velocidad (por ejemplo, la fuerza magnética y la fuerza normal) y para tales  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \equiv 0$ .

### 2.3. Fuerzas básicas

**Gravedad.** Ahora, consideremos el caso de un campo gravitacional con más detalles; puede ser descrito por el vector de aceleración de caída libre  $\vec{g}$ . De la “cinemática” sabemos que entonces todos los cuerpos se mueven con la aceleración  $\vec{g}$ ; entonces, según la 2.ª ley de Newton, esto debe ser causado por una fuerza

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

Esta se llama *fuerza gravitacional*. El hecho de que en un campo de gravedad dado, la fuerza de gravedad es proporcional a la masa de un cuerpo debe considerarse como un hallazgo experimental. Recordemos que la masa se introduce a través de la 2.ª ley de Newton y describe la *inercia* de un cuerpo, es decir, la capacidad de un cuerpo para retener su velocidad; por esto también podemos llamarla *masa inercial*. Aquí, sin embargo, la masa entra en una ley completamente diferente: la fuerza de gravedad es proporcional a la masa. Es fácil imaginar que la fuerza de gravedad está definida por otra característica de un cuerpo, llamémosla *masa gravitacional*, sin relación con la *masa inercial*. Los experimentos demuestran que la masa gravitatoria es siempre igual a la masa inercial y, por lo tanto, podemos abandonar los adjetivos “gravitacional” e “inercial”. De hecho, la equivalencia de masa inercial y gravitacional tiene un gran significado en la física y representa el postulado principal y la piedra angular de la teoría general de la relatividad.

De la 3.ª ley de Newton sabemos que cada fuerza es causada por algún otro cuerpo: una fuerza de gravedad que actúa en un cuerpo  $A$  necesita ser causada por un cuerpo  $B$ . También sabemos que la fuerza de gravedad es causada por y es *proporcional a* la masa de un cuerpo y al parecer esto se aplica tanto al cuerpo  $A$  como al cuerpo  $B$ . Por lo tanto, la fuerza debe ser proporcional al producto de las masas,  $F = c m_A m_B$ , donde el coeficiente de proporcionalidad  $c$  puede ser una función de la distancia. Parece que  $c$  es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado,  $c = G/r^2$ ; consideremos esto como un hallazgo experimental. Aquí  $G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  se llama *la constante gravitacional*. Ahora es fácil adivinar que esta fuerza debe ser paralela a la única dirección preferida para un sistema de dos masas de puntos, la línea que conecta los dos puntos. Este es ciertamente el caso; además, la fuerza gravitacional parece ser una fuerza atractiva.

**Hecho 9:** La fuerza gravitacional que actúa sobre la  $i$ -ésima masa puntual debido a la  $j$ -ésima masa puntual se puede ex-

<sup>9</sup> $d\Pi \equiv \Pi(\vec{r}_1 + d\vec{r}_1, \vec{r}_2 + d\vec{r}_2, \dots) - \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$

<sup>10</sup>De hecho, dividimos el cuerpo en masas puntuales y escribimos  $K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{cm})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{u}_i + \vec{v}_{cm})^2$ ; ahora podemos abrir los paréntesis y factorizar  $\vec{v}_{cm}$ :  $\frac{1}{2} \sum_i (\vec{u}_i + \vec{v}_{cm})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{u}_i^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \sum_i m_i \vec{u}_i + \frac{1}{2} \vec{v}_{cm}^2 \sum_i m_i$ . Aquí,  $\sum_i m_i \vec{u}_i$  es el momento total en el marco CM, que es cero según la definición del centro de masa.

<sup>11</sup>I. Newton 1687

presar como

$$\vec{F}_i = \hat{r}_{ij} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2}, \quad (5)$$

donde  $\hat{r}_{ij} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i)/|\vec{r}_j - \vec{r}_i|$  representa el vector unitario que apunta desde el  $i$ -ésimo cuerpo al  $j$ -ésimo cuerpo y  $r_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|^{11}$ . La presencia de un tercer cuerpo afecta la validez de esta ley, es decir, se mantiene el principio de superposición: la fuerza gravitacional total se puede encontrar al sumar las contribuciones de todos los cuerpos gravitantes de acuerdo con la ecuación 5<sup>12</sup>. La ecuación 5 sigue siendo válida cuando los cuerpos que interactúan gravitacionalmente tienen una distribución de masa esférica simétrica, en ese caso,  $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_j$  apuntan a los respectivos centros de simetría (que coinciden con los centros de masa)<sup>13</sup>. ¡Nótese bien! en el caso de cuerpos con formas arbitrarias, el uso de los centros de masa sería incorrecto; la fuerza debe calcularse dividiendo los cuerpos en masas puntuales e integrando sus aportes.

Para la atracción gravitacional de la Tierra, típicamente podemos aproximarlos  $r_{ij}$  con el radio de la Tierra  $R_E$ , así que

$$\vec{F} = m\vec{g}, \quad \vec{g} = \hat{z} \frac{GM_E}{R_E^2} \approx \hat{z} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2, \quad (6)$$

donde  $\hat{z}$  representa un vector unitario apuntando hacia abajo y  $M_E$  denota la masa de la Tierra.

Tenga en cuenta que la fuerza debida a un campo gravitacional homogéneo  $\vec{g}$  se aplica efectivamente a un centro de masa de un cuerpo, independientemente de su forma. De hecho, el torque de la fuerza de gravedad se calcula entonces como

$$\vec{T} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{g} m_i = \left( \sum_i \vec{r}_i m_i \right) \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times \vec{g} M,$$

donde  $M = \sum_i m_i$ .

La fuerza de gravedad es una fuerza conservativa porque para cualquier par de masas puntuales, la fuerza se dirige a lo largo de la línea que conecta estas masas puntuales y depende solo de la distancia entre estas (ver apéndice 3). El trabajo realizado por una fuerza de gravedad  $\vec{F} = m\vec{g}$  debido a un campo de gravedad homogéneo se puede expresar como  $dW = m\vec{g} \cdot d\vec{r}$ , entonces  $\Pi = -m\vec{g} \cdot d\vec{r}$ ; integrando obtenemos

$$\Pi = -m\vec{g} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0),$$

donde  $\vec{r}_0$  es el vector que apunta a un punto de referencia elegido arbitrariamente. Ahora, teniendo en cuenta que la energía es aditiva, podemos escribir una expresión para la energía potencial gravitatoria de  $N$  cuerpos:

$$\Pi = -\vec{g} \cdot \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) = -\vec{g} \cdot (\vec{r}_{cm} - \vec{r}_0) \sum_i m_i. \quad (7)$$

La energía gravitacional de dos masas puntuales se puede calcular de manera similar mediante la integración; para las masas de dos puntos, generalmente es conveniente tomar la configuración de referencia (para la cual la energía potencial es cero) de modo que la distancia entre los dos cuerpos sea infinita. Para pequeños desplazamientos, el trabajo realizado por las fuerzas de gravedad que actúan sobre ambos cuerpos

$$dW = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} dr_{12}$$

<sup>12</sup>El principio de superposición corresponde a la linealidad de las ecuaciones no relativistas del campo gravitacional y puede tratarse como un postulado verificado experimentalmente.

<sup>13</sup>En la guía de electromagnetismo, esta propiedad se derivará de la ecuación 5 utilizando el principio de superposición.

<sup>14</sup>R. Hooke 1660

<sup>15</sup>La deformación de los resortes, de hecho, implica flexión, pero la ley de Hooke sigue siendo válida en ese caso.

<sup>16</sup>Una descripción adecuada de las fuerzas de elasticidad cuando se trata de flexión y cizallamiento requiere una descripción tensorial y está fuera del alcance de esta guía.

[aquí tomamos en cuenta que  $d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  y  $\hat{r}_{12} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -dr_{12}$ ]. Así,

$$\Pi = \int_{\infty}^{r_{12}} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Si hay más de dos cuerpos que interactúan, podemos usar el principio de superposición para encontrar

$$\Pi = -G \sum_{i>j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}; \quad (8)$$

tenga en cuenta que la energía de interacción de cualquier par de cuerpos debe contarse una sola vez, por lo tanto, sumamos pares con  $i > j$ .

**Hecho 10:** La energía potencial de dos cuerpos esféricamente simétricos de interacción gravitacional está dada por la ecuación 8; en el caso de campo de gravedad de fuerza homogénea dirigida hacia abajo  $g$ , el cambio de energía potencial de un cuerpo de masa  $m$  es  $\Delta\Pi = g\Delta h$ , donde  $h$  es el cambio de altura.

**Elasticidad.** De manera similar a las fuerzas de gravedad, las fuerzas de elasticidad se pueden cumplir literalmente en cada uno de nuestros pasos. Si bien microscópicamente, todas las fuerzas de elasticidad pueden explicarse (al menos en principio) en términos de interacciones electrostáticas usando la mecánica cuántica, macroscópicamente puede tomar diferentes formas. En primer lugar, está la ley de Hooke que describe las fuerzas de elasticidad para cuerpos deformables (por ejemplo, una banda de goma o un resorte); también hay fuerza normal y fuerza de fricción seca que aparentemente no tienen nada que ver con la elasticidad, pero en realidad, tanto la fuerza normal como la fuerza de fricción seca tienen microscópicamente el mismo origen que la ley de Hooke.

**Hecho 11:** (La ley de Hooke<sup>14</sup>). Si la deformación de un cuerpo elásticamente deformable no es demasiado grande, el cuerpo deformado ejerce una fuerza que (a) es antiparalela al vector de deformación  $\vec{a}$  y (b) por módulo es proporcional a la deformación, es decir,

$$\vec{F} = -k\vec{a}. \quad (9)$$

Esta ley es válida para pequeñas deformaciones de todos los materiales elásticos, incluidas bandas de goma, resortes, etc., siempre que la deformación no sea demasiado grande y la deformación del cuerpo solo incluya estiramiento (o compresión) y no implica flexión o corte<sup>15</sup>. Si se trata de deformaciones de flexión y corte, con una dirección de deformación fija (descrita por el vector unitario  $\hat{a} \equiv \vec{a}/|\vec{a}|$ ), el módulo de fuerza sigue siendo proporcional a  $|\vec{a}|$ ; sin embargo, entonces la rigidez (el coeficiente de proporcionalidad  $k$ ) depende también de  $\hat{a}$  y la fuerza no es necesariamente antiparalela al desplazamiento<sup>16</sup>.

Las fuerzas de elasticidad son conservativas, la energía potencial se puede encontrar por integración simple  $\Pi = -\int \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int ka da = \frac{1}{2}ka^2$ .

**Hecho 12:** Bajo los supuestos del hecho 9, la energía potencial de un cuerpo elásticamente deformable viene dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2}ka^2. \quad (10)$$

Es bastante claro que si tomamos, por ejemplo, una banda de goma de longitud  $l$  y rigidez  $k$ , haciéndola dos veces más larga reducirá su rigidez en un factor de dos. De hecho, uno puede dividir la banda más larga en dos mitades, cada una de longitud  $l$ , lo que significa que si aplicamos ahora la misma fuerza  $F$  a los puntos finales de la banda larga, ambas mitades se deformarán por  $x = F/k$  y por lo tanto, toda la banda se deforma por  $x' = x + x = 2F/k$  de manera que la rigidez  $k' = F/x' = k/2$ . De manera similar, hacer que la banda sea dos veces más gruesa aumentará la rigidez en un factor de dos porque podemos considerar que la banda más gruesa está formada por dos bandas más delgadas paralelas. ¡Nótese bien! esto no se aplica a los resortes y la deformación por flexión: mientras que un resorte dos veces más largo, por supuesto, seguirá disminuyendo  $k$  por un factor de dos, hacer un resorte a partir de un cable dos veces más grueso aumentará la rigidez más de dos veces: en el mismo ángulo de flexión, el cable más grueso se deformará más que un cable más delgado. Este párrafo puede resumirse como el siguiente hecho.

**Hecho 13:** Para una banda de material elástico de longitud  $L$  y sección transversal  $A$ , la rigidez es:

$$k = AY/L, \quad (11)$$

donde  $Y$  denota el llamado *módulo de Young* del material<sup>17</sup>.

Esta igualdad hace posible dar una formulación alternativa de la ley de Hooke. Para ello, vamos a introducir los conceptos de *la deformación*, que se define como la razón  $\varepsilon = a/L$  y la **tensión mecánica**<sup>18</sup> que se define como la fuerza de elasticidad por unidad de área,  $\sigma = F/A$ . Entonces, la ley de Hooke puede ser reescrita como

$$\sigma = \varepsilon Y.$$

También se puede introducir el concepto de *densidad de energía* de un material deformado, la razón entre la energía potencial y el volumen,  $w = \Pi/(LA) = \frac{1}{2}Y\varepsilon^2$ .

Ahora también podemos abordar la pregunta, qué deformaciones pueden considerarse como “suficientemente pequeñas” para que la ley de Hooke siga siendo válida. Uno podría pensar que necesitamos tener  $\varepsilon \ll 1$ , pero típicamente este es un requisito demasiado flojo: la mayoría de los materiales elásticos se rompen mucho antes de las deformaciones  $\varepsilon \sim 1$  se alcancen. Normalmente, la ley de Hooke comienza a fallar cuando las deformaciones son tan grandes que el material está cerca de romperse. Además, para tales grandes deformaciones, el material ya no es totalmente elástico: cuando se elimina la fuerza, el material no recupera completamente su forma inicial y quedará alguna deformación residual; tales deformaciones se conocen como *deformaciones plásticas*. También hay materiales (que pueden ser referidos como *materiales plásticos* o *materiales plásticamente deformables*) que se deforman plásticamente en

un rango muy amplio de valores de deformación antes de romperse en pedazos. En tales casos, la ley de Hooke sigue siendo válida solo para deformaciones extremadamente pequeñas por las cuales la deformación aún permanece elástica.

Tenga en cuenta que hay *materiales hiperelásticos* por lo que la deformación puede ser muy grande,  $\varepsilon > 1$ ; entonces, de hecho, la condición  $\varepsilon \ll 1$  se requiere para la aplicabilidad de la ley de Hooke.

La mayoría de los materiales tienen valores bastante grandes de  $Y$ , lo que significa que, a menos que tengamos hilos o alambres realmente largos y delgados, las fuerzas moderadas causarían solo deformaciones realmente diminutas e imperceptibles. Este es típicamente el caso de cables, cuerdas, varillas y superficies sólidas. En esos casos, mientras que el efecto geométrico de las deformaciones puede despreciarse, se formará una deformación tal que la fuerza de elasticidad compense *cualquier* fuerza externa aplicada. Si estamos tratando con una superficie sólida, tal fuerza de elasticidad se llama *fuerza normal*; en el caso de varillas, alambres y cuerdas, la llamamos *tensión*.

A menos que se indique lo contrario, se supone que la fuerza de tensión es paralela a la varilla, el cable o una cuerda. En el caso de una cuerda o un cable delgado, este es esencialmente el caso: no hay posibilidad de tener una cizalla o flexión elástica porque la cuerda es típicamente muy “suave” con respecto a tales deformaciones: si intentamos crear una fuerza de elasticidad perpendicular aplicando una fuerza externa perpendicular, la cuerda se doblará sin dar lugar a ninguna fuerza notable. En el caso de una barra, esto no es cierto: si aplicamos una fuerza perpendicular externa, la barra se resiste elásticamente a los intentos de flexión y crea una componente perpendicular de la fuerza de tensión. Aun así, si todas las fuerzas externas aplicadas a una barra son paralelas a ella, de acuerdo con la 3.<sup>a</sup> ley de Newton, la fuerza de tensión también será paralela a la varilla.

En el caso de una cuerda estirada (varilla, cuerda, etc.), podemos dividirla ficticiamente en dos partes. Luego, en el punto de división  $P$ , las dos piezas se atraen entre sí con una cierta fuerza de elasticidad. La dirección de esta fuerza depende de qué parte de la cuerda se considera, pero debido a la 3.<sup>a</sup> ley de Newton, el módulo de la fuerza sigue siendo el mismo. La fuerza con la que las dos partes ficticias de la cuerda interactúan entre sí en el punto  $P$  describe el estado de la cuerda en ese punto y se conoce como *tensión*. Entonces, distinguiremos la fuerza  $\vec{F}$  que se aplica al punto final de una cuerda y, la tensión  $T$ , que se define para cualquier punto de la cuerda y describe su estado; tenga en cuenta que cuando las fuerzas externas se aplican solo a los puntos finales de una cuerda en equilibrio,  $|\vec{F}| = T$  (esto se deduce de la condición de equilibrio de fuerza para cualquier parte ficticia de la cuerda).

**Hecho 14:** La tensión es una fuerza de elasticidad en un elemento de construcción lineal, como una cuerda (varilla, alambre, etc.)<sup>19</sup>. Para una cuerda no estirable<sup>20</sup>, si se está tirando (o empujando, lo que puede ocurrir en el caso de una varilla),

<sup>17</sup>L. Euler 1727, G. Riccati 1782

<sup>18</sup>Conocida como *estrés*.

<sup>19</sup>En la sección transversal de los cuerpos elásticos tridimensionales, en lugar de tensión, se utiliza el concepto de tensión mecánica; la descripción respectiva es matemáticamente más complicada, por ejemplo, la tensión mecánica es una cantidad *tensorial*.

<sup>20</sup>Más precisamente, una cuerda hecha de un material con un valor muy grande de módulo de Young  $Y$ .

la tensión se ajusta a la fuerza aplicada externamente para evitar el estiramiento. Si se puede despreciar la masa de un hilo o cuerda, la tensión es constante a lo largo de ella. En una cuerda que se dobla libremente, la fuerza de tensión en un punto  $P$  es paralela a la tangente dibujada a la cuerda en el punto  $P$ .

**Hecho 15:** La fuerza normal es la perpendicular a la superficie de la componente de una fuerza de elasticidad en la superficie de un cuerpo rígido (no deformable) con el cual el cuerpo rígido actúa sobre un cuerpo en contacto; se ajusta a la fuerza aplicada externamente, evitando así que el cuerpo rígido se deforme.

Tenga en cuenta que si la fuerza aplicada externamente no es perpendicular a la superficie rígida del cuerpo, entonces, debido a la 3.<sup>a</sup> ley de Newton, la fuerza de elasticidad tendrá componentes perpendiculares a la superficie y tangenciales (paralelos a la superficie). Esta última se manifiesta en los puntos de contacto de dos cuerpos sólidos como *fuerza de fricción*. Más exactamente, la fuerza de fricción es la fuerza en el punto de contacto de dos cuerpos debido a la interacción de las moléculas de un cuerpo con las moléculas del otro cuerpo cuando los cuerpos intentan deslizarse uno sobre el otro; las moléculas de la superficie se mantienen en su lugar debido a las fuerzas de elasticidad dentro de cada uno de los cuerpos; estas fuerzas de elasticidad son causadas por la deformación cortante de los cuerpos (típicamente poco notoria).

En el caso de cuerpos sólidos, si las fuerzas tangenciales externas no son demasiado grandes en comparación con las fuerzas normales, los cuerpos no se deslizarán y la fuerza de fricción se ajusta para compensar las fuerzas tangenciales externas; esta se llama la *fuerza de fricción estática*.

**Hecho 16:** (Ley de Amontons). La fuerza de fricción estática máxima en el área de contacto de dos cuerpos  $F_{\text{máx}} = \mu_s N$ , donde  $N$  es la fuerza normal en esa área de contacto y  $\mu_s$  es una constante dependiente de los dos materiales de contacto, conocida como *coeficiente de fricción estática*; también puede depender de la temperatura, humedad, etc. Así,  $F_{\text{máx}}$  es independiente del área de contacto.

**Hecho 17:** (Ley de fricción de Coulomb). Cuando dos cuerpos se mueven uno respecto al otro, la fuerza de fricción en el área de contacto de estos cuerpos es  $F = \mu_k N$ , donde  $N$  es la fuerza normal en esa área de contacto y  $\mu_k$  es una constante dependiente de los dos materiales de contacto, referidos como *el coeficiente de fricción cinético*; depende de la velocidad de deslizamiento, pero esta dependencia es débil y generalmente se ignora.

En el caso de los problemas de la Olimpiada, la mayoría de las veces se supone que  $\mu_s = \mu_k$ , pero a veces estos se toman como diferentes ( $\mu_s > \mu_k$ ).

Mientras que las leyes de fricción son muy simples y se han formulado hace mucho tiempo<sup>21</sup>, derivarlo de la dinámica microscópica (molecular) resulta ser una tarea muy difícil (todavía hay investigaciones publicadas sobre ese tema, ver M.H. Müser et al., Phys. Rev. Lett. 86, 1295 (2000) y O.M. Braun et al., Phys. Rev. Lett. 110, 085503).

### 3. ESTÁTICA

Cuando se resuelven problemas en estática, siempre se puede utilizar el enfoque estándar de fuerza bruta: las ecuaciones 1 y 3 nos dicen que, para cada cuerpo en equilibrio,  $\vec{F} = 0$  y  $\vec{\tau} = 0$ . Entonces, para cada cuerpo sólido, tenemos una condición de balance de fuerza y una condición de balance de torque. De acuerdo con el procedimiento estándar, estas ecuaciones se proyectarán en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  dándonos seis ecuaciones (asumiendo geometría tridimensional); si hay  $N$  cuerpos interactuando, el número total de ecuaciones es  $6N$ . Para un problema planteado correctamente, necesitamos tener también  $6N$  parámetros desconocidos para que podamos resolver este conjunto de ecuaciones algebraicas. La descripción del procedimiento parece simple, pero resolver tantas ecuaciones puede ser bastante difícil. En el caso de la geometría bidimensional, el número de ecuaciones se reduce dos veces (mientras que el número de ecuaciones de balance de fuerza se reduce a dos, todos los pares de torsión serán perpendiculares al plano, por lo que solo hay una ecuación de par), pero incluso con sólo dos cuerpos, todavía tenemos 6 ecuaciones.

Afortunadamente, hay trucos que pueden ayudarnos a reducir el número de ecuaciones. Por lo general el ingenio principal radica en:

**Idea 1:** Elija los ejes óptimos para eliminar tantas proyecciones de fuerzas como sea posible. Es especialmente bueno eliminar las proyecciones de las fuerzas que *no sabemos ni nos interesa*,

por ejemplo, la fuerza de reacción entre dos cuerpos o la fuerza de tracción en una cuerda (o una barra). Para igualar a cero tantas fuerzas como sea posible, vale la pena señalar que *a)* los ejes no pueden ser perpendiculares; *b)* si el sistema consta de varios cuerpos, entonces se puede elegir un conjunto diferente de ejes para cada cuerpo.

**Idea 2:** Para la ecuación de los torques es útil elegir un punto de pivote en el que hayan tantos brazos de fuerza iguales a cero como sea posible. De nuevo es especialmente beneficioso igualar a cero los torques de *fuerzas “poco interesantes”*.

Por ejemplo, si elegimos que el pivote esté en el punto de contacto de dos cuerpos, entonces los brazos de momento de la fuerza de fricción entre los cuerpos y de su fuerza de reacción son ambos cero.

Como se mencionó anteriormente, para un *sistema bidimensional*, podemos escribir dos ecuaciones por cuerpo para las fuerzas (componentes en  $x$  y  $y$ ) y una ecuación (por cuerpo) para los torques. Podríamos aumentar el número de ecuaciones ya sea utilizando más de dos proyecciones para las ecuaciones de balance de fuerza, o más de un punto de giro (“eje” de rotación) para el balance de torque. Sin embargo,

**Hecho 18:** *El número máximo de ecuaciones linealmente independientes (que describen la fuerza y el equilibrio del torque) es igual al número de grados de libertad del cuerpo (tres en el caso bidimensional, ya que el cuerpo puede girar en un plano y desplazarse a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  y seis en el caso tridimensional).*

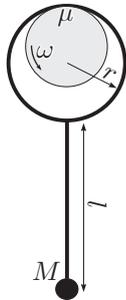
<sup>21</sup>Las leyes de fricción fueron desarrolladas por L. da Vinci 1493, G. Amontons 1699 y C.A. Coulomb 1785.

Entonces, si anotamos dos condiciones de equilibrio de fuerzas con dos condiciones de equilibrio de torques, una de las cuatro ecuaciones siempre será una consecuencia redundante de las otras tres.

Las ecuaciones 1 y 3 parece que nos dicen que para la geometría bidimensional, deberíamos usar una ecuación de torques y dos ecuaciones de fuerza; sin embargo, cada ecuación de fuerza se puede “intercambiar por” una ecuación de torque. Entonces, aparte del conjunto “canónico” de dos ecuaciones de fuerza y una ecuación de torque, podemos usar una ecuación de fuerza con dos ecuaciones de torque (con dos puntos de pivote diferentes) y también podemos usar tres ecuaciones de torques con tres pivotes diferentes puntos que no deben estar en una sola línea. De hecho, tengamos dos condiciones de equilibrio de torques,  $\sum_i \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = 0$  y  $\sum_i \vec{O}'P_i \times \vec{F}_i = 0$  donde  $P_i$  es el punto de aplicación de la fuerza  $\vec{F}_i$ . Una vez que restamos una ecuación de la otra, obtenemos  $\sum_i \vec{OO}' \times \vec{F}_i = \vec{OO}' \times \sum_i \vec{F}_i = 0$ , que es la proyección de la condición de balance de fuerza a la perpendicular de  $OO'$ . Debe enfatizarse que al menos una ecuación de torque debe dejarse en su conjunto de ecuaciones: el “intercambio” de ecuaciones de fuerza por las ecuaciones de torques funciona debido a una rotación en torno a  $O$  por un ángulo pequeño  $d\varphi$  seguido de una rotación alrededor de  $O'$  por  $-d\varphi$  resulta en un movimiento de traslación por  $|OO'|d\varphi$ , pero no existe tal secuencia de movimientos de traslación que pueda dar como resultado un movimiento de rotación.

**Idea 3:** El uso de las condiciones de balance de torques suele ser más eficiente que el uso de las condiciones de balance de fuerza, ya que para cualquier condición de balance de fuerza, solo podemos eliminar una fuerza<sup>22</sup> proyectando la condición al perpendicular de esa fuerza; mientras tanto, si elegimos el punto de pivote como el punto de intersección de las dos líneas a lo largo de las cuales se aplican dos fuerzas no paralelas, ambas fuerzas desaparecen de la ecuación.

**Pr 1.** Un extremo de una varilla ligera se dobla en un aro de radio  $r$ . La parte recta de la varilla tiene longitud  $l$ ; una masa  $M$  está unida al otro extremo de la varilla. El péndulo así formado se cuelga por el aro en un eje giratorio. El coeficiente de fricción entre el eje y el aro es  $\mu$ . Encuentre el ángulo de equilibrio entre la barra y la vertical.

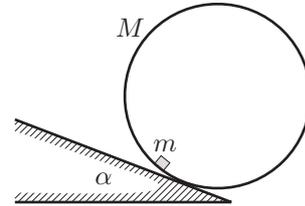


Este problema se clasifica como difícil porque la mayoría de las personas que intentan resolverlo tienen dificultades para dibujar un boceto cualitativamente correcto. Lo que realmente ayuda a hacer un boceto correcto es confiar en la idea 2. Las simplificaciones matemáticas son ofrecidas por:

**Hecho 19:** En una superficie inclinada, el deslizamiento

comenzará cuando el ángulo de la pendiente  $\alpha$  cumple que  $\tan \alpha = \mu$ .

**Pr 2.** En una pendiente con ángulo de pendiente  $\alpha$  yace un cilindro con masa  $M$ , siendo su eje horizontal. Un bloque pequeño con masa  $m$  se coloca dentro de este. El coeficiente de fricción entre el bloque y el cilindro es  $\mu$ ; la pendiente no es resbaladiza. ¿Cuál es el ángulo de inclinación máximo  $\alpha$  para que el cilindro permanezca en reposo? El bloque es mucho más pequeño que el radio del cilindro.

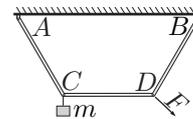


Aquí podemos usar de nuevo el hecho 19 y la idea 2 si añadimos:

**Idea 4:** A veces es útil considerar un sistema de dos (o más) cuerpos como un todo y escribir las ecuaciones para las fuerzas y/o los torques para todo el sistema.

Entonces, la fuerza neta (o torque) que actúa sobre el cuerpo compuesto es la suma de las fuerzas (torques) externas actuando sobre los constituyentes. Nuestros cálculos se simplifican porque las fuerzas internas (torques) entre las diferentes partes del cuerpo compuesto pueden ignorarse (debido a la 3.ª ley de Newton se anulan entre ellas). Para el último problema, es útil ensamblar un cuerpo compuesto del cilindro y el bloque.

**Pr 3.** Tres barras idénticas están conectadas por bisagras entre sí, las más externas están articuladas al techo en los puntos  $A$  y  $B$ . La distancia entre estos puntos es el doble de la longitud de una barra. Un peso de masa  $m$  se cuelga en la bisagra  $C$ . ¿Por lo menos, cuán fuerte es una fuerza sobre la bisagra  $D$  es necesaria para mantener el sistema estacionario con la varilla  $CD$  horizontal?



De nuevo podemos usar la idea 2. El trabajo también es ayudado por:

**Hecho 20:** Si las fuerzas se aplican solo a dos puntos finales de una varilla y el (los) accesorio(s) de la varilla en su(s) punto(s) extremo(s) no está (es) rígido (la varilla descansa libremente sobre sus soportes o está sujeta a una cuerda o bisagra), entonces la fuerza de tensión en la varilla se dirige a lo largo de la varilla.

De hecho, en cualquiera de los puntos finales, la fuerza externa neta aplicada  $\vec{F}$  debe apuntar a lo largo de la barra, ya que su torque con respecto al otro punto final debe ser cero. Además, según la 3.ª ley de Newton, la fuerza externa  $\vec{F}$  debe encontrarse con una fuerza igual y opuesta ejercida por la varilla, que es la fuerza de tensión  $\vec{T}$ , así que  $\vec{F} = -\vec{T}$ .

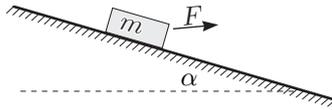
<sup>22</sup>A menos que haya fuerzas paralelas.

Algunas ideas son universales, especialmente las matemáticas.

**Idea C-2** Algunos extremos son más fáciles de encontrar sin usar derivadas,

por ejemplo, el camino más corto desde un punto a un plano es perpendicular a él.

**Pr 4.** ¿Cuál es la fuerza mínima necesaria para mover un bloque de masa  $m$  que descansa sobre un plano inclinado de ángulo de pendiente  $\alpha$ , si el coeficiente de fricción es  $\mu$ ? Investigar los casos cuando a)  $\alpha = 0$ ; b)  $0 < \alpha < \arctan \mu$ .



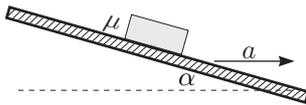
**Idea 5:** El balance de fuerza a veces puede resolverse vectorialmente sin proyectar nada sobre los ejes.

El hecho 19, o más bien su siguiente generalización, resulta de utilidad:

**Idea 6:** Si un cuerpo está a punto de resbalar (o ya está resbalando), entonces la suma de la fuerza de fricción y la fuerza de reacción está inclinada por  $\arctan \mu$  de la normal de la superficie.

Esta idea se puede utilizar con bastante frecuencia, por ejemplo, en el siguiente problema.

**Pr 5.** Un bloque descansa sobre una superficie inclinada con un ángulo de inclinación  $\alpha$ . La superficie se mueve con una aceleración horizontal  $a$  que se encuentra en el mismo plano vertical que un vector normal a la superficie. Determine los valores del coeficiente de fricción  $\mu$  que permiten que el bloque permanezca inmóvil.



Aquí somos ayudados por la idea universal:

**Idea 7:** Muchos problemas se vuelven muy fáciles en un marco de referencia de traslación no inercial que se mueve.

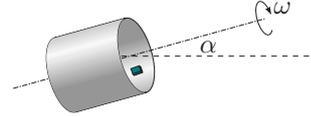
Para aclarar: en un marco de referencia que se mueve traslacionalmente, podemos restablecer las leyes de Newton imaginando que en cada cuerpo actúa adicionalmente una *fuerza inercial*  $-m\vec{a}$  donde  $\vec{a}$  es la aceleración del marco de referencia y  $m$  es la masa de un cuerpo dado. De hecho, hemos aprendido en cinemática que para el movimiento de traslación de un marco de referencia, se pueden sumar las aceleraciones, ver la idea C-19; así, en un marco móvil, todos los cuerpos obtienen una aceleración adicional  $-\vec{a}$ , como si hubiera una fuerza adicional  $\vec{F} = -m\vec{a}$  actuando sobre un cuerpo de masa  $m$ .

Tenga en cuenta que debido a la equivalencia de la masa inercial y gravitacional (ver “Gravedad”, en la sección 2.3) la fuerza inercial es totalmente análoga a la fuerza gravitacional<sup>23</sup>. Por eso, podemos usar:

<sup>23</sup>Su equivalencia es la piedra angular de la teoría de la relatividad general (más específicamente, asume que las fuerzas inerciales y gravitacionales son indistinguibles en cualquier medición local).

**Idea 8:** La red de las fuerzas inerciales y gravitacionales se puede usar como una fuerza gravitacional efectiva.

**Pr 6.** Un cilindro con radio  $R$  gira alrededor de su eje con una velocidad angular  $\omega$ . En su superficie interior hay un pequeño bloque; el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie interna del cilindro es  $\mu$ . Encuentre los valores de  $\omega$  para que el bloque no se deslice (permanezca inmóvil respecto al cilindro). Considere los casos en que (a) el eje del cilindro es horizontal; (b) el eje está inclinado en un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal.



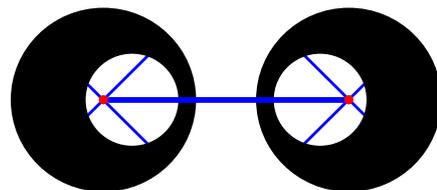
**Idea 9:** Se puede usar un marco de referencia giratorio agregando una fuerza centrífuga  $m\omega^2\vec{R}$  (con  $\omega$  siendo la velocidad angular del sistema de referencia y  $R$  siendo un vector dibujado desde el eje de rotación hasta el punto en cuestión) y la fuerza de Coriolis. Esta última no es importante (a) para un cuerpo parado o moviéndose en paralelo al eje de rotación en un marco de referencia giratorio (en este caso la fuerza de Coriolis es cero); (b) para la conservación de energía (en este caso, la fuerza de Coriolis es perpendicular a la velocidad y, por lo tanto, no cambia la energía).

**Advertencia:** En esta idea, el eje de rotación debe ser real, no instantáneo.

Las expresiones para la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis se derivan en el apéndice 4. Para el problema 6, recuerde también la idea C-2b y la idea 6; para la parte (b), use:

**Idea C-11:** En el caso de geometría tridimensional, considere secciones bidimensionales. Es especialmente bueno si todos los objetos interesantes (por ejemplo, vectores de fuerza) se encuentran en una sección. La orientación y la ubicación de las secciones pueden cambiar con el tiempo.

**Pr 7.** Un carro tiene dos ruedas cilíndricas conectadas por una barra horizontal sin peso que usa radios sin peso y un eje sin fricción, como se muestra en la figura. Cada una de las ruedas está hecha de un disco homogéneo de radio  $R$  y tiene un orificio cilíndrico de radio  $R/2$  perforado coaxialmente a la distancia  $R/3$  desde el centro de la rueda. Las ruedas se giran para que los orificios se apunten entre sí y el carro se ponga en movimiento sobre un suelo horizontal. ¿Cuál es la rapidez crítica  $v$  para la cual las ruedas comienzan a saltar?



Este problema es algo similar al anterior y podríamos resolverlo utilizando las ideas que ya hemos estudiado. De hecho, si consideramos el proceso en un sistema de referencia que se

mueve conjuntamente con el carrito, solo podemos aplicar la 2.ª ley de Newton a la aceleración centrípeta del centro de masa de la rueda. Sin embargo, vamos a resolverlo con algunas ideas más.

**Idea 10:** La fuerza de gravedad (o una fuerza ficticia que es proporcional a la masa de un cuerpo) puede considerarse que se aplica al centro de masa de un cuerpo *solo* en los siguientes casos:

- (a) el campo de gravedad efectivo es homogéneo;
- (b) el cuerpo tiene una distribución de masa esférica simétrica;
- (c) el campo de gravedad efectivo es proporcional al vector del radio, por ejemplo, el campo de fuerza centrífuga si el movimiento está restringido al plano perpendicular al eje de rotación del marco.

En todos los demás casos, puede suceder por coincidencia que la fuerza de gravedad todavía se aplique al centro de masa, pero típicamente no lo es. Por ejemplo, se puede considerar que la fuerza de Coriolis se aplica al centro de masa solo si el cuerpo no está girando (como se ve desde un sistema de referencia giratorio).

La parte (a) de esta idea ha sido justificada en el párrafo siguiendo la idea 9; las partes (b) y (c) estarán justificadas en la guía de electromagnetismo (los campos electrostático y gravitacionales no relativísticos obedecen leyes similares). Para probar que la parte (d) es válida, necesitamos demostrar que la fuerza total y el torque total ejercido por el gravitatorio tienen las mismas magnitudes que se obtendrían si el cuerpo fuera una masa puntual en la posición del centro de masa. Entonces, usando el centro de atracción (repulsión) como origen y asumiendo  $\vec{g} = k\vec{r}$ , expresemos el torque total como  $\vec{T} = \vec{r}_i \sum k m_i \vec{r}_i \times \vec{r}_i \equiv 0$ ; se obtendría el mismo resultado para un centro de masa, ya que la fuerza de gravedad tendría un brazo nulo. Además, expresemos la fuerza total como  $\vec{F} = \sum k m_i \vec{r}_i = kM(\sum m_i \vec{r}_i / M) = kM\vec{r}_{cm}$ ; aquí  $M = \sum m_i$  es la masa total del cuerpo.

Hay dos ideas más que pueden ser usadas aquí,

**Idea 11:** Para lograr una configuración más simétrica o para simplificar la situación de alguna otra manera, a veces es útil representar una región con valor cero de alguna cantidad como una superposición de dos regiones con signos opuestos de la misma cantidad.

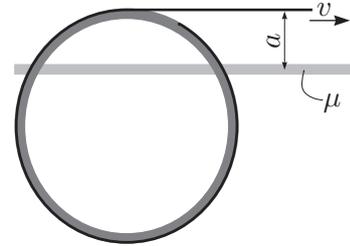
Esta cantidad puede ser densidad de masa (como en este caso), carga o densidad de corriente, algún campo de fuerza, etc. A menudo, este truco se puede combinar con

**Idea 12:** Haga que el problema sea lo más simétrico posible.

Se puede alcanzar este objetivo aplicando la idea 11, pero también utilizando marcos de referencia apropiados, dividiendo el proceso de resolución en varias fases (donde algunas fases usan geometría simétrica), etc.

**Pr 8.** Un cilindro hueco con masa  $m$  y radio  $R$  se encuentra en una superficie horizontal con su extremo plano y liso en contacto con la superficie en todas partes. Se ha enrollado un hilo a su alrededor y su extremo libre se tira con velocidad  $v$  en paralelo al hilo. Encuentre la velocidad del cilindro. Considere dos casos: (a) el coeficiente de fricción entre la superficie y el

cilindro es cero en todas partes, excepto en una banda recta delgada (mucho más delgada que el radio del cilindro) con un coeficiente de fricción de  $\mu$ , la banda es paralela al hilo y su distancia al hilo  $a < 2R$  (la figura muestra una vista de arriba hacia abajo); (b) el coeficiente de fricción es  $\mu$  en todas partes. *Sugerencia:* cualquier movimiento plano de un cuerpo rígido puede verse como una rotación alrededor de un centro de rotación instantáneo, es decir, el vector de velocidad de cualquier punto del cuerpo es el mismo que si el centro instantáneo fuera el eje real de rotación.



Este es un problema bastante difícil. Es útil tener en cuenta

**Idea 13:** Si un cuerpo tiene que moverse con una velocidad constante, entonces el problema es de estática.

También recuerde las ideas 1 y 2. Esta última puede ser reemplazado con su consecuencia,

**Idea 14:** Si un cuerpo en equilibrio es accionado por tres fuerzas en tres puntos separados, sus líneas de acción se intersecan en un punto (tenga en cuenta que el punto de intersección puede ser infinitamente lejano, las líneas que se intersecan en el infinito significa que las líneas son paralelas entre sí). Si solo hay dos puntos de acción, entonces las líneas correspondientes coinciden.

Esta idea muy útil se deduce directamente de la condición de equilibrio de torques si el punto de intersección de dos líneas de acción se toma para el punto de pivote (con dos brazos y el torque total igual a cero, el tercer brazo debe ser igual a cero).

Otro dato útil es:

**Hecho 21:** La fuerza de fricción que actúa sobre un punto dado es siempre antiparalela a la velocidad del punto en el marco de referencia del cuerpo que causa la fricción.

De vez en cuando también son útiles algunos trucos matemáticos; aquí es la propiedad de los ángulos inscritos y más específicamente el caso particular del teorema de Thales (entre los teoremas geométricos, este es probablemente el más útil para resolver problemas de física),

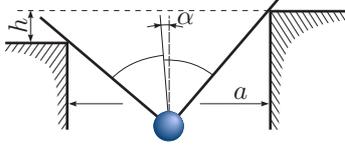
**Hecho 22:** Un ángulo recto está subtendido por un semicírculo (en general: un ángulo inscrito en radianes es igual a la mitad de la razón entre su longitud de arco y su radio).

La propiedad de los ángulos inscritos también es útil en el siguiente problema, si agregamos (algo trivial)

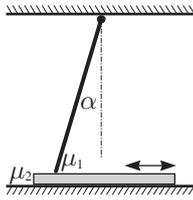
**Idea 15:** En equilibrio estable, la energía potencial de un cuerpo es mínima.

**Pr 9.** Un cable liviano se dobla en un ángulo recto y una bola pesada se une a la curva. El cable se coloca en soportes con diferencia de altura  $h$  y distancia horizontal  $a$ . Encuentre la

posición del alambre en su equilibrio. Expresar la posición como el ángulo entre la bisectriz del ángulo recto y la vertical. Ignore cualquier fricción entre el cable y los soportes; los soportes tienen pequeñas ranuras que mantienen todo el movimiento en el plano del cable y la figura.



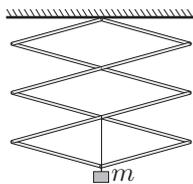
**Pr 10.** Una varilla con una longitud de  $l$  se articula a un techo con una altura de  $h < l$ . Debajo, una tabla se está arrastrando en el suelo. La varilla está diseñada para bloquear el movimiento del tablero en una dirección mientras permite que se mueva en la dirección opuesta. ¿Qué condición se debe cumplir para que haga este trabajo? El coeficiente de fricción es  $\mu_1$  entre la tabla y la barra y  $\mu_2$  entre la tabla y el suelo.



Recordemos el hecho 6: si el deslizamiento relativo entre dos cuerpos tiene una dirección conocida, la dirección de la suma de los vectores de fricción y fuerza de reacción siempre está determinada únicamente por el coeficiente de fricción. Si una fuerza hace que uno de los cuerpos se mueva de tal manera que la fuerza de reacción crezca, entonces se atascarán: cuanto mayor sea la fuerza con la que intentamos arrastrar los cuerpos, mayor será la fricción y las fuerzas de reacción que los restringirán.

**Idea 16:** La fricción puede bloquear el movimiento. En tal caso, todas las fuerzas se vuelven insignificantes, excepto la fuerza de fricción, la fuerza de reacción y la fuerza aplicada externamente que trata de hacer que el sistema se mueva, porque las fuerzas gravitacionales (y tales) son fijas, pero dichas fuerzas se vuelven cuanto más grandes cuanto más empujamos o tiramos.

**Pr 11.** Cuatro varillas largas y cuatro la mitad de largas se articulan entre sí formando tres rombos idénticos. Un extremo del artillugio está articulado a un techo, el otro está sujeto a un peso de masa  $m$ . La bisagra al lado del peso está conectada a la bisagra arriba por una cuerda. Encuentre la fuerza de tensión en la cuerda.



Este problema es el más fácil de resolver usando *el método del desplazamiento virtual*.

**Método 1:** Imagine que somos capaces de cambiar la longitud de la cuerda o barra en la que se busca la tensión por una cantidad infinitesimal  $\Delta x$ . Equiparando el trabajo  $T\Delta x$  por el

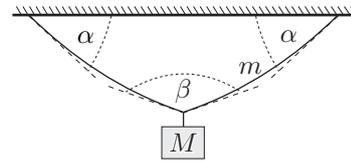
cambio  $\Delta\Pi$  de la energía potencial, obtenemos  $T = \Delta\Pi/\Delta x$ .

*Generalización:* si algunas fuerzas externas adicionales  $\vec{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) actúan sobre el sistema con los desplazamientos de sus siendo los puntos de acción  $\delta\vec{x}_i$ , mientras que la interesante cuerda o varilla sufre un alargamiento virtual de  $\Delta x$ , entonces

$$T = \left( \Delta\Pi - \sum_i \delta\vec{x}_i \cdot \vec{F}_i \right) / \Delta x.$$

El método también se puede usar para encontrar otras fuerzas además de la tensión (por ejemplo, en problemas con poleas): al cambiar imaginariamente el punto de acción de la fuerza desconocida, se puede encontrar la proyección de esta fuerza en la dirección del desplazamiento virtual.

**Pr 12.** Una cuerda con masa  $m$  se cuelga del techo por sus dos extremos y un peso con masa  $M$  está unido a su centro. La tangente a la cuerda en ambos extremos forma un ángulo  $\alpha$  con el techo. ¿Cuál es el ángulo  $\beta$  entre las tangentes a la cuerda en el peso?



Recordemos el hecho 14: la tensión en una cuerda que cuelga libremente se dirige a lo largo de la tangente a la cuerda. Además, podemos emplear:

**Idea 17:** Para colgar cuerdas, membranas, etc., es útil considerar una pieza de cuerda por separado y pensar en las componentes de las fuerzas de balance actuando en esta.

De hecho, aquí no necesitamos la idea como un todo, sino, más bien, su consecuencia,

**Hecho 23:** La componente horizontal de la tensión en una cuerda masiva es constante.

Usando la idea 17 y el hecho 23, es relativamente fácil demostrar que la siguiente aproximación es válida.

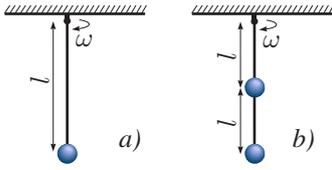
**Idea 18:** Si el peso de una parte colgante de una cuerda es mucho menor que su tensión, entonces la curvatura de la cuerda es pequeña y su distribución de masa horizontal puede considerarse con bastante precisión como constante.

Esto nos permite escribir la condición del equilibrio de torque para la porción colgante de la cuerda (como sabemos la coordenada horizontal de su centro de masa). El siguiente problema ilustra ese enfoque.

**Pr 13.** Un niño arrastra una cuerda con longitud  $L = 50$  m a lo largo de un terreno horizontal con un coeficiente de fricción de  $\mu = 0,6$ , sosteniendo un extremo de la cuerda en altura  $H = 1$  m desde el suelo. ¿Cuál es la longitud  $l$  de la parte de la cuerda que no toca el suelo?

**Pr 14.** Una barra ligera con longitud  $l$  está articulada de tal manera que la bisagra se pliega solo en un plano. La bisagra se gira con velocidad angular  $\omega$  alrededor de un eje vertical. Una pequeña pelota se fija al otro extremo de la barra. (a) Encuentre las velocidades angulares para las cuales la orientación vertical es estable. (b) La pelota ahora está unida a otra bisagra

y, a su vez, a otra barra idéntica (ver la figura a continuación); la bisagra superior se gira de la misma manera. ¿Cuál es ahora la condición de estabilidad para la orientación vertical?



Aquí se debe utilizar la siguiente idea.

**Idea 19:** Para analizar la estabilidad de un equilibrio, hay dos opciones.

*Primero*, supongamos que el sistema se desvía un poco del equilibrio, ya sea por un pequeño desplazamiento  $\Delta x$  o por un pequeño ángulo  $\Delta\varphi$  y encuentre la dirección de la fuerza o torque que aparece, ya sea hacia el equilibrio o alejándose de él.

*Segundo*, exprese el cambio de energía potencial total en términos del pequeño desplazamiento para ver si tiene un mínimo o un máximo (para un sistema en equilibrio, su energía potencial debe tener un extremo); el mínimo corresponde a la estabilidad y el máximo a la inestabilidad (para una motivación y generalización de este método, vea el apéndice 5).

¡Nótese bien! calcule aproximados: cuando se trabaja con fuerzas (torques), casi siempre es suficiente mantener solo aquellos términos que son lineales en la desviación; cuando se trabaja con energía potencial, se debe utilizar la aproximación cuadrática.

Es extremadamente importante en la física poder aplicar aproximaciones lineales, cuadráticas y, a veces, de orden superior, que se basan en:

**Idea 20:** Las series de Taylor:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta x^2}{2} + \dots,$$

por ejemplo:  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ ;  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ;  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ,  $(1 + x)^a \approx 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2$ ,  $\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ . Se puede usar un enfoque análogo para expresiones multivariantes, por ejemplo,  $(x + \Delta x)(y + \Delta y) \approx xy + x\Delta y + y\Delta x$ . Considere usar tales aproximaciones donde los datos iniciales sugieren que algún parámetro sea pequeño.

El caso (b) es sustancialmente más difícil ya que el sistema tiene dos grados de libertad (por ejemplo, los ángulos de desviación  $\Delta\varphi_1$  y  $\Delta\varphi_2$  de las barras). Aunque idea 19 se puede generalizar a más de un grado de libertad, aparentemente es más fácil comenzar desde la idea 15.

**Idea 21:** El equilibrio  $x = y = 0$  de un sistema con dos grados de libertad es estable si (y solo si<sup>24</sup>) la energía potencial  $\Pi(x, y)$  como una función de dos variables tiene un mínimo local en  $x = y = 0$ , es decir, para cualquier par de valores  $x, y$  dentro de la vecindad del punto de equilibrio  $(0, 0)$ , la desigualdad  $\Pi(x, y) > \Pi(0, 0)$  debe aplicar.

**Pr 15.** Si se coloca en el agua una viga con una sección transversal cuadrada y una densidad muy baja, girará horizontalmente un par de sus caras opuestas largas. Esta orientación, sin embargo, se vuelve inestable a medida que aumentamos

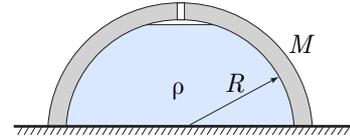
su densidad. Encuentre la densidad crítica cuando ocurre esta transición. La densidad del agua es  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

**Idea 22:** El torque que actúa sobre un cuerpo colocado en un líquido es igual al torque de flotabilidad, si tomamos esta última fuerza para actuar sobre el centro de la masa del líquido desplazado.

La validez de la idea 22 se puede ver si imaginamos que el volumen desplazado, de nuevo, se llena con el líquido y se elimina el propio cuerpo. Luego, por supuesto, el volumen relleno se encuentra en equilibrio (ya que forma parte del líquido en reposo). Esto significa que el par de torsión de la fuerza de flotación debe equilibrar el par debido al peso del volumen relleno; el peso del volumen relleno se aplica a su centro de masa y de acuerdo con la idea 14, por lo tanto, la fuerza de flotación también debe actuar a lo largo de la línea trazada a través del centro de masa.

Aparte de la idea 22, la solución del problema 15 se puede simplificar utilizando las ideas 11 y 12.

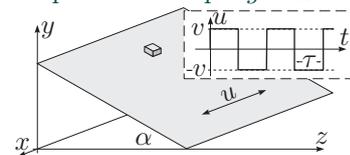
**Pr 16.** Un contenedor semiesférico se coloca boca abajo sobre una superficie horizontal lisa. A través de un pequeño agujero en la parte inferior del recipiente, se vierte agua. Exactamente cuando el recipiente se llena, el agua comienza a gotear entre la mesa y el borde del recipiente. Encuentre la masa del contenedor si el agua tiene densidad  $\rho$  y el radio del hemisferio es  $R$ .



**Idea 23:** Si el agua comienza a salir de debajo de un recipiente invertido, la fuerza normal debe haberse desvanecido entre la mesa y el borde del recipiente. Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre el contenedor del sistema + el líquido de la mesa es igual únicamente a la fuerza de la presión hidrostática.

Este último está dado por  $PA$ , donde  $P$  es la presión del líquido cerca de la mesa y  $A$  es el área del lado abierto del contenedor.

**Pr 17.** Un bloque está ubicado en una pendiente con un ángulo  $\alpha$ , el coeficiente de fricción entre ellos es  $\mu > \tan \alpha$ . La pendiente se desplaza rápidamente hacia adelante y hacia atrás de manera tal que su vector de velocidad  $\vec{u}$  es paralelo tanto a la pendiente como a la horizontal y tiene módulo constante  $v$ ; la dirección de  $\vec{u}$  se revierte abruptamente después de cada intervalo de tiempo  $\tau$ . ¿Cuál será la velocidad media  $w$  del movimiento del bloque? Asuma que  $g\tau \ll v$ .



**Idea 24:** Si el sistema cambia a alta frecuencia, a menudo es práctico utilizar valores promediados en el tiempo  $\langle X \rangle$  en lugar de cálculos detallados. En situaciones más complicadas un

<sup>24</sup>Suponemos que, aparte de la energía, no hay otras cantidades que se conserven para este sistema.

componente de alta frecuencia  $\tilde{X}$  podría tener que ser incluido (para que  $X = \langle X \rangle + \tilde{X}$ ).

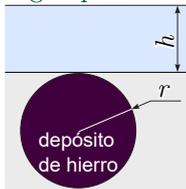
**Método 2:** (*Método de las perturbaciones*). Si se puede suponer que el impacto de alguna fuerza en el movimiento de un cuerpo es pequeño, entonces resuelva el problema en dos (o más) fases: primero encuentre el movimiento del cuerpo en ausencia de esa fuerza (la llamada aproximación cero); luego pretenda que el cuerpo se está moviendo tal como se encuentra en la primera fase, pero existe una pequeña fuerza que actúa sobre él. Mire qué corrección (la llamada primera corrección) se debe hacer a la aproximación cero debido a esa fuerza.

En este caso particular, la elección de la aproximación cero necesita alguna explicación. La condición  $g\tau \ll v$  implica que dentro de un período, la velocidad del bloque no puede cambiar mucho. Por lo tanto, si el bloque inicialmente se está deslizando hacia abajo a cierta velocidad  $w$  e investigamos un intervalo de tiempo suficientemente corto, entonces podemos tomar la velocidad del bloque como constante en la aproximación cero, de modo que se mueva en línea recta. Luego podemos pasar a la fase dos y encontrar el valor promedio de la fuerza de fricción, en función del movimiento obtenido en la fase uno.

Para el problema 17, recuerde también una lección de cinemática,

**Idea C-7** Si la fricción afecta el movimiento, generalmente el sistema de referencia más apropiado es el del entorno que causa la fricción.

**Pr 18.** Investiguemos hasta qué punto un depósito de hierro puede influir en el nivel del agua. Considere un depósito de hierro en el fondo del océano a una profundidad de  $h = 2$  km. Para simplificar nuestro análisis, asumamos que es un volumen esférico con radio 1 km con mayor densidad que la roca circundante por  $\Delta\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>. Supongamos que esta esfera toca el fondo del océano con su parte superior, es decir, que su centro está situado en profundidad  $r + h$ . ¿En qué medida el nivel de agua directamente por encima del depósito de hierro es diferente del nivel de agua promedio?

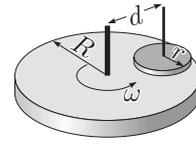


**Idea 25:** La superficie de un líquido en equilibrio adopta una forma equipotencial, es decir, las energías de sus partículas constituyentes son las mismas en cada punto de la superficie.

Si este no fuera el caso, la energía potencial del líquido podría disminuir al permitir que algunas partículas en la superficie fluyan a lo largo de la superficie hacia donde su energía potencial es menor (ver idea 15). Recordemos también el hecho 10.

**Pr 19.** Una plataforma horizontal gira alrededor de un eje vertical a velocidad angular  $\omega$ . Un disco con radio  $r$  puede girar y moverse libremente hacia arriba y hacia abajo sin fricción a lo largo de un eje vertical que está fijo a una distancia  $d > r$  del eje de la plataforma. El disco se presiona contra la plataforma

giratoria debido a la gravedad, el coeficiente de fricción entre ellos es  $\mu$ . Encuentre la velocidad angular adquirida por el disco. Suponga que la presión se distribuye de manera uniforme sobre toda la base del disco.



**Idea 26:** Si observamos desde un marco de referencia giratorio, entonces podemos agregar velocidades angulares sobre ejes de rotación instantáneos de la misma manera que usualmente sumamos velocidades.

Así  $\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ , donde  $\vec{\omega}_1$  es la velocidad angular del marco de referencia,  $\vec{\omega}_2$  es velocidad angular del cuerpo en el marco giratorio de referencia y  $\vec{\omega}_3$  es en el sistema de referencia estacionario. En esta pregunta, podemos usar el hecho 21, las ideas 2, 9, 13, C-7 y también:

**Idea C-33** El movimiento arbitrario de un cuerpo rígido puede considerarse como una rotación alrededor de un centro de rotación instantáneo (en términos de vectores de velocidad del cuerpo).

**Método 3:** (Cálculo diferencial). Divida el objeto en partes infinitesimalmente pequeñas o el proceso en períodos infinitesimalmente cortos (si es necesario, combine esto con la idea 20).

Dentro de una parte infinitesimal (período), las cantidades que cambian en el espacio (tiempo) pueden tomarse constantes (en nuestro caso, esa cantidad es la dirección del vector de fuerza de fricción). Si es necesario (vea la siguiente pregunta), estas cantidades pueden sumarse en todas las partes, lo que se denomina integración.

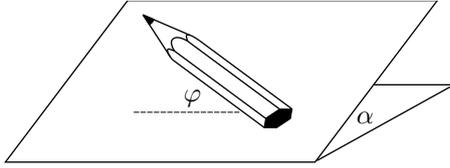
**Pr 20.** Una máquina enceradora consiste en un disco pesado con una masa  $M$  cubierta densamente con cerdas cortas en un lado, de modo que si se encuentra en el piso, su peso se distribuye uniformemente sobre un área circular con un radio de  $R$ . Un motor eléctrico hace girar el disco a velocidad angular  $\omega$ , el usuario compensa el torque de las fuerzas de fricción con un mango largo. El mismo mango se puede usar para empujar la máquina hacia adelante y hacia atrás a lo largo del piso. ¿Con qué fuerza debe empujarse la máquina para que se mueva a la velocidad  $v$ ? Supongamos que la velocidad angular del disco es grande,  $\omega R \gg v$  y que la fuerza necesaria para compensar el torque puede ser despreciada. El coeficiente de fricción entre las cerdas y el suelo es  $\mu$ .

Aquí necesitamos el hecho 21, las ideas C-33, 11 y además:

**Idea 27:** Intente determinar la región del espacio donde las fuerzas (o torques, etc.) se cancelan en pares de puntos.

Estos pares de puntos a menudo están localizados simétricamente. La idea 12 también es relevante.

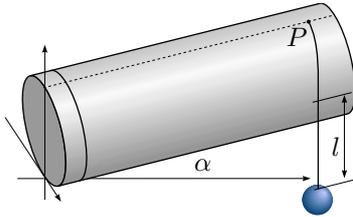
**Pr 21.** Un lápiz hexagonal se encuentra en una pendiente con un ángulo de inclinación  $\alpha$ ; el ángulo entre el eje del lápiz y la línea de intersección de la pendiente y la horizontal es  $\varphi$ . ¿Bajo qué condición el lápiz no rodará?



**Idea 28:** Al resolver problemas tridimensionales, a veces puede ser útil calcular las coordenadas en los ejes elegidos de manera apropiada y aplicar fórmulas de rotaciones espaciales. Para la rotación alrededor del eje  $z$  por un ángulo  $\varphi$ ,  $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$  y  $y' = y \cos \varphi + x \sin \varphi$ .

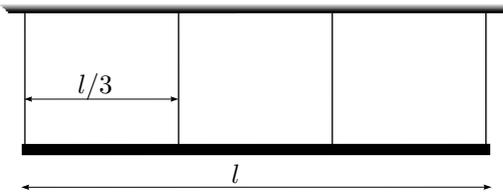
¿Qué (qué vector) podría expresarse en términos de sus componentes en nuestro caso? La única opción prometedora es el pequeño vector de cambio del centro de masa cuando comienza a moverse; en última instancia solo nos interesa su componente vertical.

**Pr 22.** Un cilindro resbaladizo con radio  $R$  se ha inclinado para hacer un ángulo  $\alpha$  entre su eje y la horizontal. Una cadena con una longitud de  $L$  ha sido unida al punto más alto  $P$  de alguna sección transversal del cilindro, el otro extremo está atado a un peso con una masa de  $m$ . La cuerda toma su posición de equilibrio, ¿qué tan larga ( $l$ ) es la parte que no toca el cilindro? El peso se desplaza desde su posición de equilibrio de tal manera que el vector de desplazamiento es paralelo al plano vertical, incluido el eje del cilindro; ¿cuál es el período de pequeñas oscilaciones?



**Idea 29:** Desplegar una parte de la superficie de un objeto tridimensional y observar la superficie aplanada puede ayudar a resolver problemas, entre otras cosas, ayuda a encontrar distancias más cortas.

**Pr 23.** Una barra uniforme con masa  $m$  y longitud  $l$  cuelga de cuatro cables ligeros idénticos. Los cables se han unido a la barra a distancias  $\frac{l}{3}$  entre sí y son verticales, mientras que la barra es horizontal. Inicialmente, las tensiones son las mismas en todos los cables,  $T_0 = mg/4$ . Encuentre tensiones después de que se haya cortado uno de los cables más externos.



**Idea 30:** Si se han utilizado más elementos de fijación (varillas, cuerdas, etc.) que el mínimo necesario para mantener un cuerpo en equilibrio estático (es decir, más que el número de grados de libertad) y los elementos de fijación son absolutamente rígidos, entonces no se pueden determinar las tensiones en

los elementos. Para hacerlo posible, los elementos deben considerarse elásticos (capaces de deformarse); recuerde el hecho 13.

Notemos que esta declaración está de acuerdo con el hecho 18 que da el número de ecuaciones disponibles (no puede haber más incógnitas que ecuaciones). En este caso particular, estamos tratando efectivamente con una geometría unidimensional sin fuerzas horizontales, pero el cuerpo podría girar (en ausencia de los cables). Así tenemos dos grados de libertad, correspondientes al movimiento vertical y rotacional. Como los cables son idénticos, también deben tener la misma rigidez; la palabra “cable” indica una gran rigidez, es decir, las deformaciones (y el ángulo de inclinación de la barra) son pequeñas.

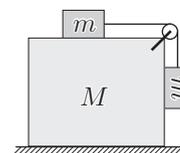
## 4. DINÁMICA

Una gran parte de los problemas dinámicos consisten en encontrar la aceleración de algún sistema de cuerpos o encontrar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos. Hay varios enfoques posibles para resolver tales problemas, aquí consideramos tres de ellos.

**Método 4:** Para cada cuerpo, encontramos todas las fuerzas que actúan sobre él, incluidas las fuerzas normales y las fuerzas de fricción<sup>25</sup> y escribir la 2.ª ley de Newton en términos de componentes (es decir, proyectando la ecuación en los ejes  $x$ ,  $y$  y posiblemente  $z$ ). ¡Nótese bien! Seleccione las direcciones de los ejes con cuidado, consulte la idea 1. En algunos casos, puede ser posible (y más conveniente) abstenerse de usar proyecciones y trabajar con igualdad vectorial.

Tenga en cuenta que, para un problema planteado correctamente, debería ser posible escribir tantas ecuaciones linealmente independientes como incógnitas (siguiendo la idea 1 puede ayudar a reducir ese número). La guía para determinar cuántas ecuaciones se pueden encontrar sigue siendo la misma que en el caso del problema estático, vea la idea 18 (por el momento consideramos problemas en los que los cuerpos no giran, por lo que necesitamos contar solo los grados de libertad de traslación). Si el número de ecuaciones y el número de incógnitas no coinciden, es un problema mal planteado o necesita hacer suposiciones físicas adicionales (como en el caso del problema 23).

**Pr 24.** Un bloque con masa  $M$  se encuentra en una superficie horizontal resbaladiza. Además, hay otro bloque con masa  $m$  que, a su vez, está unido a un bloque idéntico por una cadena. La cuerda se ha tirado a través de una polea situada en la esquina del bloque grande y el segundo bloque pequeño cuelga verticalmente. Inicialmente, el sistema se mantiene en reposo. Encuentre la aceleración del bloque grande inmediatamente después del lanzamiento del sistema. Puede despreciar la fricción, así como las masas de la cuerda y la polea.



<sup>25</sup>Es conveniente hacer un boceto y dibujar todos los vectores de fuerza desde sus puntos de aplicación.

Esta pregunta se puede resolver exitosamente usando el método 4, pero necesitamos tres ideas más.

**Idea 31:** Si un cuerpo está inicialmente en reposo, entonces su vector de desplazamiento es paralelo a la fuerza que actúa sobre él (y su aceleración) justo después del inicio de su movimiento.

**Idea 32:** Si los cuerpos están conectados por una cuerda o una varilla o tal vez una polea o una está soportada por la otra, entonces hay una relación aritmética lineal<sup>26</sup> entre los cambios de los cuerpos (y las velocidades, las aceleraciones) que describen el hecho de que la longitud de la cuerda (varilla, etc.) es constante.

La relación de desplazamientos suele ser la más fácil de encontrar; si el movimiento es a lo largo de una línea recta, esta relación se puede diferenciar una o dos veces con respecto al tiempo, para obtener la relación para velocidades o aceleraciones. Para el movimiento curvo hay que tener cuidado. En el caso de las velocidades y para cuerpos rígidos, damos como resultado la idea C-35 (para dos puntos de un cuerpo rígido, las proyecciones de velocidades de ambos puntos en la línea que los conecta son iguales). En el caso de las aceleraciones, la situación es más complicada, ya que también habrá aceleraciones centrípetas. Sin embargo, si el movimiento comienza desde el reposo, durante un período de tiempo muy corto  $t$  podemos asumir que la aceleración es constante y que la aceleración centrípeta  $v^2/r$  es insignificante (la velocidad  $v$  es todavía muy pequeña), por lo tanto, existe una relación lineal simple  $\vec{s} = \frac{t^2}{2}\vec{a}$  entre el desplazamiento  $\vec{s}$  y la aceleración  $\vec{a}$  de un cierto punto de un determinado cuerpo; entonces el factor  $\frac{t^2}{2}$  se cancela de la relación lineal para los desplazamientos, de modo que se transfiere directamente a las aceleraciones.

**Idea 33:** Si se lanza una cuerda liviana sobre una polea ideal (ambas con una masa despreciable), la tensión en la cuerda tiene la misma magnitud a cada lado de la polea; si la cuerda se dobla en la polea, hay una fuerza normal entre la polea y la cuerda que se puede encontrar como la suma vectorial de las fuerzas de tensión.

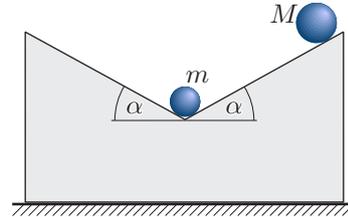
De hecho, considere esa pieza de cuerda que está en contacto con la polea; su masa puede ser despreciada, de ahí el término inercial en la 2.ª ley de Newton también se puede despreciar, por lo tanto, la fuerza normal que actúa sobre la cuerda debe ser igual y opuesta a la suma vectorial de las fuerzas de tensión.

**Método 5:** De lo contrario, es lo mismo que el método 4, pero el movimiento se investiga en un marco de referencia no inercial (ver idea 7) donde uno de los cuerpos está en reposo.

El método 5 es útil en muchas preguntas relacionadas con las cuñas: es difícil escribir la condición para que un objeto permanezca en la cuña en el marco del laboratorio. La aplicación de idea 32 también suele ser más fácil en el marco de referencia de la cuña que en el marco de laboratorio. No olvide que el cuerpo que define el marco de referencia está en reposo: *tenemos una o más ecuaciones que expresan su equilibrio estático.*

<sup>26</sup>Es lineal en los cambios, pero puede contener coeficientes que se expresan en términos de funciones no lineales, por ejemplo, funciones trigonométricas de los ángulos.

**Pr 25.** Se ha hecho una cuña de un material muy ligero y resbaladizo. Su superficie superior consiste en dos pendientes que forman un ángulo  $\alpha$  con la horizontal e inclinada una hacia la otra. El bloque está situado en un plano horizontal; una pelota con masa  $m$  se encuentra en el fondo del agujero en su superficie superior. Otra pelota con masa  $M$  se coloca más alta que la primera bola y se lanza el sistema. ¿En qué condiciones la bola pequeña con masa  $m$  comenzará a deslizarse hacia arriba a lo largo de la pendiente? La fricción puede ser despreciada.



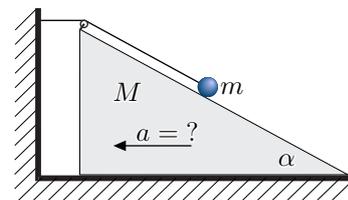
El método final se basa en utilizar *coordenadas generalizadas* y se origina a partir de la mecánica analítica. Allí, se le conoce como *formalismo lagrangiano* y se introduce utilizando un aparato matemático relativamente avanzado (derivadas parciales, análisis variacional), pero para la mayoría de los problemas, su versión simplificada que se describe a continuación será suficiente. En el apéndice 6 se proporciona una discusión más detallada del formalismo lagrangiano.

**Método 6:** Llamemos a  $\xi$  una coordenada general si este número único puede describir el estado completo de un sistema. Digamos que necesitamos encontrar la aceleración  $\ddot{\xi}$  de la coordenada  $\xi$ . Si podemos expresar la energía potencial  $\Pi$  del sistema como una función  $\Pi(\xi)$  de  $\xi$  y la energía cinética en la forma  $K = \mathcal{M}\dot{\xi}^2/2$  donde el coeficiente  $\mathcal{M}$  es una combinación de masas de los cuerpos (y tal vez de momentos de inercia), entonces

$$\ddot{\xi} = -\Pi'(\xi)/\mathcal{M}.$$

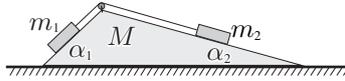
Aquí, un punto denota la diferenciación con respecto al tiempo y la prima con respecto a la coordenada  $\xi$ . De hecho, debido a la conservación de la energía  $\Pi(\xi) + \mathcal{M}\dot{\xi}^2/2 = \text{const.}$  Diferenciando eso con respecto al tiempo y utilizando la regla de la cadena, obtenemos  $\Pi'(\xi)\dot{\xi} + \mathcal{M}\dot{\xi}\ddot{\xi} = 0$ . Llegamos a la fórmula antes mencionada después de dividir por  $\dot{\xi}$ .

**Pr 26.** Un bloque pequeño con masa  $m$  se encuentra en una cuña con ángulo  $\alpha$  y masa  $M$ . El bloque está unido a una cuerda tirada sobre una polea unida a la punta de la cuña y fijada a una pared horizontal (ver la figura). Encuentre la aceleración de la cuña. Todas las superficies son resbaladizas (no hay fricción).



La solución completa de este problema se encuentra en la sección de sugerencias para ilustrar el método 6.

**Pr 27.** Una cuña con masa  $M$  y ángulos agudos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se encuentra en una superficie horizontal. Se ha dibujado una cuerda a través de una polea situada en la parte superior de la cuña, sus extremos están atados a bloques con masas de  $m_1$  y  $m_2$ . ¿Cuál será la aceleración de la cuña? No hay fricción en ninguna parte.



Puede parecer que hay más de un grado de libertad en esta pregunta: la cuña puede moverse y la cuerda puede moverse con respecto a la cuña. Sin embargo, somos salvados por

**Idea 34:** Si las componentes en  $x$  de la suma de las fuerzas externas y del centro de la velocidad de la masa son ambos cero, entonces la coordenada  $x$  del centro de la masa permanece constante.

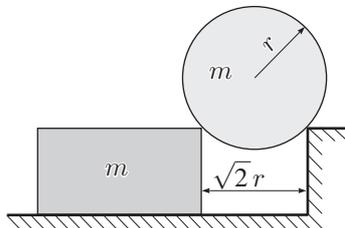
Podemos usar esta circunstancia para reducir el número efectivo de grados de libertad. En nuestro caso particular, el sistema consta de dos componentes y, por lo tanto, el cambio de componente se puede expresar con el del otro.

**Idea 35:** La coordenada  $x$  del centro de masa de un sistema de cuerpos es

$$X_{cm} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i},$$

donde  $m_i$  denota la masa del  $i$ -ésimo componente y  $x_i$  la coordenada de su centro de masa. La fórmula puede ser reescrita en forma integral,  $X_{cm} = \int x dm / \int dm$ , donde  $dm = \rho(x, y, z) dV$  es el diferencial de masa.

**Pr 28.** Dos superficies horizontales resbaladizas forman un escalón. Un bloque con la misma altura que el escalón se empuja cerca del escalón y un cilindro con un radio de  $r$  se coloca en el hueco. Tanto el cilindro como el bloque tienen masa  $m$ . Encuentre la fuerza normal  $N$  entre el cilindro y el escalón en el momento en que la distancia entre el bloque y el escalón sea  $\sqrt{2}r$ . Inicialmente, el bloque y el escalón estaban muy juntos y todos los cuerpos estaban en reposo. La fricción es cero en todas partes. ¿Se separará primero el cilindro del bloque o del escalón?



Es fácil terminar con expresiones muy complicadas al resolver este problema, esto puede llevar a errores. Por lo tanto, es aconsejable planificar la solución cuidadosamente antes de anotar cualquier ecuación.

**Idea 36:** Las leyes de Newton se usan principalmente para encontrar la aceleración de la fuerza, pero a veces es inteligente encontrar la fuerza de la aceleración.

Pero, ¿cómo encontrar aceleración(es) en ese caso? Es totalmente posible si usamos el método 6, pero esta ruta conduce a expresiones largas. Una sugerencia táctica: si ve que la solución

se está complicando técnicamente, tómese un descanso y piense si hay una manera más fácil. Hay una “coincidencia” en este problema particular: las líneas rectas dibujadas desde el centro de la esfera hasta los puntos de contacto son perpendiculares; ¿puede esto quizás ayudar? Resulta que lo hace.

**Idea 37:** ¡Preste atención a los casos especiales y utilice las simplificaciones que dan lugar a!

Recordemos lo que aprendimos en cinemática:

**Idea C-34** En caso de movimiento a lo largo de una curva, la componente radial (perpendicular a la trayectoria) de la aceleración de un punto  $v^2/R$  se determina por la velocidad  $v$  y el radio de curvatura  $R$ ; el componente a lo largo de la trayectoria es la aceleración lineal (igual a  $\varepsilon R$  en caso de movimiento de rotación,  $\varepsilon$  es aceleración angular).

El centro de masa del cilindro experimenta un movimiento de rotación, el método 6 es necesario para encontrar la aceleración angular, pero esperamos abstenernos de usarlo. Una mejora en idea 1 nos ayuda a:

**Idea 38:** Projete la 2.<sup>a</sup> ley de Newton en el eje perpendicular a un vector no deseado, por ejemplo una fuerza desconocida o la componente tangencial de la aceleración.

Podemos encontrar fácilmente la velocidad del cilindro (y por lo tanto el componente radial de la aceleración) si usamos:

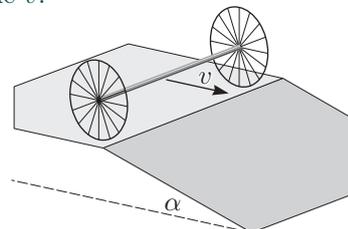
**Idea 39:** Si se conserva la energía (o su cambio se puede calcular a partir del trabajo realizado, etc.), escríbalo inmediatamente. La energía se conserva si no hay disipación (fricción, colisiones inelásticas, etc.) y las fuerzas externas que actúan sobre el sistema son estáticas (por ejemplo, un plano inclinado estacionario);

las fuerzas que cambian en el tiempo (la fuerza que actúa sobre un punto en movimiento, un plano inclinado en movimiento) también cambia la energía. La idea 32 ayuda a escribir la conservación de la energía (relación entre las velocidades de los cuerpos!). Para responder a la segunda pregunta, necesitamos:

**Idea 40:** La fuerza normal desaparece en el momento en que un cuerpo se separa de una superficie.

También, revise la idea 32 para componentes horizontales de aceleraciones.

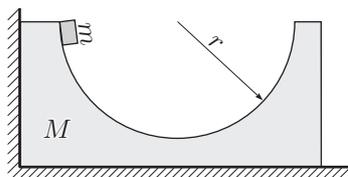
**Pr 29.** Las ruedas ligeras con un radio de  $R$  están unidas a un eje pesado. El sistema rueda a lo largo de una superficie horizontal que repentinamente se convierte en una pendiente con un ángulo  $\alpha$ . ¿Para qué ángulos  $\alpha$  se moverán las ruedas sin levantarse, es decir, tocar la superficie en todo momento? La masa de las ruedas puede ser despreciada. El eje es paralelo al límite entre las superficies horizontales e inclinadas y tiene una velocidad de  $v$ .



**Idea 41:** Para responder a la pregunta de si un cuerpo se levanta, debemos encontrar el punto en la trayectoria de no levantamiento con la fuerza normal más pequeña.

Si la fuerza normal tiene que ser negativa en ese punto, entonces el cuerpo se levanta; el valor crítico es cero, compare con idea 40. Además, revise las ideas 1, 39 y C-29.

**Pr 30.** Un bloque con una masa  $M$  descansa sobre una superficie horizontal resbaladiza y también toca una pared vertical. En la superficie superior del bloque, hay una cavidad con forma de medio cilindro con radio  $r$ . Se libera una pequeña bolita con masa  $m$  en el borde superior de la cavidad, en el lado más cercano a la pared. ¿Cuál es la velocidad máxima del bloque durante su movimiento posterior? La fricción puede ser despreciada.



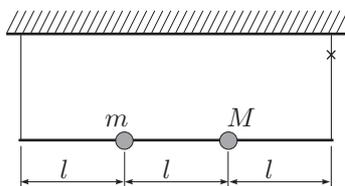
**Idea 42:** Una ley de conservación sólo puede mantenerse durante un período de tiempo.

**Idea 43:** El momento se conserva si la suma de fuerzas externas es cero; a veces el momento se conserva solo a lo largo de un eje.

También se necesitará de la idea 39.

**Idea 44:** La velocidad es máxima (o mínima) cuando la aceleración (y la fuerza neta) es cero (ya que  $0 = \frac{dv}{dt} = a$ ); el desplazamiento es extremo cuando la velocidad es cero. Otros pares posibles: carga eléctrica (voltaje del capacitor) - corriente, corriente - fem inducida, etc.

**Pr 31.** Una barra ligera con una longitud de  $3l$  se sujeta al techo mediante dos cuerdas con longitudes iguales. Dos pelotas con masas  $m$  y  $M$  se fijan a la barra, la distancia entre ellas y sus distancias desde los extremos de la barra son todas iguales a  $l$ . Encuentre la tensión en la segunda cuerda justo después de que se haya cortado la primera.



Existen varias buenas soluciones para este problema, todas las cuales comparten aplicar la idea 36 y la necesidad de encontrar la aceleración angular de la barra. En primer lugar, la aceleración angular de la barra se puede encontrar en el método 6 al elegir el ángulo de rotación  $\varphi$  como la coordenada generalizada. En segundo lugar, podemos utilizar la 2.ª ley de Newton para movimiento de rotación: encontramos el torque en la barra sobre el punto de unión de la segunda cuerda y lo igualamos a  $I\varepsilon$  con aceleración angular  $\varepsilon$  y momento de inercia  $I = ml^2 + 4Ml^2$ . Más generalmente,

**Idea 45:** Cuando un cuerpo gira alrededor del eje  $s$ , el torque neto que experimenta es  $\tau = I\varepsilon$ , donde  $I$  es su momento de inercia respecto al eje  $s$ ,  $I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$  y  $r_i$  es la distancia de la  $i$ -ésima partícula del eje  $s$  (la suma se evalúa sobre todas las partículas del cuerpo). La energía cinética es  $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ .

Una vez que se encuentra la aceleración angular, para aplicar la idea 36 puede ser útil usar

**Idea 46:** La forma más general y a veces indispensable de la 2.ª ley de Newton es  $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ , donde  $\vec{P}$  es el momento neto del sistema y  $\vec{F}$  es la suma de fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Una fórmula análoga es  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ , donde  $\vec{L}$  es el momento angular neto del sistema (con respecto a un punto dado) y  $\vec{\tau}$  es la suma de los torques externos.

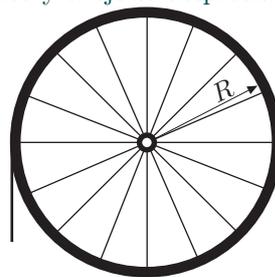
En nuestro caso, este último método es fructífero cuando se aplica tanto a fuerzas como a torques.

Otro método de solución es considerar la barra y las pelotas como tres cuerpos diferentes (que interactúan). Luego, las aceleraciones de las pelotas se pueden encontrar según la idea 32; uno también puede emplear:

**Idea 47:** La fuerza neta y el torque que actúan sobre cuerpos muy ligeros (en comparación con otros cuerpos) son cero.

Claramente, si esto no fuera cierto, una fuerza distinta de cero generaría una aceleración infinita para un cuerpo sin masa.

**Pr 32.** Un hilo rugoso inextensible con masa por unidad de longitud  $\rho$  y longitud  $L$  se lanza sobre una polea de tal manera que la longitud de un extremo colgante sea  $l$ . La polea está compuesta por un aro de masa  $m$  y un radio  $R$  unido a un eje horizontal por medio de rayos ligeros. El sistema inicialmente inmóvil se comienza a mover. Encuentre la fuerza en el eje inmediatamente después de que comience el movimiento. La fricción entre la polea y el eje es despreciable.



¿Por qué no proceder de la siguiente manera?: para encontrar la fuerza, usaremos idea 36; la aceleración del sistema se encontrará utilizando el método 6. Para aplicar la idea 36 lo más fácilmente posible, emplearemos:

**Idea 48:** La 2.ª ley de Newton se puede escribir como  $\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$ , donde  $\vec{a}_{cm}$  es la aceleración del centro de masa.

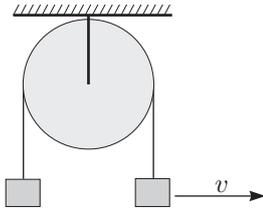
Esta idea se utiliza mejor cuando una parte de la masa del sistema está inmóvil y solo se mueve una masa relativamente pequeña (como en este caso: la única diferencia después de un corto período de tiempo es que se “pierde” una pequeña parte del hilo en un extremo y se “gana” en el otro extremo). Obviamente, la idea 34 será útil aquí y la idea 11 ahorrará un poco de esfuerzo. Tenga en cuenta que en este caso no estamos interesados en la coordenadas del centro de masa por segundo, sino únicamente en su cambio en función del tiempo; por lo

tanto, en la expresión para esta coordenada podemos omitir los términos que son independientes del tiempo: sus derivadas de tiempo desaparecerán. La parte dependiente del tiempo de la coordenada del centro de masa debe expresarse usando la misma coordenada que usaremos con el método 6 (ya que el método 6 producirá su segunda derivada con respecto al tiempo). Un consejo técnico puede ayudar: un vector está especificado por (a) su magnitud y dirección; (b) sus proyecciones sobre ejes de coordenadas en un sistema de coordenadas dado.

**Idea 49:** A veces es más fácil calcular las componentes de un vector, incluso si solo nos interesa su magnitud.

Sobre todo, esto se aplica cuando la dirección del vector no es conocida ni aparente. En este caso, deberíamos encontrar  $F_x$  y  $F_y$  en un sistema de coordenadas adecuado.

**Pr 33.** Se tira un hilo sobre una polea. En sus dos extremos hay dos bloques con masas iguales. Inicialmente los dos bloques están a la misma altura. A uno de ellos se le da instantáneamente una pequeña velocidad horizontal  $v$ . ¿Cuál de los dos bloques llegará más alto durante el movimiento subsiguiente? La masa de la polea es despreciable.



Este problema es realmente difícil, porque la clave de la solución es muy específica y rara vez se utiliza.

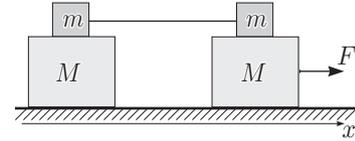
**Idea 50:** Si el centro de masa de un sistema no puede moverse, entonces la fuerza neta que actúa sobre él es cero.

Aquí el centro de masa puede moverse un poco, pero a más largo plazo (promediado en un período del movimiento de péndulo del bloque golpeado, ver idea 24) está inmóvil: los bloques tienen la misma masa y si uno de ellos se eleva, entonces, en la expresión del centro de masa, esto será compensado por el descenso del otro bloque. Esto también es cierto para la coordenada horizontal del centro de masa, pero es suficiente considerar la coordenada vertical solo para resolver el problema. Mencionemos también lo bastante obvio:

**Hecho 24:** La tensión en un hilo sin peso lanzado sobre una polea sin peso o tirado a lo largo de una superficie sin fricción es la misma en todas partes.

El algoritmo de solución es el siguiente: escribimos la 2.<sup>a</sup> ley de Newton para (a) el sistema hecho de dos bloques y (b) un bloque; hacemos un promedio de ambas ecuaciones y utilizamos la igualdad aparente de (a) para encontrar la tensión promedio en el hilo, que luego sustituimos en la ecuación (b). Basados en idea 24, dividimos la tensión en el hilo en el componente promedio y de alta frecuencia y utilizamos la idea 20.

**Pr 34.** Un sistema de bloques se asienta sobre una superficie lisa, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción entre los bloques es  $\mu$ , mientras que el que está entre los bloques y la superficie es  $\mu = 0$ .



El bloque inferior derecho está siendo arrastrado por una fuerza  $F$ . Encuentre las aceleraciones de todos los bloques.

**Idea 51:** Cuando los cuerpos están conectados por fuerzas de fricción, entonces para responder algunas preguntas completamente, uno debe considerar todas las combinaciones posibles de deslizamiento relativo entre todas las posibles superficies de contacto.

Por ejemplo, si vamos a suponer que no hay deslizamiento entre dos cuerpos en contacto, entonces podrían tratarse como un todo. Luego, se debe encontrar la fuerza de fricción  $F_h$  entre los cuerpos y determinar cuándo se cumple la suposición, o cuándo es  $F_h$  menor que la fuerza de fricción estática máxima  $\mu N$ .

**Pr 35.** Una bola de billar golpea a otra bola de billar estacionaria. ¿En qué grupo de puntos podría colocarse la bola estacionaria de modo que sea posible lograr la situación en la que ambas bolas caerán en dos bolsillos diferentes de la mesa? Las colisiones son perfectamente elásticas, las bolas son perfectamente resbaladizas (por lo tanto, la rotación de las bolas es despreciable).

**Idea 52:** Si una bola absolutamente elástica golpea a otra bola idéntica e inmóvil y la rotación de las bolas puede ignorarse, luego del impacto habrá un ángulo recto entre los vectores de velocidad de las dos bolas.

Para probar esto, tenga en cuenta que los tres vectores de velocidad (velocidad antes y las dos velocidades después del impacto) forman un triángulo debido a la ley de conservación del momento. La conservación de la energía significa que los lados del triángulo satisfacen el teorema de Pitágoras. Un caso especial de este resultado es (ver el problema después del siguiente):

**Hecho 25:** Cuando una bola elástica sufre una colisión central con otra bola estacionaria idéntica, la primera bola se detiene y la segunda gana la velocidad de la primera bola.

**Pr 36.** Una bola de billar absolutamente elástica y resbaladiza se mueve con velocidad  $v$  hacia dos bolas idénticas inmóviles. Las bolas inmóviles se tocan y sus centros se encuentran en una línea recta perpendicular al vector de velocidad de la bola entrante. La bola en movimiento se dirige exactamente hacia el punto de contacto de las dos bolas. ¿Qué velocidad tendrá la bola entrante después de las colisiones? Considere dos escenarios: (a) la bola entrante golpea exactamente en el medio entre las bolas; (b) su trayectoria está un poco alejada y golpea una de las bolas estacionarias ligeramente antes.



Para contestar la primera pregunta, es necesario usar:

**Idea 53:** Las colisiones (y otras interacciones de muchos cuerpos, como el movimiento de bolas conectadas por hilos o resor-

tes) son más fáciles de tratar en el sistema del centro de masas, porque en ese sistema la conservación del momento es la más fácil de escribir (el momento neto es cero).

¡Además, no olvide la idea 39! Para la segunda pregunta, usemos

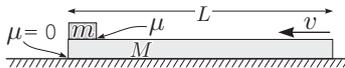
**Idea 54:** Si una fuerza que actúa sobre un cuerpo durante un tiempo conocido no cambia de dirección, entonces el momento transferido tiene la misma dirección que la fuerza.

**Pr 37.**  $n$  cuentas absolutamente elásticas se deslizan a lo largo del cable sin fricción. ¿Cuál es el número máximo de colisiones posible? Los tamaños de las cuentas son insignificantes y también lo es la probabilidad de que más de dos cuentas colisionen al mismo tiempo.

**Idea 55:** Representar el proceso visualmente, por ejemplo con una gráfica, suele ser de gran ayuda.

Aquí hay una pregunta auxiliar: ¿cómo sería la colisión elástica de dos bolas en un diagrama de  $x - t$ ?

**Pr 38.** Una tabla de longitud  $L$  y una masa  $M$  yace sobre una superficie horizontal suave; en su extremo se encuentra un pequeño bloque de masa  $m$ . El coeficiente de fricción entre el bloque y la tabla es  $\mu$ . ¿Cuál es la velocidad mínima  $v$  que se debe impartir a la tabla con un empujón rápido de modo que durante el movimiento subsiguiente el bloque deslice toda la longitud de la tabla y luego se caiga de la tabla? El tamaño del bloque es despreciable.

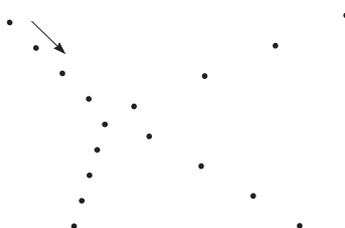


Este problema tiene dos soluciones más o menos equivalentes. Primero, podríamos resolverlo utilizando la idea 7. En segundo lugar, podríamos usar ideas 39 y 53, además de emplear:

**Idea 56:** Si un cuerpo se desliza a lo largo de una superficie nivelada, entonces la energía que se convierte en calor es igual al producto de la fuerza de fricción y la longitud de la pista deslizante.

De hecho, la fuerza de fricción tiene una magnitud constante y, como se ve en el marco de referencia del soporte, siempre es paralela al desplazamiento.

**Pr 39.** La figura dada se ha producido a partir de una fotografía estroboscópica y representa la colisión de dos bolas de diámetros iguales pero de masas diferentes. La flecha anota la dirección del movimiento de una de las bolas antes del impacto. Encuentre la proporción de las masas de las dos bolas y muestre cuál fue la dirección de movimiento de la segunda bola antes del impacto.



**Idea 57:** A veces es beneficioso tratar a los momentos como vectores, tratando sus sumas y diferencias vectoriales usando

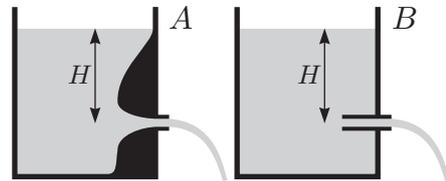
reglas de triángulo o paralelogramo (esto también es válido para otras cantidades vectoriales: desplazamientos, velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc).

Para ser más específicos: cuando dos cuerpos interactúan, el vector del momento es igual a la diferencia vectorial de sus dos momentos ver idea 5.

**Hecho 26:** En una fotografía estroboscópica, el vector de una posición del cuerpo a la siguiente es proporcional a su vector velocidad.

**Hecho 27:** (3.ª ley de Newton). Si dos cuerpos han interactuado, los cambios de momento de los dos cuerpos son iguales y opuestos.

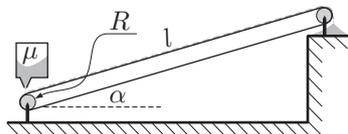
**Pr 40.** Hay dos barriles ( $A$  y  $B$ ) cuyos grifos tienen un diseño diferente, vea la figura. El grifo se abre, la altura de la superficie del agua del grifo es  $H$ . ¿Con qué velocidad sale la corriente de agua de los barriles?



**Idea 58:** Si parece que es posible resolver un problema utilizando la conservación de energía y de momento, entonces al menos uno de estos no se conserva de verdad.

No podría ser de otra manera: las respuestas son, después de todo, diferentes. Vale la pena estar atentos aquí. Al diseñar la salida  $A$ , hubo un claro intento de preservar la laminaridad del flujo: la energía se conserva. Sin embargo, si, motivados por el método 3, debíamos anotar el momento dado a la corriente por la presión del aire durante un tiempo infinitesimal  $dt$ ,  $pAdt$  (donde  $A$  es el área de la sección transversal del grifo), veríamos que, debido al flujo de agua,  $p \neq \rho g$  (ver presión dinámica, ¡la ley de Bernoulli!). Por otro lado, para la salida  $B$  el flujo laminar no se conserva; habrá remolinos y pérdida de energía. Sin embargo, podríamos trabajar con momento: escribimos la expresión de la presión ejercida sobre el líquido por las paredes del barril (generalmente las presiones ejercidas por las paredes laterales izquierda y derecha del barril se cancelan entre sí, pero queda una presión no compensada  $p = \rho gH$  ejercida a la izquierda de la sección transversal  $A$  de la salida).

**Pr 41.** La arena se transporta al sitio de construcción utilizando una cinta transportadora. La longitud del cinturón es  $l$ , el ángulo con respecto a la horizontal es  $\alpha$ ; la correa es accionada por la polea inferior con un radio de  $R$ , con alimentación externa. La arena se coloca en el cinturón a una tasa constante de  $\mu$  (kg/s). ¿Cuál es el torque mínimo requerido para transportar la arena? ¿Cuál es la velocidad de la correa a ese torque? El coeficiente de fricción es lo suficientemente grande como para que los granos de arena dejen de moverse inmediatamente después de golpear la banda; asuma que la velocidad inicial de los granos de arena para es cero.



**Hecho 28:** Para hacer que algo se mueva, cuerpos o un flujo (por ejemplo, de arena), se debe ejercer una fuerza.

Para este problema, la idea 58 y el método 3 serán útiles, además de:

**Idea 59:** (La condición de continuidad). Para un flujo estacionario, el flujo de materia (la cantidad de material que cruza la sección transversal del flujo por tiempo unido) es constante y es independiente de la sección transversal:  $\sigma v = \text{const}$  [ $\sigma(x)$  es la densidad de la materia por unidad de distancia y  $v(x)$  es la velocidad del flujo].

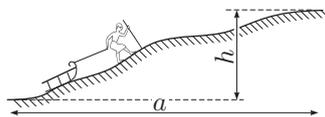
Para un flujo de líquido incompresible (densidad constante) en una tubería, dicha densidad es  $\sigma = \rho A$  y por lo tanto  $vA = \text{const}$ . Para una región del espacio donde se descarga el flujo, un sumidero, la masa aumenta:  $\frac{dm}{dt} = \sigma v$ , esta ecuación, también, podría llamarse la condición para la continuidad.

**Pr 42.** Una “masa” dúctil de arcilla cae contra el piso desde la altura  $h$  y comienza a deslizarse. ¿Cuál es la velocidad de la masa al comienzo del deslizamiento si el coeficiente de fricción entre el piso y la masa es  $\mu$ ? La velocidad horizontal inicial de la masa fue  $u$ .

**Idea 60:** Si durante un impacto contra una pared dura siempre hay deslizamiento, entonces la razón de los momentos impartidos a lo largo y perpendicularmente a la pared es  $\mu$ .

En efecto,  $\Delta p_{\perp} = \int N(t) dt$  (integrado durante la duración del impacto) y  $\Delta p_{\parallel} = \int \mu N(t) dt = \mu \int N(t) dt$ .

**Pr 43.** Un niño arrastra un trineo por la cuerda detrás de él mientras asciende lentamente por una colina. ¿Cuál es el trabajo que realiza el niño para transportar el trineo hasta la punta de la colina si su altura es de  $h$  y la distancia horizontal desde el pie de la colina hasta la punta es de  $a$ ? Suponga que la cuerda siempre es paralela a la tangente de la pendiente de la colina y que el coeficiente de fricción entre el trineo y la nieve es  $\mu$ .

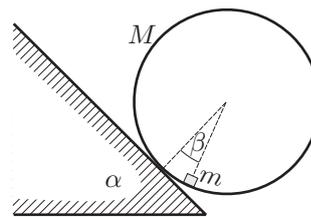


**Hecho 29:** Si no se da la forma exacta de una determinada superficie o una dependencia del tiempo, entonces tiene que lidiar con el caso general: probar que la proposición es verdadera para una forma arbitraria.

Claramente, para aplicar el hecho 29, uno necesitará la idea 3.

**Pr 44.** Un cilindro vacío con masa  $M$  está rodando sin deslizarse a lo largo de una superficie inclinada, cuyo ángulo de inclinación es  $\alpha = 45^\circ$ . En su superficie interior puede deslizarse libremente un pequeño bloque de masa  $m = M/2$ . ¿Cuál es el ángulo  $\beta$  entre la normal a la superficie inclinada y el

segmento de línea recta que conecta el centro del cilindro y el bloque?



Claramente, la solución más simple se basa en idea 6, pero uno necesita calcular la energía cinética de un cilindro rodante.

**Idea 61:**  $K = K_{cm} + M_{\Sigma} v_{cm}^2 / 2$ , donde  $K_{cm}$  es la energía cinética como se ve en el marco de referencia del centro de masa y  $M_{\Sigma}$  es la masa neta del sistema. Análogamente:  $\vec{P} = M_{\Sigma} \vec{v}_{cm}$  (ya que  $\vec{P}_{cm} \equiv 0$ ) y el momento angular  $\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{r}_{cm} \times \vec{P}$ . El teorema de eje paralelo (de Steiner) aplica:  $I = I_0 + M_{\Sigma} a^2$ , donde  $I$  es el momento de inercia respecto a un eje  $s$  e  $I_0$ , que con respecto a un eje a través del centro de masa (paralelo a  $s$ ) mientras que  $a$  es la distancia entre estos dos ejes.

Tendremos que calcular el momento angular ya en el siguiente problema, así que aclaremos un poco las cosas.

**Idea 62:** El momento angular es aditivo. Dividiendo el sistema en masas puntuales,  $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$ , donde para la  $i$ -ésima masa puntual  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$  (generalmente) o  $L_i = h_i p_i = r_i p_{ti}$  (para el movimiento en un plano),  $h_i = r_i \sin \alpha_i$  es el brazo de palanca y  $p_{ti} = p_i \sin \alpha$ , es la componente tangencial del momento. La energía cinética, el momento, etc., también son aditivos.

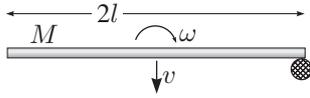
Si en un espacio tridimensional el momento angular es un vector, para un movimiento en un plano este vector es perpendicular al plano y, por lo tanto, es un escalar (y por lo tanto, uno puede olvidarse los productos cruz). A menudo es útil combinar ideas 61 y 62: no dividimos el sistema en partículas, sino en cuerpos rígidos ( $L = \sum L_i$ ), calculamos el momento angular  $L_i$  de cada cuerpo según idea 61: el momento angular del centro de masa más el momento angular medido en el marco de referencia del centro de masa (su giro), por ejemplo, en esferas en rotación como en el movimiento de planetas y satélites en el que el momento angular se divide en el del centro de masa y de su propio giro.

**Idea 63:** Aquí hay momentos de inercia para unos pocos cuerpos, con respecto al centro de masa. Una vara de longitud  $l$ :  $\frac{1}{12} M l^2$ ; una esfera sólida:  $\frac{2}{5} M R^2$ ; un cascarón esférico:  $\frac{2}{3} M R^2$ ; un cilindro:  $\frac{1}{2} M R^2$ ; un cuadrado con lado  $a$  y el eje perpendicular a su plano:  $\frac{1}{6} M a^2$ .

Si el eje de rotación no atraviesa el centro de masa, entonces se puede (a) encontrar el momento de inercia con respecto al eje de interés utilizando el teorema de eje paralelo (de Steiner); (b) aplicar la idea 61 para calcular la energía cinética o el momento angular (en cuyo caso solo es suficiente conocer el momento de inercia con respecto al centro de masa).

**Pr 45.** Una barra de masa  $M$  y una longitud de  $2l$  se desliza sobre el hielo. La velocidad del centro de masa de la barra es  $v$ , la velocidad angular de la barra es  $\omega$ . En el instante en que el centro de la velocidad de la masa es perpendicular a la propia

barra, golpea un poste inmóvil con un extremo. ¿Cuál es la velocidad del centro de masa de la barra después del impacto? si (a) el impacto es perfectamente inelástico (el extremo que golpea el poste deja de moverse); (b) el impacto es perfectamente elástico.



En caso de una colisión absolutamente elástica, una ecuación se deriva de la conservación de energía; si la colisión es inelástica, entonces surge otra condición: la de un extremo inmóvil de la barra. Aun así, tenemos dos variables. La segunda ecuación surge de:

**Idea 64:** Si un cuerpo choca con algo, entonces su momento angular se conserva con respecto al punto de impacto.

De hecho, durante el impacto, el movimiento del cuerpo se ve afectado por las fuerzas normales y de fricción, pero ambas se aplican a través del punto de impacto: su brazo de palanca es cero. Si un cuerpo se está moviendo en un campo gravitatorio o similar, entonces, a más largo plazo, el momento angular con respecto al punto de impacto puede comenzar a cambiar, pero inmediatamente antes y después de la colisión es igual (la gravedad no es demasiado fuerte a diferencia de las fuerzas normales que son fuertes, pero de corta duración, aunque el brazo de palanca de la gravedad no es cero, no puede cambiar el momento angular en un instante).

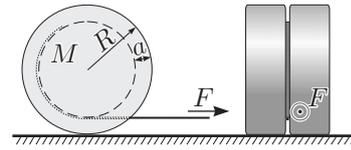
**Pr 46.** Si uno golpea algo rígido, por ejemplo un poste con un bate, la mano que sostiene el bate puede lastimarse siempre que el impacto no alcance el llamado centro de percusión del bate (y golpee por debajo o por encima de dicho centro). Determine la posición del centro de percusión para un bate de densidad uniforme. Puede suponer que durante un impacto el bate gira alrededor de su mano que lo sostiene.

**Método 7:** Convierta un problema de la vida real en el lenguaje formal de la física y las matemáticas; en otras palabras, cree un modelo.

Expresado así, puede parecer que el método no tiene ningún sentido. Sin embargo, convertir e interpretar los escenarios de la vida real (*modelar* el problema) es uno de los aspectos más desafiantes e interesantes de la física. Es interesante porque proporciona más libertad creativa que la resolución de un modelo existente utilizando ideas bien establecidas. Aun así, esta libertad tiene límites: el modelo debe describir la realidad lo mejor posible, las aproximaciones tienen que tener sentido y es deseable que el modelo sea solucionable mentalmente o con la ayuda de una computadora. Para un problema dado, no queda mucha libertad y el negocio se simplifica: hay pistas claras en cuanto a suposiciones sensatas. Comencemos a traducir: “Una barra rígida de longitud  $l$  y densidad uniforme gira alrededor de un extremo con la velocidad angular  $\omega$ , el eje de rotación es perpendicular a la barra. A una distancia  $x$  del eje hay un poste inmóvil que es paralelo al eje de rotación. La vara golpea el poste”. Ahora nos encontramos con el primer obstáculo: ¿es el impacto elástico o inelástico? Esto no se menciona en el texto del problema. Dejémoslo por ahora: tal vez podamos llegar

a algún lugar, incluso sin el supuesto correspondiente (resulta que este es el caso). Ahora nos encontramos con la pregunta central: ¿qué significa para la mano “no ser lastimada”? Sabemos que duele cuando algo golpea nuestra mano, si este algo recibe un momento de la mano durante un corto período de tiempo (el impacto), ya que esto implica una gran fuerza. La mano está estacionaria, por lo que el extremo del bate debe detenerse sin recibir ningún momento de la mano. Así nuestra interpretación del problema es completa: “Tras el impacto, la rotación se invierte,  $0 \geq \omega' \geq -\omega$ ; durante el impacto, el eje de rotación no imparte ningún momento en la varilla. Encuentre  $x$ .” La penúltima frase alude al uso de la idea 64.

**Pr 47.** Un cilindro masivo de radio  $R$  y masa  $M$  está tirado en el piso. Un surco estrecho de profundidad  $a$  ha sido cincelado a lo largo de la circunferencia del cilindro. Se ha enrollado un hilo alrededor de la ranura y ahora se está tirando de su extremo libre, sostenido horizontalmente, con una fuerza de  $F$ . El cilindro se coloca de tal manera que la rosca se libera desde debajo del cilindro. ¿Con qué aceleración comenzará a moverse el cilindro? La fricción entre el piso y el cilindro es lo suficientemente grande para que no haya deslizamientos.



Hay varias formas de abordar este problema, pero utilicemos la siguiente idea.

**Idea 65:** La relación  $I\varepsilon = \tau$  es claramente válida solo si el centro de rotación está inmóvil; sin embargo, resulta que también se mantiene cuando el eje de rotación instantáneo se mueve de manera que la distancia del centro de masa del cuerpo respecto del eje no cambia (por ejemplo, cuando se rueda un objeto cilíndrico o esférico).

Para probar esta idea, recuerde la idea 6: la energía cinética aparece cuando se realiza el trabajo,  $K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \tau\varphi$  ( $\varphi$  es el ángulo de rotación del cuerpo,  $\omega = d\varphi/dt$ ). Si el momento de inercia respecto al eje de rotación instantáneo  $I$  no depende del tiempo, entonces  $dK/dt = \frac{1}{2}I d\omega^2/dt = I\omega\varepsilon = \tau d\varphi/dt = \tau\omega$ , lo que da  $I\varepsilon = \tau$ .

**Pr 48.** ¿Cuál será la trayectoria de una esfera que rueda sin deslizarse sobre una tabla horizontal infinita que gira con velocidad angular  $\Omega$ ? La rapidez inicial de la esfera es  $v_0$  y el momento de inercia de la esfera es  $I_{cm} = m\beta R^2$ . Dé el valor numérico mínimo del coeficiente de fricción para que una esfera hueca que se desplaza inicialmente a 14 cm/s en una mesa que gira a 4 Hz no se deslice.

Para resolver el problema anterior se necesita formular la siguiente idea:

**Idea 66:** La condición de rodadura se logra igualando la velocidad de la superficie  $\vec{v}_s$  se iguala con la velocidad del punto más bajo de un objeto en movimiento, es decir  $\vec{v}_s = \vec{v}_{cm} + R\hat{n} \times \vec{\omega}$

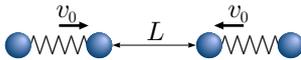
**Pr 49.** Una pelota está rodando a lo largo de un piso horizontal en la región  $x < 0$  con velocidad  $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ . En la

región  $x > 0$  hay una cinta transportadora que se mueve con velocidad  $\vec{u} = (0, u)$  (paralelo a su borde  $x = 0$ ). Encuentre la velocidad de la pelota  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  con respecto a la cinta después de que haya rodado sobre la cinta. La superficie de la cinta transportadora es áspera (la pelota no se desliza) y está nivelada con el piso.

**Idea 67:** Para cuerpos cilíndricos o esféricos que ruedan o se deslizan sobre una superficie horizontal, el momento angular se conserva con respecto a un eje arbitrario que se encuentra en el plano de la superficie.

De hecho, los puntos donde se aplican la fuerza normal y la gravedad están en la misma línea recta que las fuerzas en sí y su suma es cero, lo que significa que su par neto también es cero; la fuerza de fricción se encuentra en el plano de la superficie, por lo que su brazo de palanca con respecto a un eje en el mismo plano es cero.

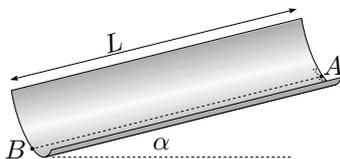
**Pr 50.** Una “mancuerna elástica” comprende dos esferas de masa  $m$  que están conectadas con un resorte de rigidez  $k$ . Dos de estas mancuernas se deslizan una hacia la otra, la velocidad de cualquiera de ellas es  $v_0$ . En algún momento, la distancia entre ellas es  $L$  (ver figura). ¿Después de qué tiempo la distancia entre ellos es igual a  $L$  nuevamente? Las colisiones son perfectamente elásticas.



**Idea 68:** Si un sistema que consiste en cuerpos elásticos, conectados por resortes, hilos, etc., interactúa con otros cuerpos, entonces la duración del impacto de los cuerpos elásticos es significativamente menor que los tiempos característicos de otros procesos. Todo el proceso se puede dividir en etapas más simples: una colisión casi instantánea de cuerpos elásticos (que podría considerarse libre, ya que, por ejemplo, el resorte ejerce una fuerza insignificante en comparación con la ejercida en una colisión elástica) y el posterior (o precedente, o entre las colisiones) proceso lento: las oscilaciones del resorte etc.

*Nota:* esta es una idea bastante general, la división en pasos más simples puede ser útil si los procesos rápidos (casi instantáneos) pueden ocurrir en un sistema dinámico; vea el siguiente problema para un ejemplo (también recuerde la idea 53)

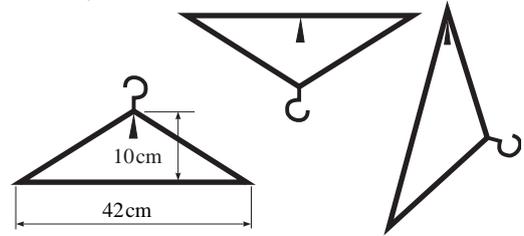
**Pr 51.** Pequeños granos de arena se deslizan sin fricción a lo largo de un canal cilíndrico de radio  $R$  (ver figura). El ángulo de inclinación del canal es  $\alpha$ . Todos los granos tienen una velocidad inicial de cero y comienzan cerca del punto  $A$  (pero no necesariamente en el punto  $A$  en sí). ¿Cuál debería ser la longitud del canal para que todos los granos salgan en el punto  $B$  (es decir, exactamente en la parte inferior del canal)?



**Idea 69:** Si el movimiento de una colección de partículas dispersas se pudiera dividir en una traslación en una dirección

conocida y un movimiento libre de oscilación (de modo que el movimiento sea perpendicular a la oscilación), entonces las partículas se enfocan en ciertos puntos: donde la fase de oscilación de todas las partículas es ya sea cero o es un múltiplo entero de  $2\pi$ .

**Pr 52.** Una percha hecha de alambre con una distribución de densidad no uniforme está oscilando con una pequeña amplitud en el plano de la figura. En los dos primeros casos, el lado más largo del triángulo es horizontal. En los tres casos los períodos de oscilación son iguales. Encuentre la posición del centro de masa y el período de oscilación.



*Información de fondo:* Un cuerpo rígido de tamaño finito que oscila alrededor de un eje fijo se conoce como péndulo físico. Su frecuencia de pequeñas oscilaciones es fácil de derivar de la relación  $I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$ , donde  $I$  es el momento de inercia con respecto al eje de oscilación y  $l$  es la distancia del centro de masa desde ese eje:  $\omega^{-2} = I/mgl = I_0/mgl + l/g$  (aquí empleamos el teorema de ejes paralelos, ver idea 61). La longitud reducida del péndulo físico es la distancia  $\tilde{l} = l + I_0/ml$  de modo que la frecuencia de oscilación de un péndulo matemático de esa longitud sea la misma que para el péndulo físico dado.

**Idea 70:** Si dibujamos una línea recta de longitud  $\tilde{l}$  tal que pase por el centro de masa y uno de sus extremos es por el eje de rotación, entonces si movemos el eje de rotación al otro extremo del segmento (y dejando que el cuerpo alcance un equilibrio estable), entonces la nueva frecuencia de oscilación es la misma que antes. Conclusión: el conjunto de puntos donde se podría colocar el eje de rotación sin cambiar la frecuencia de oscilación, consiste en dos círculos concéntricos alrededor del centro de masa.

*Prueba:* la fórmula anterior podría reescribirse como una ecuación cuadrática para encontrar la longitud  $l$  correspondiente a la frecuencia dada  $\omega$  (es decir, a la longitud reducida dada  $\tilde{l} = g/\omega^2$ ):  $l^2 - \tilde{l}l + I_0/m = 0$ . Según las fórmulas de Vieta, las soluciones  $l_1$  y  $l_2$  satisfacen  $l_1 + l_2 = \tilde{l}$ , de modo que  $l_1$  y  $l_2 = \tilde{l} - l_1$  resultan en la misma frecuencia de oscilaciones.

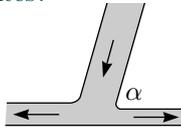
**Pr 53.** Una esfera metálica de radio 2 mm y densidad  $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$  se mueve en el agua, cayendo libremente con la aceleración  $a_0 = 0,57g$ . La densidad del agua es  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ . ¿Con qué aceleración una burbuja esférica de radio 1 mm puede subir en el agua? Considere que el flujo es laminar en ambos casos; desprecie la fricción.

**Idea 71:** Si un cuerpo se mueve en un líquido, el líquido también se moverá. (A) Si el flujo es laminar (sin remolinos), solo se moverá el líquido adyacente al cuerpo; (B) si el flujo es turbulento, habrá una “cola” turbulenta detrás del cuerpo. En cualquier caso, la velocidad característica del líquido en movimiento es la misma que la velocidad del cuerpo.

Usando el método 6 encontramos que en el caso (A) la energía cinética del sistema  $K = \frac{1}{2}v^2(m + \alpha\rho_0V)$ , donde la constante  $\alpha$  es un número que caracteriza la geometría del cuerpo que corresponde a la extensión de la región del líquido que se moverá (en comparación con el volumen del propio cuerpo). Esta expresión se obtiene al notar que la velocidad característica del líquido alrededor del cuerpo es  $v$  y el tamaño característico de la región donde se mueve el líquido (la velocidad no es mucho menor que  $v$ ) se estima como el tamaño de el propio cuerpo. Si un cuerpo es actuado por una fuerza  $F$ , entonces la potencia producida por esta fuerza es  $\mathcal{P} = Fv = \frac{dK}{dt} = va(m + \alpha\rho_0V)$ . Así  $F = a(m + \alpha\rho_0V)$ : la masa efectiva del cuerpo aumenta por  $\alpha\rho_0V$ . En el problema anterior, la constante  $\alpha$  para el cuerpo esférico se puede encontrar usando las condiciones dadas en la primera mitad del problema.

En el caso (B), si asumimos que la velocidad del cuerpo es constante, encontramos que  $K = \frac{1}{2}v^2\rho_0(\alpha Avt)$ , donde  $A$  es el área de la sección transversal del cuerpo y  $\alpha A$  es el área de la sección transversal de la “cola” turbulenta. Esta  $\alpha$ , de nuevo, caracteriza el cuerpo. A partir de aquí, es fácil de encontrar  $Fv = \frac{dK}{dt} = \frac{\alpha}{2}v^3\rho_0A$ , que da  $F = \frac{\alpha}{2}v^2\rho_0A$ .

**Pr 54.** Un chorro de agua cae contra el fondo de un canal con velocidad  $v$  y se divide en chorros más pequeños que van hacia la izquierda y hacia la derecha. Encuentre las velocidades de ambos flujos si el flujo entrante estaba inclinado en un ángulo de  $\alpha$  al canal (y los flujos resultantes). ¿Cuál es la proporción de cantidades de agua transportada por unidad de tiempo en las dos corrientes salientes?



Este es un problema bastante difícil. Primero vamos a exponer algunas ideas y hechos.

**Idea 72:** Para el flujo de líquidos, la ley de Bernoulli (es decir, la conservación de la energía) suele ser útil:  $P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$ , donde  $P$  es la presión estática,  $h$  es la altura del punto considerado y  $v$  es la velocidad del flujo en ese punto.

**Hecho 30:** Dentro del líquido cerca de su superficie libre, la presión estática es igual a la presión externa.

Para resolver la segunda mitad del problema, se necesita lo siguiente:

**Idea 73:** La idea 46 se puede generalizar de una manera que se mantendría para los sistemas abiertos (ciertas cantidades de materia entran y salen del sistema):  $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\Phi}_{P\text{entra}} - \vec{\Phi}_{P\text{sale}}$ , donde  $\vec{\Phi}_{P\text{entra}}$  y  $\vec{\Phi}_{P\text{sale}}$  son los flujos de entrada y salida del momento (en otras palabras, el momento neto de la materia que entra y sale del sistema, respectivamente).

El flujo de momento del líquido que fluye podría calcularse como el producto de la densidad de volumen de momento  $\rho\vec{v}$  con el caudal (volumen de líquido que entra o sale del sistema por unidad de tiempo).

¿Cuál es el sistema abierto que deberíamos considerar en este caso? Claramente, un sistema que permitiría relacionar el caudal de entrada  $\mu$  (kg/s) a los flujos salientes ( $\mu_l$  y  $\mu_r$ )

usando la fórmula anterior: una pequeña región imaginaria de espacio que incluiría la región donde la corriente se divide en dos.

**Hecho 31:** Si podemos ignorar la viscosidad, el componente de la fuerza ejercida por el lecho de la corriente (incluidas las “paredes” que limitan el flujo) en el flujo que es paralelo a estas paredes es cero.

**Pr 55.** Encuentre la velocidad de propagación de pequeñas olas en aguas poco profundas. El agua se considera poco profunda si la longitud de onda es considerablemente mayor que la profundidad del agua  $H$ . Gracias a esto, podemos asumir que a lo largo de una sección transversal vertical, la velocidad horizontal de todas las partículas  $v_h$  es la misma y que la velocidad horizontal de las partículas de agua es significativamente menor que la velocidad vertical. La pequeñez de las olas significa que su altura es significativamente menor que la profundidad del agua. Esto nos permite suponer que la velocidad horizontal de las partículas de agua es significativamente menor que la velocidad de la ola,  $u$ .

**Idea 74:** Un método estándar para encontrar la velocidad de propagación (u otra característica) de una onda (u otra estructura con forma persistente) es elegir un sistema de referencia donde la onda esté en reposo. En este marco, (a) la continuidad (idea 59) y (b) la conservación de energía (por ejemplo, en forma de ley de Bernoulli) se mantienen. En ciertos casos, la ley de conservación de energía puede ser reemplazada por el equilibrio de fuerzas.

(Un enfoque alternativo es linealizar y resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas).

**Pr 56.** Una pequeña esfera con masa  $m = 1$  g se mueve a lo largo de una superficie lisa, se desliza hacia adelante y hacia atrás y choca elásticamente con una pared y un bloque. La masa del bloque rectangular es  $M = 1$  kg, la velocidad inicial de la esfera es  $v_0 = 10$  m/s. ¿Cuál es la velocidad de la esfera en el instante en que la distancia entre la esfera y la pared se ha duplicado en comparación con la distancia inicial? ¿Cuántas veces habrá cambiado la fuerza promedio (promediada en el tiempo) ejercida por la esfera en la pared?

**Idea 75:** Si se produce un movimiento oscilatorio similar, para el cual los parámetros del sistema cambian lentamente (en comparación con el período de oscilación), se conserva la invariante adiabática  $I$  que es el área encerrada por el contorno cerrado trazado por la trayectoria del sistema en el denominado diagrama de fase (donde las coordenadas son la coordenada espacial  $x$  y el momento  $p_x$ ).

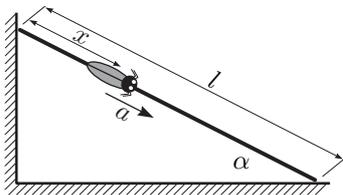
Seamos más precisos aquí. El contorno cerrado se produce como una curva paramétrica (la llamada trayectoria de fase)  $x(t), p_x(t)$  si rastreamos el movimiento del sistema durante un período completo  $T$ . La trayectoria de la fase normalmente se dibuja con una flecha que indica la dirección del movimiento. La invariante adiabática no se conserva exacta y perfectamente, pero la precisión con la que se conserva aumenta si crece la razón  $\tau/T$ , donde  $\tau$  es el tiempo característico de cambio de los parámetros del sistema.

La invariante adiabática desempeña un papel instrumental en la física: de la ley adiabática en los gases (compare el resultado del problema anterior con la ley de expansión adiabática para un gas ideal con un grado de libertad) y es aplicable incluso en mecánica cuántica (el número de los cuantos en el sistema (por ejemplo, fotones) se conservan si los parámetros del sistema se varían lentamente).

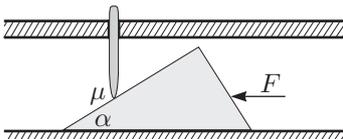
### 5. PROBLEMAS DE REVISIÓN

**Pr 57.** Una barra recta homogénea se apoya externamente contra una pared vertical, de modo que el ángulo entre la pared y la barra es  $\alpha < 90^\circ$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  la varilla puede permanecer estacionaria cuando se soporta así? Considere dos escenarios: a) la pared es resbaladiza y el piso es áspero con coeficiente de fricción  $\mu$ ; b) el piso es resbaladizo y la pared es áspera con coeficiente de fricción  $\mu$ .

**Pr 58.** Una barra ligera descansa con un extremo contra una pared vertical y otro sobre un piso horizontal. Un insecto quiere arrastrarse por el palo, de arriba a abajo. ¿Cómo debería la aceleración del insecto depender de su distancia desde el punto final superior del palo? La masa del insecto es  $m$ , la longitud del palo es  $l$ , el ángulo entre el piso y el palo es  $\alpha$  y la masa del palo es insignificante; tanto el piso como la pared son resbaladizos ( $\mu = 0$ ). ¿Cuánto tiempo tardará el insecto en llegar al fondo del palo, comenzando desde arriba (desde el reposo)?

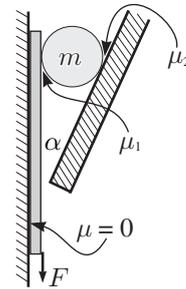


**Pr 59.** Una cuña con el ángulo  $\alpha$  en la punta descansa sobre el piso horizontal. Hay un agujero con paredes lisas en el techo. Una varilla se ha insertado cómodamente en ese orificio y puede moverse hacia arriba y hacia abajo sin fricción, mientras que su eje siempre es vertical. La varilla se apoya contra la cuña; el único punto con fricción es el punto de contacto de la cuña y la varilla: el coeficiente de fricción es  $\mu$ . ¿Para qué valores de  $\mu$  es posible empujar la cuña para que la varilla quede detrás de esta, aplicando solo una fuerza horizontal suficientemente grande?

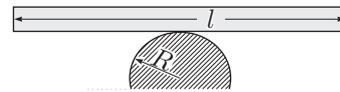


**Pr 60.** A veces se utiliza un artilugio para colgar pinturas, etc., en la pared, cuyo modelo se presentará a continuación. Contra una superficie vertical fija hay un plano inclinado inamovible, donde el ángulo entre la superficie y el plano es  $\alpha$ . Hay una brecha entre la superficie y el plano, donde se podría colocar una placa delgada. La placa se coloca firmemente contra la superficie vertical; el coeficiente de fricción entre ellos puede considerarse igual a cero. En el espacio entre la placa y

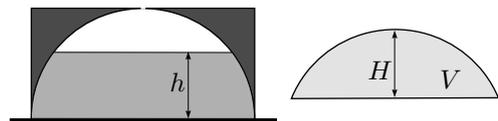
el plano, un cilindro de masa  $m$  puede moverse libremente, su eje es horizontal y paralelo a todas las superficies consideradas. El cilindro descansa sobre la placa y el plano y los coeficientes de fricción en esas dos superficies son, respectivamente,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . ¿Para qué valores de los coeficientes de fricción la placa seguramente no caerá independientemente de su peso?



**Pr 61.** Sobre un cilindro con un eje horizontal, se coloca una tabla, cuya longitud es de  $l$  y el grosor es de  $h$ . ¿Para qué radio  $R$  del cilindro la posición horizontal de la tabla es estable?

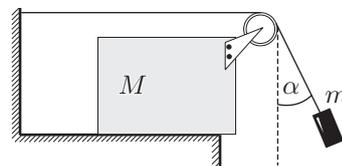


**Pr 62.** Un recipiente en forma de cilindro, cuya altura es igual a su radio  $R$  y cuya cavidad es semiesférica, se llena hasta el borde con agua, se gira y se coloca sobre una superficie horizontal. El radio de la cavidad semiesférica también es de  $R$  y hay un pequeño agujero en el fondo del recipiente. Desde abajo de los bordes del recipiente, sale algo de agua. ¿Qué tan alta será la capa de agua restante, si la masa del recipiente es  $m$  y la densidad del agua es  $\rho$ ? Si es necesario, use la fórmula para el volumen de un casquete esférico (vea la figura):  $V = \pi H^2(R - H/3)$ .



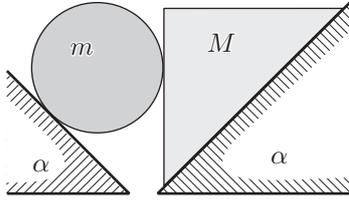
**Pr 63.** Un recipiente cilíndrico vertical con un radio  $R$  gira alrededor de su eje con la velocidad angular  $\omega$ . ¿En qué medida la altura de la superficie del agua en el eje difiere de la altura al lado de los bordes del recipiente?

**Pr 64.** Un bloque con masa  $M$  está sobre una superficie horizontal resbaladiza. Un hilo se extiende sobre una de sus esquinas. El hilo está unido a la pared en su extremo y a un pequeño bloque de masa  $m$ , que está inclinado por un ángulo  $\alpha$  con respecto a la vertical, en el otro. Inicialmente, el hilo se estira y los bloques se mantienen en su lugar. Luego se liberan los bloques. ¿Para qué razón de las masas se mantendrá sin cambios el ángulo  $\alpha$  a lo largo del movimiento subsiguiente?

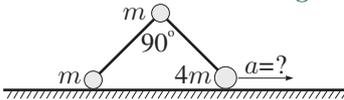


**Pr 65.** Dos superficies resbaladizas ( $\mu = 0$ ) en forma de cuña inclinadas con ángulos de inclinación iguales  $\alpha$  se colocan

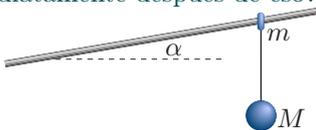
de manera tal que sus lados son paralelos, las inclinaciones se enfrentan entre sí y hay un pequeño espacio entre ellas (ver figura). En la parte superior de las superficies se colocan un cilindro y un bloque en forma de cuña, mientras que descansan uno contra el otro y uno de los lados del bloque es horizontal. Las masas son, respectivamente,  $m$  y  $M$ . ¿Con qué aceleraciones se moverán el cilindro y el bloque? Encuentre la fuerza de reacción entre ellos.



**Pr 66.** Tres pequeños cilindros están conectados con barras sin peso, donde hay una bisagra cerca del cilindro central, de modo que el ángulo entre las barras puede cambiar libremente. Inicialmente este ángulo es un ángulo recto. Dos de los cilindros tienen una masa de  $m$ , otro al lado tiene la masa de  $4m$ . Encuentre la aceleración del cilindro más pesado inmediatamente después de que comience el movimiento. Ignore la fricción.

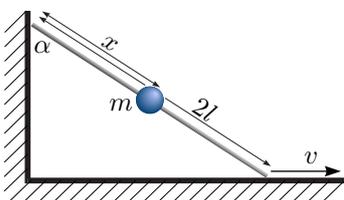


**Pr 67.** Una barra resbaladiza se coloca en un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal. Un pequeño anillo de masa  $m$  puede deslizarse a lo largo de la varilla, a la que se une un hilo largo. Una pequeña esfera de tamaño  $M$  se adjunta al hilo. Inicialmente, el anillo se mantiene inmóvil y el hilo cuelga verticalmente. Entonces el anillo es liberado. ¿Cuál es la aceleración de la esfera inmediatamente después de eso?

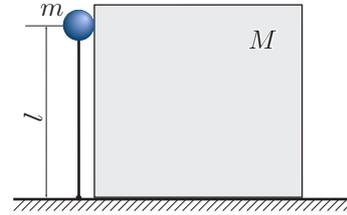


**Pr 68.** Un bloque comienza a deslizarse en el punto más alto de una superficie esférica. Encuentre la altura a la que perderá el contacto con la superficie. La esfera se mantiene en su lugar y su radio es de  $R$ ; no hay fricción.

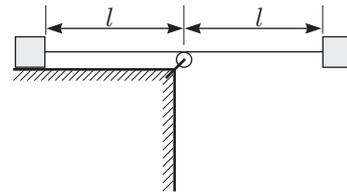
**Pr 69.** La longitud de una varilla sin peso es de  $2l$ . Una pequeña esfera de masa  $m$  se fija a una distancia  $x = l$  desde su extremo superior. La barra descansa con un extremo contra la pared y el otro contra el suelo. El extremo que descansa en el piso se mueve con una velocidad constante  $v$  lejos de la pared. a) Encuentre la fuerza con la que la esfera afecta a la barra en el momento, cuando el ángulo entre la pared y la barra es  $\alpha = 45^\circ$ ; (b) ¿cuál es la respuesta si  $x \neq l$ ?



**Pr 70.** Una barra ligera con una longitud de  $l$  está conectada a la superficie horizontal con una bisagra; una pequeña esfera de masa  $m$  está conectada al extremo de la barra. Inicialmente, la barra es vertical y la esfera descansa contra el bloque de masa  $M$ . Se deja que el sistema se mueva libremente y, después de un cierto tiempo, la esfera pierde contacto con la superficie del bloque, en el momento en que la barra forma un ángulo  $\alpha = \pi/6$  con la horizontal. Encuentre la proporción de masas  $M/m$  y la velocidad  $u$  del bloque en el momento de la separación.

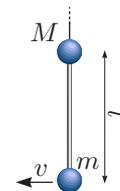


**Pr 71.** A una distancia  $l$  del borde de la tabla se encuentra un bloque que está conectado con un hilo a otro bloque igual. La longitud del hilo es de  $2l$  y se extiende alrededor de la polea que se encuentra en el borde de la mesa. El otro bloque se mantiene por encima de la mesa de manera que la cuerda está bajo tensión. Luego se libera el segundo bloque. ¿Qué sucede primero: el primer bloque llega a la polea o el segundo golpea la mesa?



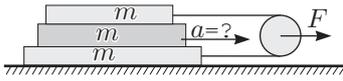
**Pr 72.** Un disco de hockey sobre hielo cilíndrico con un grosor y densidad uniformes recibe una velocidad angular  $\omega$  y una velocidad de traslación  $u$ . ¿Qué trayectoria seguirá el disco si el hielo es igualmente resbaladizo en todas partes? ¿En qué caso se deslizará más lejos: cuando  $\omega = 0$  o cuando  $\omega \neq 0$ , asumiendo que en ambos casos  $u$  es la misma?

**Pr 73.** Una pequeña esfera de masa  $M$  cuelga al final de un hilo muy largo; a esa esfera está, con una vara sin peso, unida otra pequeña esfera de masa  $m$ . La longitud de la varilla es  $l$ . Inicialmente el sistema está en equilibrio. ¿Qué velocidad horizontal debe darse a la esfera inferior para que pueda ascender a la misma altura que la esfera superior? Los tamaños de las esferas son insignificantes en comparación con la longitud de la barra.



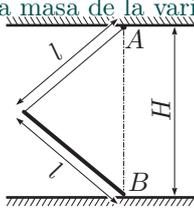
**Pr 74.** Un bloque de masa  $m$  se encuentra sobre una superficie horizontal resbaladiza. Encima de este hay otro bloque de masa  $m$  y encima de este, otro bloque de masa  $m$ . Una cuerda que conecta el primer y el tercer bloque se ha extendido alrededor de una polea sin peso. Las cuerdas son horizontales

y la polea se tira por una fuerza  $F$ . ¿Cuál es la aceleración del segundo bloque? El coeficiente de fricción entre los bloques es  $\mu$ .



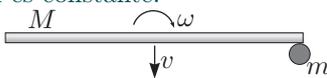
**Pr 75.** Un niña con masa  $m$  quiere empujar a un niño de pie sobre el hielo, cuya masa  $M$  es más grande que la suya. Para ello, acelera, corre hacia el chico y lo empuja mientras puedan mantenerse erguidos. ¿Cuál es la distancia máxima por la cual es posible empujar de esta manera? La velocidad máxima de una carrera es  $v$ , el coeficiente de fricción entre ambos niños y el hielo es  $\mu$ .

**Pr 76.** Una barra uniforme con una longitud de  $l$  se adjunta con un hilo sin peso (cuya longitud también es de  $l$ ) al techo en el punto  $A$ . El extremo inferior de la barra descansa sobre el piso resbaladizo en el punto  $B$ , que está exactamente debajo del punto  $A$ . La longitud de  $AB$  es  $H$ ,  $l < H < 2l$ . La varilla comienza a deslizarse desde el reposo; encuentre la velocidad máxima de su centro durante el movimiento subsiguiente. Además, encuentre la aceleración del centro de la varilla y la tensión en el hilo en ese momento cuando la velocidad de la varilla sea máxima si la masa de la varilla es  $m$ .



**Pr 77.** Un palo con densidad uniforme descansa con un extremo contra el suelo y con el otro contra la pared. Inicialmente, era vertical y comenzó a deslizarse desde el reposo, de manera que todo el movimiento subsiguiente tiene lugar en un plano perpendicular a la línea de intersección del piso y la pared. ¿Cuál fue el ángulo entre el palo y la pared en el momento en que el palo perdió contacto con la pared? Ignore la fricción.

**Pr 78.** Un tronco con masa  $M$  se desliza a lo largo del hielo mientras gira. La velocidad del centro de masa del tronco es  $v$ , su velocidad angular es  $\omega$ . En el momento en que el tronco es perpendicular a la velocidad de su centro de masa, el tronco golpea un disco estacionario con masa  $m$ . ¿Para qué proporción de las masas  $M/m$  es posible la situación en la que el registro permanece en su lugar mientras el disco se desliza? Las colisiones son perfectamente elásticas. El tronco es recto y su densidad lineal es constante.

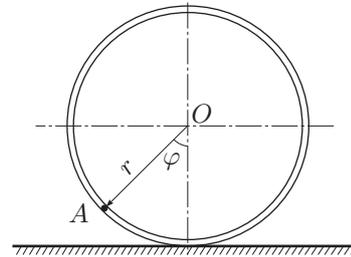


**Pr 79.** Una pelota cae desde la altura  $h$ , inicialmente la velocidad horizontal de la pelota era de  $v_0$  y no estaba girando. a) Encuentre la velocidad y la velocidad angular de la pelota después de la siguiente colisión contra el suelo: la deformación de la bola contra el suelo fue absolutamente elástica, pero hubo fricción en la superficie de contacto, de manera que la parte de la bola que estaba en contacto con el suelo se detuvo. b)

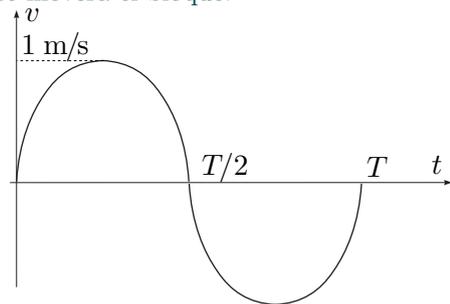
Responda a la misma pregunta con el supuesto de que las velocidades de las superficies en contacto nunca se homogeneizaron y que a lo largo de la colisión hubo fricción con el coeficiente  $\mu$ .

**Pr 80.** Una pelota está rodando por un plano inclinado. Encuentre la aceleración de la pelota. El plano está inclinado en un ángulo  $\alpha$ , el coeficiente de fricción entre la pelota y el plano es  $\mu$ .

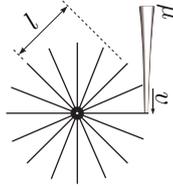
**Pr 81.** Un aro de masa  $M$  y un radio  $r$  se encuentra en una superficie horizontal resbaladiza. Hay un túnel delgado y resbaladizo dentro del aro, a lo largo del cual puede deslizarse un bloque de masa minúscula  $m$ . Inicialmente, todos los cuerpos están en reposo y el bloque está en el punto más alto del aro. Encuentre la velocidad y la aceleración del punto central del aro en el momento en que el ángulo entre la línea imaginaria que conecta el punto central del aro y la posición del bloque y la vertical es  $\varphi$ .



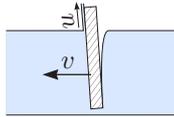
**Pr 82.** Un bloque con una masa  $m = 10\text{ g}$  se coloca en una tabla que se ha hecho de manera que, al deslizarse hacia la izquierda, el coeficiente de fricción  $\mu_1 = 0,3$ , mientras que cuando se desliza hacia la derecha es  $\mu_2 = 0,5$ . El tablero se mueve repetidamente de izquierda a derecha según el gráfico  $v(t)$  (ver figura). La gráfica es periódica con periodo  $T = 0,01\text{ s}$ ; la velocidad  $v$  de la junta se considera positivo cuando se dirige a la derecha. Usando la gráfica, encuentre la velocidad promedio con la que se moverá el bloque.



**Pr 83.** Una turbina de agua consiste en una gran cantidad de paletas que podrían considerarse tableros planos ligeros con una longitud de  $l$ , que se encuentran en un extremo unido a un eje giratorio. Los extremos libres de las paletas se colocan en la superficie de un cilindro imaginario que es coaxial con el eje de la turbina. Una corriente de agua con velocidad  $v$  y caudal de  $\mu$  ( $\text{kg/s}$ ) se dirige a la turbina de tal manera que golpea las paletas cerca del perímetro de la turbina. Encuentre la potencia máxima posible que podría extraerse con una turbina de este tipo; asuma que la cantidad de paletas es lo suficientemente grande como para que ninguna de las porciones de agua pueda escapar sin golpear una paleta.

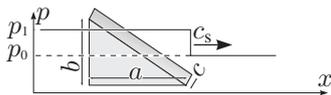


**Pr 84.** Una tabla plana está inclinada en un ángulo  $\alpha$  con la vertical. Uno de sus extremos está en el agua, el otro está fuera del agua. El tablero se está moviendo con velocidad  $v$  con respecto a su normal. ¿Cuál es la velocidad de la corriente de agua dirigida hacia arriba de la tabla?

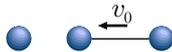


**Pr 85.** Un vagón motorizado se usa para transportar una carga horizontalmente a una distancia de  $L$ . La carga está colgando del techo del vagón por un cable de longitud  $l$ . La mitad del tiempo el vagón se acelera uniformemente, la otra mitad desacelerada uniformemente. Encuentre los valores de la aceleración  $a$  de tal manera que, al llegar al destino, la carga quedará colgando sin moverse. Puede asumir que  $a \ll g$ .

**Pr 86.** Una onda de choque podría considerarse como un salto discontinuo de la presión del aire desde el valor  $p_0$  hasta  $p_1$ , propagándose con velocidad  $c_s$ . Encuentre la velocidad que se obtendrá, cuando esté influenciada por la onda de choque, (a) un bloque en forma de cuña: un prisma cuya altura es  $c$ , cuya base es un triángulo rectángulo con lados  $a$  y  $b$  y que está hecho de material con densidad  $\rho$ ; b) un cuerpo de forma arbitraria con volumen  $V$  y densidad  $\rho$ .



**Pr 87.** Una mancuerna que consta de dos esferas elásticas conectadas con una varilla delgada de acero se mueve paralelamente a su eje con una velocidad  $v$  hacia otra esfera igual. Encuentre la velocidad de la mancuerna después de una colisión central. ¿Se conserva la energía cinética del sistema?



**Apéndice 1: Ley de conservación del momento.**

Consideremos un sistema de masas puntuales de  $N$  (“cuerpos”) y representemos la fuerza que actúa sobre el  $i$ -ésimo punto como una suma,  $\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i$ , donde  $\vec{F}_{ij}$  es la fuerza ejercida sobre el  $i$ -ésimo cuerpo debido al  $j$ -ésimo cuerpo<sup>27</sup> y  $\vec{F}_i$  es una fuerza externa, es decir, la fuerza neta ejercida por dichos cuerpos que no forman parte del sistema dado. Entonces la 2.<sup>a</sup> ley de Newton para el  $i$ -ésimo cuerpo se escribe como

$$m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i.$$

<sup>27</sup>Debido al hecho 5,  $\vec{F}_{ii} = -\vec{F}_{ii}$ , por lo tanto  $\vec{F}_{ii} = 0$ : un cuerpo no puede ejercer una fuerza sobre sí mismo.

<sup>28</sup>Este es el contenido del teorema de Noether (E. Noether 1918).

Si sumamos esta igualdad sobre el índice  $i$ , obtenemos en el lado izquierdo

$$\sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{P},$$

donde  $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$  se llama el momento del sistema de cuerpos. Aquí hemos tenido en cuenta que  $\vec{F}_{ii} = 0$ , e hizo uso de la aditividad de la diferenciación: la derivada de una suma es la suma de las derivadas. Las fuerzas internas en el lado derecho se cancelan:

$$\sum_i \left( \sum_j \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i>j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0.$$

Aquí, primero representamos la suma tomada en todos los pares de índices  $ij$  y luego agrupamos los términos con índices simétricos ( $ij$  y  $ji$ ) juntos ( $\sum_{i>j}$  significa que la suma se toma sobre todos esos pares  $ij$  donde  $i > j$ ); finalmente, usamos la 3.<sup>a</sup> ley de Newton para concluir que  $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$ . Al introducir la fuerza externa neta como  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}.$$

La última igualdad es esencialmente una generalización de la 2.<sup>a</sup> ley de Newton a un sistema de cuerpos. En particular, si no hay fuerzas externas,  $\vec{F} = 0$  y el momento  $\vec{P}$  se conserva.

Observe que si no hay fuerzas externas, las ecuaciones de movimiento (ecuaciones que definen cómo evolucionará el sistema), es decir, ecuaciones que expresan la podemos desplazar el marco de referencia por un vector  $\vec{a}$  sin ningún cambio en las ecuaciones de movimiento. De hecho, los nuevos vectores apuntan a las posiciones de los cuerpos (*los radiovectores*) se expresan en términos de los antiguos como  $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{a}$ . Las fuerzas internas  $\vec{F}_{ij}$  depende solo de la colocación relativa de los cuerpos, es decir, de los vectores  $\vec{r}'_i - \vec{r}'_j = (\vec{r}_i - \vec{a}) - (\vec{r}_j - \vec{a}) = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  que se expresan en términos de las nuevas coordenadas exactamente de la misma manera que en términos de las coordenadas antiguas.

La disciplina de la *mecánica analítica* demuestra que cada simetría de las ecuaciones de movimiento que contiene un parámetro (que puede tomar valores arbitrariamente pequeños) da lugar a una ley de conservación<sup>28</sup>. Aquí tenemos tres parámetros independientes, las componentes del vector de desplazamiento  $a_x, a_y$  y  $a_z$ ; por eso tenemos tres cantidades conservadas, las componentes respectivas del vector de momento  $\vec{P}$ .

**Apéndice 2: Ley de conservación del momento angular.**

De manera similar a la ley de conservación del momento, consideramos un sistema de cuerpos de  $N$ , con las mismas designaciones. Luego, podemos tomar la derivada temporal de la expresión del momento angular del  $i$ -ésimo cuerpo:

$$\frac{d}{dt} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = m_i \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right).$$

Aquí hemos aplicado la regla del producto.  $(ab)' = a'b + ab'$  que sigue siendo válida en álgebra vectorial:  $(\vec{a} \cdot \vec{b})' = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}'$  y  $(\vec{a} \times \vec{b})' = \vec{a}' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}'$  (¡Nótese bien! Necesitamos mantener el orden de los vectores ya que el producto cruz es *anticommutativo*,  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ) Note que  $\frac{d}{dt} \vec{r}_i = \vec{v}_i$  y  $\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$ , por lo tanto, el primer término en el lado derecho se elimina.

Además, sumemos nuestra primera igualdad sobre el índice  $i$  y sustituyamos los términos restantes en el lado derecho usando la 2.<sup>a</sup> ley de Newton,

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \Rightarrow m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \left( \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \right)$$

para obtener

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} = \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Ahora, notemos que debido a la 3.<sup>a</sup> ley de Newton  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ; todas las fuerzas no relativistas macroscópicas entre dos masas puntuales tienen lugar ya sea en el punto de contacto cuando estas masas puntuales se tocan entre sí (fuerza de elasticidad, fuerza de fricción), o son paralelas a la línea que conecta estos puntos (fuerza electrostática, fuerza gravitacional)<sup>29</sup>. En cualquier caso, podemos escribir  $\vec{r}_j = \vec{r}_i + k\vec{F}_{ji}$ ; si multiplicamos esta igualdad por  $\vec{F}_{ji}$ , obtenemos  $\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = -\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$ , por lo tanto, los torques internos se cancelan por torques de la suma; lo que queda es el torque exterior neto  $\vec{T} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ :

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{L}} = \vec{T}.$$

Esto puede considerarse como la generalización de la II ley de Newton al movimiento de rotación de un sistema de cuerpos; si el torque de fuerzas externas es cero ( $\vec{T} = 0$ ) entonces terminamos con la conservación del momento angular,  $\vec{\mathcal{L}} = \text{const.}$

Tenga en cuenta que dentro de la disciplina de la mecánica analítica, la conservación del momento angular puede derivarse de la simetría rotacional de la energía total de un sistema mecánico (mientras giramos el marco de referencia en un ángulo  $\alpha$  alrededor de un eje que atraviesa el origen, la expresión para la energía completa necesita permanecer sin cambios).

### Apéndice 3: Ley de conservación de la energía.

Para derivar la ley de conservación de energía, consideremos el tiempo derivado de la energía cinética de un sistema de cuerpos, definido como  $K = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j \cdot \vec{v}_j$  (aquí escribimos  $v_j^2$  como un producto punto de  $\vec{v}_j$  consigo mismo). Para la diferenciación de productos de puntos, se aplica la regla ordinaria para la derivada de un producto:  $(\vec{a} \cdot \vec{b})' = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}'$ ; ya que el producto punto es conmutativo (es decir,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ), obtenemos  $(\vec{a} \cdot \vec{a})' = 2\vec{a} \cdot \vec{a}'$ . Así,

$$\frac{d}{dt} K = \sum_j m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \cdot \vec{v}_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j,$$

que puede reescribirse para el diferencial de la energía cinética como  $dK = \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j dt$ , donde la fuerza que actúa sobre el  $i$ -ésimo cuerpo puede expresarse como la suma de fuerzas internas y externas,  $\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i$  y  $\vec{v}_i dt = d\vec{r}_i$ . Entonces

$$dK = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i.$$

Aquí,  $\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$  se llama *trabajo* hecho por la fuerza  $\vec{F}_{ij}$ . Si las fuerzas  $\vec{F}_{ij}$

(a) dependen solo de la coordenadas  $\vec{r}_i$  y *no dependen* de las velocidades  $\vec{v}_i$  y el tiempo  $t$ ;

(b) existe tal función  $\Pi \equiv \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$  (en lo sucesivo denominada *energía potencial*) que por cualquier desplazamiento (es decir, infinitamente pequeño) infinitesimal  $d\vec{r}_i$  de los cuerpos, el trabajo total realizado por todas las fuerzas internas  $\vec{F}_{ij}$  y fuerza externa  $\vec{F}_i$  es igual al opuesto del *diferencial total*<sup>30</sup> de la energía potencial, es decir,

$$-d\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_i \left( \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i;$$

luego por cualquier desplazamiento del sistema,  $dK = -d\Pi$  y por lo tanto,  $d(K + \Pi) = 0$ , es decir, la energía total  $E = K + \Pi = \text{const.}$ ; tales fuerzas internas  $\vec{F}_{ij}$  y fuerzas externas  $\vec{F}_i$  que satisfacen las condiciones mencionadas anteriormente se denominan *fuerzas conservativas*.

Tenga en cuenta que la condición (b) anterior es equivalente a decir que el trabajo realizado por las fuerzas depende solo de los estados inicial y final del sistema (es decir, en las posiciones de las masas puntuales) y no a lo largo de las trayectorias que se movían las masas puntuales. Matemáticamente, esta condición también puede reescribirse utilizando derivadas parciales<sup>31</sup>,

$$-\frac{\partial \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)}{\partial x_i} = \sum_j F_{ijx} + F_{ix}; \quad (12)$$

el lado derecho de esta condición es la componente  $x$  de la fuerza total que actúa sobre la  $i$ -ésima masa puntual ( $x_i$  representa la coordenada  $x$  de la  $i$ -ésima partícula); condiciones similares deben ser válidas también para las componentes en  $y$  y  $z$ .

Un caso importante cuando las fuerzas son conservativas es el caso de los campos de fuerza centrales: la fuerza interna entre dos masas puntuales es paralela a la línea que conecta estas masas puntuales y depende del módulo solo de la distancia,

$$\vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) f_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|),$$

y la fuerza externa que actúa sobre  $i$ -ésima masa puntual tiene una propiedad similar con respecto a un punto de referencia en el  $\vec{r}_{i0}$ ,

$$\vec{F}_i = (\vec{r}_i - \vec{r}_{i0}) f_i(|\vec{r}_i - \vec{r}_{i0}|);$$

note que debido a la 3.<sup>a</sup> ley de Newton,  $f_{ij}(r) = f_{ji}(r)$ . Luego, con valores positivos de  $f_{ij}$  y  $f_i$  correspondiente a la repulsión y los valores negativos a la atracción, la energía potencial está dada por

$$\Pi = \sum_{i < j \leq N} g_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) + \sum_{i \leq N} g_i(\vec{r}_i - \vec{r}_{i0}), \text{ donde}$$

$$g_{ij}(r) = - \int^r f_{ij}(r') r' dr', \quad g_i(r) = - \int^r f_i(r') r' dr' \quad (13)$$

(el límite inferior de estas integrales puede ser arbitrario). No es demasiado difícil comprobar que con tal energía potencial, la igualdad (12) se satisface, de hecho, para todos los valores de  $i$ .

Si también hay algunas fuerzas externas no conservativas presentes, entonces podemos separar las fuerzas conservativas y

<sup>29</sup>A velocidades no relativistas, la fuerza de Lorentz que actúa entre dos cargas en movimiento es mucho más pequeña que la fuerza electrostática y, por lo tanto, es un efecto relativista; aun así, la fuerza de Lorentz puede llevar a situaciones con aparentes violaciones de la conservación del momento angular, por ejemplo, en el caso de una carga en movimiento en el centro de una corriente de anillo.

<sup>30</sup>El diferencial total se define como  $d\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \equiv \Pi(\vec{r}_1 + d\vec{r}_1, \vec{r}_2 + d\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N + d\vec{r}_N) - \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$

<sup>31</sup>Derivada parcial de una función: al tomar derivada con respecto a una variable dada, se supone que todas las demás variables son constantes; por ejemplo,  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$  denota la derivada de  $f(x,y)$  con respecto a  $x$  mientras  $y$  se considera una constante.

no conservativas,  $\vec{F}_i = \vec{F}_i' + \vec{F}_i''$ , llevando a

$$d(K + \Pi) = \sum_i \vec{F}_i'' \cdot d\vec{r}_i,$$

donde  $\vec{F}_i''$  denota la suma de todas las fuerzas no conservativas que actúan sobre la  $i$ -ésima masa puntual.

#### Apéndice 4: Fuerza centrífuga y fuerza de Coriolis.

Considere un sistema de referencia, que gira alrededor del origen  $O$  con una velocidad angular  $\vec{\Omega}$  (el vector define el eje de rotación de acuerdo con la regla de la mano derecha). Considere un punto  $P$ , que está inmóvil en el sistema giratorio y denotemos  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ . En el sistema de referencia de laboratorio, el punto  $P$  se mueve con velocidad  $v = r\Omega$  y al estudiar la dirección de la velocidad  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , uno puede ver que  $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ . Ahora, si el punto  $P$  se mueve en el marco de referencia giratorio con velocidad  $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}$  (usemos  $\tau$  para medir el tiempo en el sistema giratorio), entonces esta velocidad adicional debe sumarse a lo que hubiera sido para un punto inmóvil:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} + \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que las derivadas de tiempo de los vectores en los marcos de referencia rotativos y de laboratorio están relacionadas a través de la igualdad

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} + \vec{\Omega} \times .$$

Esto se escribe en forma de operador, lo que significa que podemos escribir cualquier vector (por ejemplo,  $\vec{r}$  o  $\vec{v}$ ) hacia la derecha de los tres términos. En particular, podemos aplicar esta fórmula a los lados derecho e izquierdo de la igualdad  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \left( \frac{d}{d\tau} + \vec{\Omega} \times \right) (\vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d\vec{u}}{d\tau} + \vec{\Omega} \times \vec{u} + \frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{d\tau} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \end{aligned}$$

Aquí debemos tener en cuenta que al tomar derivadas de vectores y productos de vectores, se pueden aplicar todas las reglas conocidas; en particular,  $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$  y  $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$ . También necesitamos la regla para el producto cruz doble,  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ ; puede memorizar esta igualdad teniendo en cuenta que el producto doble es una combinación lineal de los vectores entre paréntesis y que el signo '+' viene con el vector de la posición intermedia. Y así, teniendo en cuenta que  $\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau} = 0$  y  $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{u}$  y suponiendo que  $\vec{r} \perp \vec{\Omega} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{\Omega} = 0$ , obtenemos

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} - \Omega^2 \vec{r}.$$

Recordemos que  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  es la aceleración del punto  $P$  como se ve en el marco de referencia del laboratorio, y  $\frac{d\vec{u}}{d\tau}$  es lo mismo que se ve en el marco de referencia giratorio. Ahora, si  $P$  es una masa puntual  $m$  y hay una fuerza externa  $\vec{F}$  actuando en  $P$ , entonces  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$  y por lo tanto,

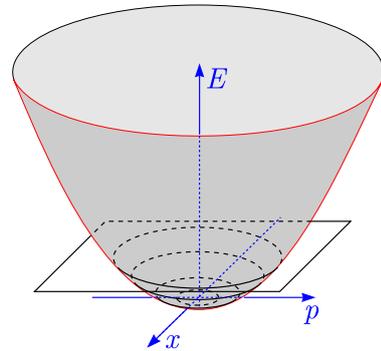
$$m \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \vec{F} - 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \Omega^2 \vec{r},$$

es decir, en el sistema de referencia giratorio, el cuerpo se comporta como si hubiera fuerzas adicionales: la fuerza de Coriolis  $-2\vec{\Omega} \times \vec{u}m$  y la fuerza centrífuga  $\Omega^2 \vec{r}m$ .

#### Apéndice 5: Estabilidad y leyes de conservación.

Es bien sabido que un sistema es estable al mínimo de su energía potencial. ¿Pero por qué? ¿Por qué es un mínimo diferente de un máximo? En el caso del principio de Fermat, hay una clara diferencia: no hay una trayectoria óptica más largo entre dos puntos, el rayo podría ir "en zig-zag", pero definitivamente hay uno que es ¡el más corto!

La razón es simple: en un estado de equilibrio, la energía cinética siempre es mínima (siempre que las masas sean positivas). Lo que realmente necesitamos para una estabilidad es un **extremo condicional de una cantidad conservada (como la energía neta), bajo el supuesto de que las otras cantidades conservadas se mantienen constantes** (el extremo incondicional también está bien). Considere el movimiento de un cuerpo a lo largo del eje  $x$  y describámoslo en el plano de fase, con las coordenadas  $x$  y  $p$  (el momento). La energía total es  $E = U(x) + p^2/2m$ . Ahora, si representamos esta energía como una superficie en un espacio tridimensional con coordenadas  $x$ ,  $p$  y  $E$ , el punto que describe el estado del sistema se moverá a lo largo de la línea de intersección de esa superficie con un plano horizontal  $E = \text{const}$ . En el mínimo de  $U(x)$ , con  $p = 0$ , esta línea de intersección sería solo un punto, porque este es el punto más bajo de esa superficie. Las trayectorias cercanas se obtendrán si ascendemos un poco al plano horizontal,  $E = E_{\text{mín}} + \varepsilon$ , de modo que ya no solo toque la superficie, sino que corte unos pequeños elipses. Todos los puntos de esa trayectoria (las elipses) están cerca del punto de equilibrio, por lo que el estado es, de hecho, estable.



Parece que un sistema puede ser estable también debido a un máximo condicional de la energía neta: mientras que un extremo incondicional de la energía cinética solo puede ser un mínimo, las cosas son diferentes para los extremos condicionales. Quizás el ejemplo más simple es la rotación de un cuerpo rígido. Consideremos un ladrillo rectangular con longitud  $a$ , ancho  $b$  y grosor  $c$  ( $a > b > c$ ). Sea  $I_c$  su momento de inercia para el eje que pasa su centro de masa y perpendicular al plano  $(a, b)$ ;  $I_b$  e  $I_a$  se definen de manera similar. Para un caso genérico, el momento de inercia  $I$  dependerá de la orientación del eje de rotación, pero está bastante claro que  $I_c \geq I \geq I_a$  (se puede demostrar fácilmente una vez que se aprende a usar los cálculos de tensores). Ahora, arrojemos el ladrillo que gira en el aire y estudiemos el movimiento en un marco que se mueve junto con el centro de masa del ladrillo (en ese marco, podemos ignorar la gravedad). Hay dos cantidades conservadas: momento angular  $L$  y energía de rotación  $K = L^2/2I$ . Vemos que para un  $L$  fijo, el sistema tiene una energía mínima para  $I = I_c$  (el eje es paralelo al borde más corto del ladrillo) y la energía máxima para  $I = I_a$  (el eje es paralelo al más largo borde del ladrillo).

Bueno, en realidad la rotación con la energía mínima sigue siendo un poco más estable que la de la energía máxima; la razón está en la disipación. Si tratamos de representar el movimiento del sistema en el espacio de fase (como se describió anteriormente), una superficie de energía en forma de cuenco (como se muestra en la figura anterior) sería sustituida por una en forma de colina; en el equilibrio, la trayectoria de la fase se contrae en un punto, el punto donde la parte superior de la “colina” toca un plano horizontal  $E = E_{\text{máx}}$ . Debido a la disipación, la energía disminuirá,  $E = E_{\text{máx}} - \varepsilon$  y la trayectoria de la fase sería una espiral de enrollamiento lento. Entonces, aunque probablemente esté acostumbrado a saber que la disipación atrae un sistema hacia un estado estable, aquí es al revés, jaleja al sistema del estado estable! Esto es lo que se conoce como *inestabilidad disipativa*.

## Apéndice 6: Formalismo lagrangiano.

En nuestro enfoque de la mecánica, postulamos las leyes de Newton; en base a eso, derivamos la ley de conservación de energía que es válida para las fuerzas conservativas y usando la ley de conservación de energía, llegamos al método de coordenadas generalizadas.

En *mecánica analítica*, el orden es opuesto. Primero, postulamos que cualquier sistema mecánico tiene una cierta energía potencial y una cierta energía cinética, las cuales son aditivas; también establecemos una fórmula para la energía cinética de las masas puntuales y para las energías potenciales de las interacciones de masa puntual dependiendo del tipo de interacción (esto se hace de manera similar a cómo establecimos reglas para calcular fuerzas para diferentes tipos de interacción en el capítulo 2).

En segundo lugar, consideremos un sistema mecánico que obedece a  $n$  grados de libertad, es decir, para especificar de manera única el estado del sistema, necesitamos  $n$  parámetros. Postulamos que si este sistema evoluciona de un estado descrito por un conjunto de coordenadas  $q_i$ ,  $i \in [1, n]$  en el momento  $t = \tau$  [este estado corresponde a un punto en el *espacio de configuración* de  $n + 1$  dimensiones con coordenadas  $(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ ] a otro estado  $q'_i$  a  $t = \tau'$  entonces la evolución del sistema en el tiempo tiene lugar a lo largo de ese trayecto  $q_i(t)$  (una línea curva que conecta los estados inicial y final en el espacio de configuración) que hace que el valor de una determinada integral  $\mathcal{S}$  lo más pequeña posible. Esta integral, conocida como la *acción*, se define a través de todo el potencial y las energías cinéticas del sistema, denotadas como  $V$  y  $T$ , respectivamente;  $V$  depende de las coordenadas,  $V = V(q_i)$ ,  $i \in [1, n]$  y  $T$  también en la tasa cambiante de coordenadas  $\dot{q}_i$ :

$$\mathcal{S} = \int_{\tau}^{\tau'} \mathcal{L}[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] dt, \quad (14)$$

donde

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t) \quad (15)$$

es llamado *Lagrangiano* del sistema y el postulado mismo como el *principio de mínima acción*<sup>32</sup>.

Usando los métodos de *análisis variacional*, se puede demostrar que la integral<sup>33</sup>  $\mathcal{S}$  tiene un extremo si

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}; \quad (16)$$

aquí  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  significa que derivamos el lagrangiano  $L(q_i(t), \dot{q}_i, t)$  con respecto a solo una de sus  $2n + 1$  variables,  $\dot{q}_i$ , considerando todas las otras variables como constantes.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  se define de forma análoga. Mientras tanto,  $\frac{d}{dt}$  denota una derivada total con respecto al tiempo, es decir, tenemos en cuenta que  $\mathcal{L}$  depende del tiempo tanto explícitamente a través de su último argumento  $t$ , así como implícitamente ya que las cantidades  $q_i$  y  $\dot{q}_i$  también son funciones del tiempo. Tenga en cuenta que la ecuación 16 es válida para cada  $i$ , para que tengamos un sistema de  $n$  ecuaciones. Del principio de mínima acción a la ecuación (16), solo hay un paso matemático, por lo que podemos decir que la mecánica analítica básicamente postula la ecuación (16).

¿Qué camino es mejor: la forma histórica de postular las leyes de Newton, o postular la ecuación 16? Ambos enfoques tienen puntos fuertes y débiles. Si bien el enfoque clásico se desarrolla paso a paso, a partir de hallazgos experimentales inmediatos, el enfoque de la mecánica analítica elimina el principio de mínima acción “de la nada”. Mientras tanto, ecuación (16) nos brinda una herramienta universal y poderosa para el análisis teórico (cuyo uso no se limita a la mecánica): tan pronto como tengamos una expresión para el lagrangiano, podemos escribir la ecuación de evolución que describe cómo evolucionará el sistema. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que solo en el caso de la mecánica clásica,  $\mathcal{L} = T - V$  y se debe mantener la vigilancia incluso en el caso de la mecánica clásica (ver más abajo).

De hecho, el principio de mínima acción se puede introducir de forma más natural (no “de la nada”) utilizando la mecánica cuántica. De hecho, si consideramos una masa puntual como una onda de probabilidad de mecánica cuántica, utilizando aproximación cuasiclásica, podemos expresar la fase de la onda como

$$\varphi = \int (\vec{k} \cdot d\vec{r} - \omega dt) = \hbar^{-1} \int (\vec{p} \cdot d\vec{r} - E dt); \quad (17)$$

aquí  $\vec{p}$  es el momento y  $E$  la energía de la partícula. Si tenemos en cuenta que  $d\vec{r} = \vec{v} dt$  y  $\vec{v} \cdot \vec{p} = 2T$  entonces podemos escribir  $\varphi = \hbar \int [2T - (T + V)] dt = \hbar \mathcal{S}$ . Entonces, la acción  $\mathcal{S}$  nos da directamente la fase de la onda. Las ondas se acumulan de manera constructiva si llegan a la misma fase y muchas ondas que vienen a lo largo de diferentes trayectos llegan casi a la misma fase si estos trayectos están cerca del trayecto de mínima acción. Cabe señalar que ocurre exactamente el mismo fenómeno en el caso de la propagación de la luz y puede resumirse como el principio de Fermat<sup>34</sup>. Podemos decir que de acuerdo con el principio de Huygens para la propagación de ondas, la amplitud de la onda de probabilidad se puede encontrar como la suma de las contribuciones de todos los posibles trayectos de trazado de rayos; sin embargo, la mayoría de estas contribuciones se cancelan debido a fases opuestas y solo la contribución del “trayecto óptimo” (y su vecindad inmediata) se deja intacta; “óptimo” significa que corresponde a un extremo (que parece

<sup>32</sup>También como el *principio de acción estacionaria*.

<sup>33</sup>Más precisamente, el *funcional*, una cantidad escalar que depende de qué función(es)  $q_i(t)$  tenemos.

<sup>34</sup>Podemos ver el arco iris exactamente por la misma razón: el arco iris se puede ver porque el ángulo por el cual se desvía un haz de luz después de una reflexión dentro de una gota de agua esférica tiene un extremo (en función del parámetro objetivo); por lo tanto, cerca del extremo del ángulo de desviación, un amplio rango de parámetros objetivos corresponde a un rango estrecho de ángulos de desviación.

ser un mínimo) de la acción. Entonces, podemos decir que una masa puntual se mueve a lo largo de la trayectoria de mínima acción.

Ahora, verifiquemos si el principio de mínima acción está de acuerdo con las leyes de Newton. Para este fin, consideremos un sistema de masas puntuales  $m_i$ ,  $i \in [1, n]$  y usemos las coordenadas euclidianas ordinarias: consideremos  $\vec{r}_i$  apuntar a la posición de la  $i$ -ésima masa puntual. Luego definimos (postulamos) el lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_i \vec{v}_i^2 - \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots);$$

aquí hemos denotado  $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$  y asumí que todas las fuerzas de interacción son conservativas:  $\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$  denota la energía potencial total en función de las coordenadas de todas las partículas. Entonces, si aplicamos ecuación 16 a este lagrangiano y teniendo en cuenta que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ix}} = m_i v_{ix}$  (donde el índice  $x$  denota la proyección de un vector en el eje  $x$ ), obtenemos

$$\frac{d}{dt} m_i v_{ix} = - \frac{\partial \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)}{\partial x_i}.$$

De acuerdo a la ecuación 12, lo que tenemos a la derecha es la componente en  $x$  de la fuerza que actúa sobre la  $i$ -ésima partícula (obviamente, se obtiene una expresión similar para las componentes en  $y$  y  $z$ ). Entonces, concluimos que si se escribe para coordenadas euclidianas, la ecuación (16) es equivalente a las leyes de Newton. Mientras tanto, la ecuación (16) satisfecha es equivalente a que el principio de mínima acción sea válida. Ahora, notemos que el principio de mínima acción se formula independientemente del sistema de coordenadas: si una determinada trayectoria  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$  tiene una acción mínima en coordenadas euclidianas  $\vec{r}_i$  entonces sigue siendo mínimo incluso si se expresa en términos de coordenadas generalizadas  $q_i = q_i(t)$ . Dado que la trayectoria tiene una acción extrema en términos de coordenadas generalizadas  $q_i$  entonces (según los resultados del análisis variacional), la ecuación (16) también debe ser válida cuando se utilizan las coordenadas generalizadas  $q_i$ . Esto completa nuestra prueba<sup>35</sup> que las leyes de Newton y la ecuación (16) son equivalentes.

Aunque de alguna manera completamos la prueba, debemos hacer un comentario sobre los casos en que se recupera el número de grados de libertad debido a varias restricciones. Como ejemplo, consideremos un cuerpo rígido hecho de moléculas de  $N$ ; este conjunto de moléculas tiene  $3N$  grados de libertad. Sin embargo, las distancias relativas entre las moléculas están fijadas por las fuerzas moleculares, de modo que solo quedan seis grados de libertad: tres números fijan la posición del centro de masa y la orientación del cuerpo está fijada por tres coordenadas angulares. Anteriormente hemos demostrado el principio de mínima acción para un conjunto de masas puntuales (moléculas), por lo que sabemos que nuestro sistema evoluciona en el espacio de configuración dimensional  $3N + 1$  a lo largo de dicha curva  $\sigma$  que conecta el punto inicial  $A$  con el punto de destino  $B$  que minimiza la acción. En este espacio de configuración, el lagrangiano también debe tener en cuenta las energías de interacción intermolecular. Si bien la expresión de las energías de interacción intermolecular que puede ser bastante complicada, siempre que solo nos interese la dinámica macroscópica,

solo tenemos que fijar las distancias. Las distancias se pueden fijar con un lagrangiano simplificado: decimos que la energía de interacción intermolecular es cero, si la distancia entre dos moléculas es igual a la que debería ser y de lo contrario se vuelve muy grande. Debido a las distancias intermoleculares que se están fijando, el estado de este sistema de moléculas se puede describir completamente mediante seis coordenadas generalizadas; esto significa que todas las trayectorias en el espacio de configuración de  $3N + 1$  dimensiones están restringidos a una hipersuperficie de seis dimensiones  $\mathcal{M}$  (los puntos  $A$  y  $B$  también deben estar en esa hipersuperficie). Sabemos que la trayectoria  $\sigma$  minimiza la acción entre  $A$  y  $B$  en el espacio de configuración de  $3N + 1$  dimensiones; la hipersuperficie  $\mathcal{M}$  es parte de ese espacio, por lo que seguramente también minimiza la acción entre  $A$  y  $B$  en la hipersuperficie  $\mathcal{M}$ . Por lo tanto, la ecuación 16 debe seguir siendo válida cuando usamos seis coordenadas generalizadas para describir el estado de un cuerpo rígido. Una argumentación similar funciona no solo para un cuerpo rígido, sino para cualquier restricción que fije posiciones relativas de las partes de un sistema (y, por lo tanto, reduzca el número de grados de libertad).

De las discusiones del párrafo anterior también podemos derivar una regla importante: si escribimos el lagrangiano usando coordenadas generalizadas para un sistema con restricciones intrínsecas, el número de coordenadas debería ser lo más pequeño posible. Por ejemplo, si tenemos un cuerpo rígido, deberíamos usar seis coordenadas y no siete, porque el valor de la séptima coordenada puede derivarse de las primeras seis (con la séptima coordenada, necesitaríamos agregar un término adicional al lagrangiano fijando el valor de la séptima coordenada).

Entonces, ahora tenemos dos opciones alternativas: podemos usar la ecuación (16) y podemos usar el método 6 en cuyo caso derivamos la ecuación de movimiento de la ley de conservación de energía. Estos dos enfoques son bastante similares: en ambos casos necesitamos expresar las energías cinética y potencial en términos de coordenadas generalizadas y sus derivadas con respecto al tiempo. Sin embargo, también hay ciertas diferencias: en un caso, derivamos la ecuación de movimiento directamente de la ley de conservación de energía; en el otro caso consideramos la diferencia de estas dos energías y aplicamos una fórmula que podemos considerar postulada o derivada de las leyes de Newton de una manera bastante complicada.

¿De qué manera es mejor? Para comenzar, se debe enfatizar que si bien la ecuación (16) siempre se puede usar, el método 6 basado en la ley de conservación de energía solo se puede aplicar en aquellos casos en que haya un solo grado de libertad, es decir, el estado del sistema se puede describir con una sola coordenada generalizada. De hecho, al tomar la derivada temporal de la ley de conservación de energía, obtenemos una ecuación diferencial, pero necesitamos tantas ecuaciones como funciones desconocidas (grados de libertad). Sin embargo, para la mayoría de los problemas de la Olimpiada, esta condición se cumple (tenga en cuenta que cada cantidad adicional conservada, por ejemplo, momento, reduce el número efectivo de grados de libertad en uno).

Entonces, comparemos estos dos métodos cuando tengamos

<sup>35</sup>De la cual ignoramos la parte matemática usando análisis variacional.

una coordenada generalizada  $q$  y supongamos que las energías no dependen explícitamente del tiempo. En el caso de la mecánica newtoniana, la energía cinética es proporcional a la velocidad al cuadrado, por lo que podemos suponer que  $T = \frac{1}{2}\mathcal{M}(q)\dot{q}^2$ . Entonces, la conservación de la energía dicta que  $\frac{1}{2}\mathcal{M}(q)\dot{q}^2 + V(q) = E$ , por lo tanto  $\frac{1}{2}\mathcal{M}'(q)\dot{q}^3 + \mathcal{M}(q)\dot{q}\ddot{q} + V'(q)\dot{q} = 0$  y

$$\mathcal{M}(q)\ddot{q} = -\frac{1}{2}\mathcal{M}'(q)\dot{q}^2 - V'(q).$$

Mientras tanto, el lagrangiano se expresa como  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{M}(q)\dot{q}^2 - V(q)$ ; entonces, con  $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{d}{dt}\mathcal{M}(q)\dot{q} = \mathcal{M}'(q)\dot{q}^2 + \mathcal{M}(q)\ddot{q}$ , la ecuación 16 se reescribe como

$$M'(q)\dot{q}^2 + M(q)\ddot{q} = \frac{1}{2}M'(q)\dot{q}^2 - V'(q).$$

Es fácil ver que obtuvimos en ambos casos la misma ecuación y que matemáticamente, el nivel de dificultad era casi el mismo. Sin embargo, necesitábamos memorizar la ecuación (16), lo que hace que el método basado en la ley de conservación de energía sea un poco más fácil.

Antes de llegar a una conclusión final, consideremos un sistema de dos pelotas de masa  $m$ , conectadas con un resorte de longitud  $a$  y rigidez  $k$ , que gira con momento angular  $\vec{L}$  (que es perpendicular al resorte) en ingravidez. Aquí, parece que tenemos dos grados de libertad (el ángulo y la longitud del resorte), pero una ley de conservación adicional a la de la energía (de momento angular) reduce el número efectivo de grados de libertad a uno. Usemos la deformación  $x$  del resorte como la coordenada generalizada. Entonces,

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{4} + \frac{L^2}{m(a+x)^2}, \quad \Pi = \frac{1}{2}kx^2.$$

Lo notable aquí es que la energía cinética depende ahora no solo de  $\dot{x}$ , pero también en  $x$ ; en efecto, el segundo término de la energía cinética se comporta como potencial y puede combinarse en una energía potencial efectiva en la expresión de la energía completa. Siguiendo el método 6, obtenemos

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}\dot{x} - \frac{2L^2}{m(a+x)^3}\dot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{4L^2}{m^2(a+x)^3} - 2\frac{k}{m}x.$$

Además, intentemos obtener el mismo resultado usando el lagrangiano (¡Nota! ¡Esto estará mal!):

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{4} + \frac{L^2}{m(a+x)^2} - \frac{1}{2}kx^2,$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2}m\ddot{x} = -\frac{2L^2}{m(a+x)^3} - kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{4L^2}{m^2(a+x)^3} - 2\frac{k}{m}x.$$

Este no es el mismo resultado que antes ¡el primer término en el lado derecho tiene un signo diferente! Entonces, ¿qué salió mal? El primer resultado es claramente el correcto ya que la energía total se conserva claramente aquí. Lo que salió mal es que al hacer uso de la ley de conservación del momento angular para reducir el número de coordenadas, cambiamos los puntos de inicio y finalización en el espacio de configuración. Como probamos anteriormente, el principio de mínima acción [y, por lo tanto, la ecuación (16)] es válida si no usamos las leyes de conservación para reducir el número de grados de libertad y todas las leyes de conservación son para ser considerado como la consecuencia de la ecuación (16). En este caso, el número original de grados de libertad era dos: podemos usar la deformación  $x$  y el ángulo de rotación  $\varphi$  del resorte para describir

completamente el estado del sistema. Si usamos estas dos coordenadas con el lagrangiano correspondiente, todo será correcto: la acción

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m\dot{x}^2}{4} + \frac{m\dot{\varphi}^2(a+x)^2}{4} - \frac{1}{2}kx^2 \right] dt$$

se minimiza por la trayectoria verdadera si comparamos las trayectorias que conectan el estado inicial  $x_1, \varphi_1$  y el estado final  $x_2, \varphi_2$ . Ahora, sin embargo, hemos eliminado la variable  $\varphi$  y si eliminamos la condición para los ángulos inicial y final, muchas más trayectorias conectarán el estado inicial  $x_1$  con el estado final  $x_2$ : la verdadera trayectoria ya no necesita ser la que tenga la acción más pequeña. Una lección importante de este análisis es que **no se usa la ecuación (16) si se reduce el número de grados de libertad haciendo uso de una restricción (una ley de conservación) que involucra derivadas temporales de las coordenadas**, porque al fijar el valor de una derivada del tiempo no arreglamos el valor de la coordenada misma. Si tiene tales leyes de conservación y logra encontrar tantas restricciones que puede reducir el número de coordenadas a uno, continúe y use el método 6; de lo contrario, mantenga el número original de coordenadas y aplique la ecuación (16).

Finalmente, también enfatizamos que el lagrangiano está dado por la diferencia de las energías cinética y potencial solo en el caso de la mecánica clásica; en otros casos, la primera tarea es descubrir la expresión para el lagrangiano. ¿Cómo hacerlo? Básicamente hay dos opciones. Suponiendo que ya conocemos la ecuación de movimiento en coordenadas euclidianas  $x_i$ , podemos hacerlo por prueba y error encontrando  $\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t)$  de manera que la ecuación (16) se vuelve idéntica a la ecuación de movimiento. Tenga en cuenta que la ecuación de movimiento original no necesita tener orígenes en física. Sin embargo, una vez que hayamos encontrado el lagrangiano correspondiente, podemos interpretarlo físicamente: por ejemplo, si el lagrangiano obedece a la simetría traslacional, podemos usar el teorema de Noether para encontrar una cantidad conservada y llamarla momento<sup>36</sup>. En electromagnetismo, usaremos este método para derivar el momento generalizado de una partícula cargada en un campo magnético.

La segunda opción funciona si estudiamos un sistema que puede considerarse mecánico cuántico; ilustremos esto considerando una masa puntual relativista. Sabemos que el principio de mínima acción en mecánica corresponde al principio de Huygens [véase la ecuación (17)] y por lo tanto, la acción debe ser la fase de la onda de probabilidad mecánica cuántica, multiplicada por  $\hbar$ , en ese caso, la acción clásica sería el límite de velocidad pequeña de la relativista. Entonces, con  $m$  que denota la masa relativista y  $m_0$  la masa en reposo de una partícula,

$$\mathcal{S} = \int (\vec{p}\cdot\vec{v} - E) dt = \int (mv^2 - T - V) dt = \int [m(v^2 - c^2) - V] dt,$$

por lo tanto

$$\mathcal{L} = m(v^2 - c^2) - V = -m_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V.$$

Es fácil verificar que si ponemos este lagrangiano en la ecuación 16, teniendo en cuenta que  $V = V(x, y, z)$  y  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , obtenemos la 2.ª ley de Newton relativista. Como podemos ver, no hay energía cinética ahora incluida en el lagrangiano.

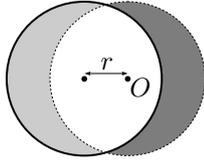
<sup>36</sup>De hecho, en el caso de la simetría traslacional ni siquiera necesitamos usar el teorema de Noether:  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , por lo tanto  $\frac{d}{dt}p_i = 0$ , donde  $p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$  es la  $i$ -ésima componente del momento.

## 6. SUGERENCIAS

1. Escriba el balance de torques para el punto de contacto  $O$  del aro y el eje. ¿Cuál es el ángulo que forma la tangente al eje en el punto  $O$  con la horizontal (dado que el cable se desliza sobre el eje)?
2. Escriba la ecuación de los torques para el sistema de bloque-cilindro con respecto al punto de contacto del cilindro y el plano inclinado. ¿Qué ángulo con respecto a la horizontal está formado por la tangente al cilindro construido en la posición del pequeño bloque?
3. De acuerdo con la idea 4, considere el sistema “barra  $CD$  + la masa  $m$ ” como un todo; hay cuatro fuerzas actuando sobre este:  $m\vec{g}$ ,  $\vec{F}$  y las fuerzas de tensión de las varillas,  $\vec{T}_{AC}$  y  $\vec{T}_{BD}$ . Las fuerzas de tensión son las que no sabemos y no queremos saber. De acuerdo con la idea 2, estos se eliminarán del balance de torques que actúan sobre la barra  $CD$  con respecto al punto de intersección de  $AC$  y  $BD$ . De hecho, debido al hecho 20, la fuerza de tensión en la barra  $AC$  es paralela a  $AC$ ; lo mismo se aplica a la barra  $BD$ . Ahora, ¿cuál debe ser el torque de la fuerza  $F$ ? ¿Para qué dirección de la fuerza se logrará este torque con la magnitud mínima?
4. La suma vectorial de las fuerzas  $\vec{F}$  y  $m\vec{g}$  tiene que compensar la suma de la fricción y la fuerza normal  $\vec{f} = \vec{N} + \vec{F}_h$ , es decir, tiene que estar en ángulo  $\arctan \mu$  con respecto a la normal del plano. Dibujemos el triángulo de fuerzas el vector  $m\vec{g} + \vec{f} + \vec{F} = 0$ : el vector  $m\vec{g}$  se puede dibujar de inmediato (se conoce su dirección y magnitud), la dirección de  $\vec{f}$  se puede observar por una línea recta que pasa por el punto terminal de  $m\vec{g}$ .  $\vec{F}$  tiene que conectar esa línea recta al punto inicial de  $m\vec{g}$ . ¿Para qué dirección es mínima su magnitud?
5. Vaya al marco de referencia de la superficie inclinada (invogue las ideas 7 y 8) y use el mismo método que para el problema 4 ( $\vec{a} + \vec{g}$  funciona como la gravedad efectiva  $\vec{g}_e$ ).
6. Use un marco de referencia giratorio asociado con el cilindro (donde el bloque está en reposo y la fuerza centrífuga  $\vec{f}_t$  es constante y apunta hacia abajo). (a) El punto terminal de la fuerza neta de gravedad y la fuerza centrífuga se mueve en un círculo y tiene que ser igual a la fuerza neta  $\vec{f}$  de las fuerzas normales y de fricción. ¿Cuál es el ángulo máximo permitido entre los vectores  $\vec{f}_t$  y  $\vec{f}$  para que no haya resbalones? ¿Para qué dirección de  $m\vec{g}$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{f}_t$  y  $\vec{f}$  máximo? (b) Todavía hay solo tres fuerzas; mientras haya un equilibrio, estos tres vectores deben formar un triángulo y, por lo tanto, deben estar en el mismo plano. De acuerdo con la idea C-11, representaremos el equilibrio de fuerza en este plano, es decir, en el plano definido por los vectores  $\vec{g}$  y  $\vec{f}_t$ . El enfoque utilizado en la parte (a) todavía se puede utilizar, pero el punto terminal de  $\vec{f}_t + m\vec{g}$  dibuja solo un arco de un círculo completo. Determine el ángulo central de ese arco. Dependiendo de la longitud del arco, puede ocurrir que el ángulo máximo entre la superficie sea normal (= a la dirección de  $\vec{f}_t$ ) y  $\vec{f}$  se logra en uno de los puntos finales del arco.
7. Tenga en cuenta que mientras rueda a velocidad constante, el centro de masa de todo el carro se mueve también a una velocidad constante, es decir, no debe haber fuerzas horizontales que actúen sobre el carro. Además, cada uno de los cilindros gira con una velocidad angular constante, por lo tanto, no debe haber ningún torque que actúe sobre ellos, por lo tanto, la fuerza de fricción debe ser cero. Use el marco giratorio de una rueda; aplique las ideas 12 y 11 sustituya un cuerpo asimétrico (el cilindro con un agujero) con dos cuerpos simétricos, un cilindro sin agujero y un cilindro superpuesto de densidad negativa; luego use las ideas 9 y 10 para dibujar las fuerzas de gravedad y las centrífugas; tenga en cuenta que la barra puede proporcionar cualquier fuerza horizontal, pero no puede ejercer ninguna fuerza vertical.
8. Basados en la idea 14, ¿En qué línea tiene que estar el punto de intersección de las fuerzas de fricción? ¿Qué se puede decir sobre los dos ángulos formados por los vectores de fuerza de fricción y la dirección del hilo? Dada la idea 1 (el eje es perpendicular con la tensión en el hilo)? Ahora combine las dos conclusiones anteriores. ¿Dónde está el punto de intersección de los vectores de fuerza de fricción? ¿Cuál es la dirección de los vectores de velocidad del cilindro en los puntos donde el cilindro descansa sobre la banda rugosa? ¿Dónde está el eje de rotación instantánea del cilindro (vea cómo encontrarlo en la guía de cinemática)? ¿Cuál es el vector de velocidad del punto central del cilindro? (b) ¿Se violará la condición de equilibrio que se encuentra arriba si la superficie es uniformemente rugosa?
9. Dibuje un círculo cuyo diámetro sea la línea recta que conecta los puntos de apoyo. Use el hecho 22: ¿en qué curva puede moverse la pelota? ¿Dónde está el punto más bajo de esta curva?
10. Considere los torques que actúan sobre la barra con respecto a la bisagra. ¿Para qué ángulo  $\alpha$  la fuerza neta de las fuerzas normales y de fricción empujará la barra más fuerte contra la tabla?
11. ¿Por cuánto descenderá el bloque si el hilo se extiende  $\delta$ ?
12. Supongamos que la componente horizontal de la tensión en la cuerda es  $T_x$ . ¿Cuál es la componente vertical de la tensión al lado del techo? ¿Al lado del peso? Escriba la condición para el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre a) el peso y b) el sistema de peso y cuerda (ve la idea 4).
13. Viendo como  $H \ll L$ , claramente la curvatura de la cuerda es pequeña y el ángulo entre la tangente a la cuerda y la horizontal sigue siendo pequeño en todas partes. A partir del balance de fuerza horizontal para la cuerda, exprese la componente horizontal de la fuerza de tensión  $T_x$  en función de la longitud  $l$  (tenga en cuenta que mientras  $T_x$  permanece constante sobre todo el segmento colgante de la cuerda, vamos a necesitar su valor en el punto  $P$  que separa los segmentos colgantes y del suelo). Anote el equilibrio de los torques que actúan sobre la pieza colgante de la cuerda con respecto a la mano de sujeción (de acuerdo con lo que se mencionó anteriormente, el brazo de la fuer-

za de gravedad puede aproximarse a  $l/2$ ). Como resultado, debe obtener una ecuación cuadrática para la longitud  $l$ .

14. Use la idea 9: cambie al marco de referencia de la bisagra giratoria. a) Siguiendo la idea 19, escriba la condición del equilibrio de torques con respecto a la bisagra (idea 2) para un ángulo de desviación pequeño  $\varphi$ . ¿Qué genera un torque mayor,  $m\vec{g}$  o la fuerza centrífuga? (Tenga en cuenta que, alternativamente, la idea 21 también se puede utilizar para abordar este problema). b) Siguiendo la idea 21, exprese la energía potencial neta para los ángulos de desviación pequeños  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  usando la energía de la fuerza centrífuga (¡que se parece a la fuerza elástica!) y la fuerza gravitacional; de acuerdo con la idea 20, conserve solo los términos cuadráticos. Debe obtener un polinomio cuadrático de dos variables,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . El equilibrio  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  es estable si corresponde al mínimo de energía potencial, es decir, si el polinomio produce valores positivos para cualquier desviación del punto de equilibrio; esta condición conduce a dos desigualdades. Primero, al considerar  $\varphi_2 = 0$  (con  $\varphi_1 \neq 0$ ) concluimos que el multiplicador de  $\varphi_1^2$  tiene que ser positivo. En segundo lugar, para cualquier  $\varphi_2 \neq 0$ , el polinomio debería ser estrictamente positivo, es decir, si equiparamos esta expresión a cero y la consideramos como una ecuación cuadrática para  $\varphi_1$ , no debería haber raíces con valores reales, lo que significa que el discriminante debería ser negativo.
15. Aplique las ideas 19 y 22 para una posición angular de la viga, para la cual la magnitud de la fuerza de flotación no cambia (es decir, suponiendo un equilibrio de fuerzas verticales). De la idea 2, tome el centro de masa como el punto de pivote. Mientras calcula el torque de la fuerza de flotación, use las ideas 11, 12: si una determinada región no tiene agua desplazada, la densidad del agua desplazada es cero, pero puede representarse como una masa negativa y positiva superpuesta densidades:  $0 = \rho_a + (-\rho_a)$ . La sección transversal de la parte subacuática de la viga podría representarse como una superposición de un rectángulo y dos triángulos estrechos colocados simétricamente (uno de ellos de masa negativa).
16. El sistema agua-recipiente se ve afectado por la gravedad y la fuerza de reacción normal de la superficie horizontal sobre el líquido. Como conocemos la presión del líquido en la base del recipiente, podemos expresar la masa del recipiente desde la condición vertical para el equilibrio.
17. Para calcular la primera corrección utilizando el método de perturbación, utilizamos el hecho 51 y el sistema de referencia del bloque que se desliza hacia abajo de manera uniforme y rectilínea: conociendo la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción podemos encontrar sus componente en las direcciones de  $\vec{w}$  y  $\vec{u}$ . El signo de esta último cambia después de medio período, por lo que se cancela al promediar.
18. Elija el origen del eje vertical  $x$  para que sea un punto en la superficie del océano muy alejado del depósito de hierro. Para el punto de referencia cero del potencial gravitacional de la Tierra, elegiremos  $x = 0$  (es decir,  $\varphi_{\text{tierra}} = gx$ ), para el del depósito de hierro tomaremos un punto en el infinito. Entonces, para los puntos en la superficie del océano muy lejos del depósito de hierro, el potencial gravitacional es cero. Queda por encontrar una expresión para el potencial por encima del depósito de hierro en función de  $x$  (utilizando el principio de superposición) y equipararlo a cero.
19. Empleemos el marco de referencia de la plataforma. Consideremos el equilibrio de los pares con respecto al eje del disco pequeño (entonces el brazo de palanca de la fuerza ejercida por ese eje es cero). Dividamos el disco en pequeñas piezas de igual tamaño. Las fuerzas de fricción que actúan sobre las piezas son iguales en magnitud y se dirigen a lo largo de las velocidades lineales de los puntos del disco (en el marco de referencia elegido). Como el movimiento del disco puede representarse como una rotación alrededor de un eje instantáneo, se forman círculos concéntricos de vectores de fuerza de fricción (centrados en el eje de rotación instantánea). Claramente, el torque neto de estos vectores con respecto al eje del disco es menor, cuando menor es la curvatura de los círculos (es decir, cuanto más lejos está el eje de rotación instantánea): el torque es cero cuando el eje de rotación instantánea está en el infinito y los círculos concéntricos se convierten en líneas rectas paralelas. Un eje de rotación instantánea en el infinito significa que el movimiento es traslacional,  $\omega_3 = 0$  (ya que la velocidad lineal  $v = \omega_3 r$  de un punto dado es finito, pero  $r = \infty$ ).
20. El eje instantáneo de rotación está a una distancia  $r = v/\omega$  desde el eje del disco. Usemos las mismas particiones imaginarias que en el problema anterior. Ahora calcule el componente de la fuerza neta en la dirección del movimiento. Observe que las fuerzas de fricción en los puntos que son simétricas con respecto al eje de rotación instantánea se equilibran entre sí a través de una región circular completa de radio  $R - r$ . La región no equilibrada, lamentablemente, tiene forma para el uso de cálculo. Imaginemos extender la región “equilibrada” hasta  $R$  (el círculo discontinuo en la figura). La parte de esta región equilibrada extendida, donde no hay un disco giratorio real debajo (la media luna gris oscura en la figura), podría representarse como una superposición de los dos discos, uno giratorio en sentido horario y otro en sentido antihorario. En ese caso, el componente en sentido horario participa en el equilibrio, mientras que el componente en sentido antihorario permanece desequilibrado. En resumen, dos regiones delgadas en forma de media luna permanecen desequilibradas: una corresponde al disco real (gris claro en la figura), la otra, a un disco que gira en sentido antihorario (gris oscuro); normal a  $\vec{v}$ , el ancho de estas regiones es en todas partes igual a  $r$ . La fuerza neta es la más fácil de encontrar al integrarse a través de las regiones en forma de media luna usando la coordenada polar  $\varphi$ :  $|d\vec{F}| = B \cdot dA$ , donde  $dA$  es el área del elemento de superficie;  $dF_x = B \cos \varphi dA = C \cos^2 \varphi d\varphi$ ,  $F_x = \int dF_x = C \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi$ . ¿Cuáles son los valores de las constantes  $B$  y  $C$ ?



21. Considere el vector unitario  $\hat{d}$  dirigido a lo largo del vector de desplazamiento infinitesimal del centro de la masa en el instante en que el lápiz comienza a moverse. Expresemos sus coordenadas en los ejes cartesianos  $(x, y, z)$ , donde  $x$  es paralelo al lápiz y el plano  $(x, y)$  es paralelo a la pendiente inclinada. Usando las fórmulas de rotaciones espaciales, lo representamos en las nuevas coordenadas  $(x', y', z)$ , que se rotan con respecto a  $(x, y, z)$  alrededor del eje  $z$  por ángulo  $\varphi$  (para que el eje  $x'$  sea horizontal). Usando las fórmulas de rotaciones espaciales, expresamos la coordenada vertical  $z'$  de  $\hat{d}$  en los ejes  $(x', y', z')$ , que se obtiene de los ejes  $(x', y', z)$  girando sobre el  $x'$  por el ángulo  $\alpha$ .
22. La cuerda conecta los dos puntos con la distancia más corta a lo largo del lado del cilindro; cuando está desplegado, el cilindro es un rectángulo. Considere el plano vertical que toca la superficie del cilindro que incluye la porción colgante de la cuerda. Este avión y el cilindro se tocan a lo largo de una línea recta  $s$ . Si imagina desplegar el cilindro, el ángulo entre la cuerda y la línea recta  $s$  es igual al ángulo de inclinación del cilindro  $\alpha$ . Dado esto,  $l$  es fácil de encontrar. Cuando el peso oscila, el rastro de la cuerda aún permanece recto en el cilindro desplegado. Por lo tanto, la longitud de la cuerda colgante (y, por lo tanto, la energía potencial del peso) no dependen en ningún estado oscilatorio de si la superficie del cilindro es verdaderamente cilíndrica o se despliega en una superficie vertical plana (siempre que la orientación espacial del eje  $s$  se conserve).
23. Escriba las dos ecuaciones que describen el equilibrio de fuerza y torques y luego otra que describe la relación lineal entre los alargamientos de la cuerda:  $T_1 - T_2 = T_2 - T_3$ .
24. Inicialmente, solo las fuerzas verticales afectan el bloque colgante, por lo tanto, el vector de desplazamiento inicial también es vertical. Si la aceleración del bloque grande es  $a_1$ , la del bloque encima de ella es  $a_2$  y la del bloque colgante es  $a_3$ , entonces  $a_1 + a_2 = a_3$  se mantiene. Ahora podemos escribir la 2.ª ley de Newton para cada cuerpo. La cuarta y última incógnita es la tensión en la cuerda.
25. Vaya al marco de referencia bloque-cuña. En el caso límite, la fuerza de la inercia y la fuerza neta de la gravedad sobre la pelota  $m$  es normal a la pendiente izquierda (para que la pelota permanezca en reposo allí). Considere las fuerzas netas que actúan sobre las pelotas. Sus componentes normales a la superficie sobre la que descansan son  $\vec{F}_{\perp 1}$  y  $\vec{F}_{\perp 2}$ . Son iguales a las fuerzas normales  $\vec{N}_1$  y  $\vec{N}_2$  actuando sobre las bolas y, por lo tanto, deben tener la misma magnitud ( $F_{\perp 1} = F_{\perp 2}$ ) para asegurar que el equilibrio de fuerza se logre horizontalmente para el bloque-cuña.
26. Tomemos el desplazamiento  $\xi$  de la cuña como coordenada que describe la posición del sistema. Si la cuña se mueve en  $\xi$ , entonces el bloque se mueve la misma cantidad con respecto a la cuña, porque la cuerda no se puede estirar y la energía cinética cambia en  $\Pi = mg\xi \sin \alpha$ .
27. Nuevamente, tomemos el desplazamiento de la cuña como la coordenada  $\xi$ ; si el desplazamiento del bloque a lo largo de la superficie de la cuña es  $\eta$ , entonces el centro de masa en reposo da  $\eta(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2) = (M + m_1 + m_2)\xi$ . De aquí se puede extraer  $\eta$  en función de  $\xi$ , pero para mantener breves las fórmulas, es mejor no sustituir esta expresión en todas partes. Las energías cinéticas del bloque se pueden encontrar como sumas de energías horizontales  $[\frac{1}{2}m_i(\dot{\xi} - \dot{\eta} \cos \alpha_i)^2]$  y verticales  $[\frac{1}{2}m_i(\dot{\eta} \sin \alpha_i)^2]$ .
28. Al escribir la conservación de energía, tenga en cuenta que la velocidad del bloque es el doble de la componente horizontal de la velocidad del cilindro y que este último también es igual a la componente vertical (¿por qué?). Proyecte la 2.ª ley de Newton sobre el eje que pasa por la esquina superior del escalón y el centro del cilindro: este eje es perpendicular tanto a la fuerza normal entre el bloque y el cilindro como a la aceleración tangencial del cilindro. Segunda pregunta: la razón de dos fuerzas normales es constante (¿por qué? ¿a qué es igual? Sugerencia: compare las aceleraciones horizontales del cilindro y el bloque y recuerde la 2.ª ley de Newton), por lo tanto, serán iguales a cero en el mismo instante.
29. Proyectando la 2.ª ley de Newton en el eje en la dirección de la fuerza normal, vemos que la fuerza normal es más pequeña en el punto más bajo de la parte en forma de arco de la trayectoria. (Allí, la aceleración centrípeta es la más grande y la componente de fuerza gravitacional a lo largo del eje es la más pequeña).
30. La energía del sistema "bloque-bolita" siempre se conserva; el momento solo comenzará a conservarse una vez que la bolita pase el punto más inferior. Cuando llegue allí por segunda vez, la velocidad del bloque es máxima (¿por qué?).
31. Apliquemos la idea 46 para  $\vec{P}$ : el momento neto del sistema es  $P = \omega l m + 2\omega l M$ , fuerza neta  $F = (m + M)g - T$ . Lo mismo con consideraciones de rotación: con respecto a la posición inicial de la pelota más a la izquierda, el momento angular es  $l(2\omega l)M$  (la velocidad es  $2\omega l$ , el brazo de la velocidad es  $l$ ); el torque neto es  $(T + Mg)l$ . Ahora, para la fórmula dada en la idea 46 necesitamos la aceleración angular  $\varepsilon = \dot{\omega}$ . Encontrémoslo usando el método 6:  $\Pi = l\varphi(m + 2M)$ ,  $K = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 l^2(m + 4M)$ . Solución alternativa: la razón de aceleraciones es 1:2; hay cuatro incógnitas (dos fuerzas normales, aceleración y tensión de la cuerda); ecuaciones: tres equilibrios de fuerza (para la pelota y la varilla) y un equilibrio de torque (con respecto al punto final izquierdo de la varilla).
32. Use el método 6: para la coordenada generalizada  $\xi$  podemos usar el desplazamiento del punto final del hilo. Las ideas 34,12: el cambio en la coordenada  $y$  del sistema de

coordenadas del centro de masa es  $\xi\rho h/M$  ( $h$  es la diferencia en las alturas de los puntos finales del hilo,  $M$  es la masa neta del sistema; asuma que  $\xi \ll h$ ). Para la coordenada  $x$  es  $2\xi\rho R/M$ .

33.  $\langle T(1 + \cos \alpha) \rangle = 2mg$ ,  $T = \langle T \rangle + \tilde{T}$ , donde  $|\tilde{T}| \ll T$ . Basados en la idea 20 ignoramos el término más pequeño  $\langle \tilde{T}\alpha^2 \rangle$  y tenga en cuenta que  $\langle \alpha^2 \rangle > 0$ .
34. Tenemos que considerar dos opciones: o todos los cuerpos se mueven juntos, o el bloque grande más a la derecha se mueve por separado. ¿Por qué no pueden ocurrir las situaciones donde (a) los tres componentes se mueven por separado, o (b) el bloque grande izquierdo se mueve por separado?
35. Después de la colisión, las trayectorias del balón son ortogonales cruzando líneas rectas; el ángulo con respecto a la trayectoria inicial está determinado por qué tanto la colisión está descentrada.
36. Para un movimiento ligeramente no central: ¿cuál será la dirección de momento de la pelota que se golpeó primero? Ahora aplique la idea 52 otra vez. Movimiento central: exprese las velocidades después de la colisión a través de la componente horizontal del momento  $p_x$  que se ha transferido a una de las bolas. ¿Cuál es la componente vertical transferida  $p_y$ ? La conservación de energía nos proporciona una ecuación para encontrar  $p_y$  (es conveniente expresar la energía como  $p^2/2m$ ).
37. El gráfico se ven  $n$  líneas rectas intersecándose; el punto de intersección de un par de líneas rectas corresponde a una colisión de dos pelotas (el gráfico del movimiento de cualquiera de las pelotas es una línea dentada; en un punto de colisión, los ángulos de las dos líneas dentadas se tocan entre sí para que parezca que las dos las líneas rectas se cruzan).
38. Velocidades iniciales en el centro de masa:  $\frac{mv}{m+M}$ ,  $\frac{Mv}{m+M}$ , las velocidades finales son cero; la fricción hace un trabajo:  $\mu mgL$ .
39. En base a la figura, obtenemos inmediatamente (con una constante multiplicativa) las magnitudes y direcciones de los momentos, pero no a qué momento pertenece a qué bola. Es necesario averiguar dónde procederá la bola marcada con una flecha después de la colisión. El hecho 27 ayudará a elegir entre las tres opciones.
40. Energía: con el tiempo  $d$  la distribución del líquido cambiará: todavía hay algo de agua en el centro, pero cierta masa  $dm$  se ha desplazado desde arriba al nivel del grifo (y luego a través del grifo), entonces el cambio en la energía potencial del sistema es  $gH dm$ . Momento: el agua en el barril obtiene el momento total  $\rho gH A dt$  de las paredes. Este momento pasa a la corriente de agua con la masa  $\rho A v dt$ .
41. La energía no se conserva: los granos de arena se deslizan y experimentan fricción. Con el tiempo  $dt$  el aterrizaje de arena en la cinta transportadora recibe momento  $dp = v dm = v\mu dt$  de la cinta: la fuerza entre la arena recién caída y el cinturón es  $F_1 = dp/dt$ . La arena que yace sobre la cinta experimenta la fuerza gravitacional  $mg$  que se compensa por la componente de la fricción paralela a la cinta,  $F_2 = mg \cos \alpha$ , donde  $m = \sigma L$  es la masa de arena en la cinta y  $\sigma v = \mu$ . La minimización tiene que hacerse sobre  $v$ .
42. Durante la colisión  $\Delta p_{\perp} = \sqrt{2gh}$ .
43. Considere una sección corta del camino a lo largo de la colina con longitud  $dl$ . Además del cambio en la energía potencial, el trabajo se realiza para superar la fricción,  $dW_h = \mu mg \tan \alpha dl$ . Encontramos  $dW_h = C dx$ , donde  $C$  es una constante. Sumando todos estos pequeños incrementos  $dl$  encontramos  $W_h = C\Delta x$ .
44. La energía cinética  $K = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + M\dot{x}^2$ , donde  $x$  es el desplazamiento a lo largo de la superficie inclinada;  $\Pi = (M+m)\sin \alpha$ . Habiendo encontrado la aceleración  $a$  cambiamos a un marco de referencia (del cilindro) que se mueve con aceleración  $a$  (Las ideas 7 y 8), donde el bloque se está desplazando a lo largo de la aceleración efectiva debido a la gravedad, lo más bajo posible.
45. De acuerdo con las ideas 61 y 62, el momento angular de la barra antes de la colisión es  $L_0 = Mlv - \frac{1}{3}Ml^2\omega$ ; después de la colisión  $L_1 = Mlv' - \frac{1}{3}Ml^2\omega'$ ;  $L_1 = L_2$ . La expresión de energía es  $K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{6}Ml^2\omega^2$ . La condición de estar en el extremo:  $v' + l\omega' = 0$  (consideramos  $\omega$  ser positiva si la rotación está en la dirección marcada en la figura).
46. El momento angular con respecto al punto de impacto antes de la colisión:  $mv(x - \frac{l}{2}) - I_0\omega$ , donde  $v = \omega\frac{l}{2}$  y  $I_0 = \frac{1}{12}ml^2$ .
47. El eje de rotación instantánea pasa el punto de contacto del cilindro y el piso; su distancia desde el centro de masa no cambia, por lo que podemos usar la idea 65;  $I = \frac{3}{2}mR^2$ .
48. La única fuerza horizontal es la fricción, en el sistema de referencia del centro de masa el torque con respecto al centro de la esfera es generado por la fricción (idea 65), la condición de rodadura de la idea 66 derivada con respecto al tiempo provee la relación necesaria para resolver el problema. ¿Qué se puede deducir de la rapidez de la esfera?
49. Dirijamos el eje  $z$  hacia arriba (esto fijará los signos de los momentos angulares). El momento angular final con respecto al eje  $x$  es  $-\frac{7}{5}mv_yR - muR$  y con respecto al eje  $y$  es  $\frac{7}{5}mv_xR$ .
50. Inmediatamente después de la primera colisión los centros de masas de ambas mancuernas están en reposo, las velocidades de las pelotas en colisión invierten la dirección, las velocidades de las bolas que no chocan no cambian. Ambas mancuernas actúan como péndulos y completan la mitad de un período de oscilación, después del cual se produce la segunda colisión, análoga a la primera.
51. Los granos de arena realizan oscilaciones armónicas en el plano perpendicular al eje del cilindro como un péndulo matemático de longitud  $l = R$  en el campo gravitacional  $g \cos \alpha$ ; a lo largo del eje hay una aceleración uniforme ( $a = g \sin \alpha$ ). El enfoque de partículas ocurre si el tiempo para cruzar el canal a lo largo de su eje es un múltiplo entero del medio período de la oscilación.

52. Observando la posición de equilibrio, concluimos que el centro de masa se encuentra en el eje de simetría de la percha. Los tres puntos de suspensión deben ubicarse en los dos círculos concéntricos mencionados por la idea 70. Por lo tanto, uno de los círculos debe acomodar al menos dos puntos de los tres, mientras que el centro de los círculos (el centro de masa del colgador) debe estar dentro de la región delimitada por los cables del colgador en su eje de simetría. Solo hay un par de círculos que satisfacen todas estas condiciones. Calculando los radios  $l_1$  y  $l_2$  de los círculos usando trigonometría, determinamos la longitud reducida del péndulo  $l_1 + l_2$  y, usando eso, el período de oscilación.
53. La masa efectiva del agua en movimiento se puede encontrar usando la aceleración de la bola que cae. Para la burbuja ascendente, la masa efectiva es exactamente la misma, la masa del gas, en comparación con eso, es insignificamente pequeña.
54. La corriente de agua podría dividirse mentalmente en dos partes: la corriente más a la izquierda girará a la izquierda al tocar el canal, la más a la derecha a la derecha. Por lo tanto, se forman dos 'tubos de agua' imaginarios. En cualquiera de los tubos, la presión estática es igual a la presión externa (ya que hay una superficie externa del líquido cerca): de acuerdo con la ley de Bernoulli, la velocidad del líquido no puede cambiar. Basado en la conservación del momento horizontalmente, los flujos de momento de las corrientes que fluyen hacia la izquierda y hacia la derecha tienen que sumarse al componente horizontal del flujo de momento de la corriente original. Tenga en cuenta que debido a la continuidad,  $\mu = \mu_v + \mu_p$ .
55. Debido a la continuidad  $(u+v)(H+h) = Hu$  const, donde  $h = h(x)$  es la altura del agua en el punto  $x$  y  $v = v(x)$  es la velocidad. Podemos escribir la ley de Bernoulli para un 'tubo' imaginario cerca de la superficie (la región entre la superficie libre y las líneas de corriente no muy lejos de la superficie):  $\frac{1}{2}\rho(u+v)^2 + \rho g(H+h) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho gH = \text{const}$ . Podemos ignorar esos pequeños términos de segundo orden (que incluyen los factores  $v^2$  o  $vh$ )
56. La trayectoria de la fase es un rectángulo horizontal con lados  $L$  y  $2mv$ , donde  $L$  es la distancia del bloque a la pared; la invariante adiabático sería  $4Lmv$ .
57. Considere el equilibrio de los torques. Para los vectores de fuerza neta de las fuerzas normales y de fricción, cuando los extiende, su punto de cruce debe estar por encima del centro de masa.
58. Escribamos la 2.<sup>a</sup> ley de Newton para movimiento rotacional con respecto al punto de cruce de las fuerzas normales: el momento angular del insecto es  $L = mvl \sin \alpha \cos \alpha$ , la velocidad de cambio de este momento angular será igual al torque debido a la gravedad que actúa sobre el insecto (los brazos de las otras fuerzas son cero). Al calcular el período, tenga en cuenta que la aceleración es negativa y proporcional a la distancia desde el punto final inferior, es decir, estamos lidiando con oscilaciones armónicas.
59. El bloqueo ocurre si la fuerza neta de las fuerzas normales y de fricción tira de la barra hacia abajo.
60. Una vez que ocurre el bloqueo, podemos ignorar todas las fuerzas aparte de las normales y de fricción. Supongamos que ha ocurrido. Luego, las fuerzas de fricción netas y normales que actúan desde la izquierda y desde la derecha tienen que equilibrarse entre sí como fuerzas y pares, es decir, se encuentran en la misma línea recta y tienen la misma magnitud. Así obtenemos el ángulo entre la superficie normal y la fuerza neta de fricción y la fuerza normal.
61. Considere la dirección del torque que actúa sobre la tabla con respecto al punto de contacto, cuando la tabla ha girado en ángulo  $\varphi$ : el punto de contacto se desplaza por  $R\varphi$ , la coordenada horizontal del centro de masa se desplaza por la distancia  $\frac{h}{2}\varphi$  desde la posición original del punto de contacto.
62. La única fuerza de la superficie sobre el agua del recipiente del sistema es igual a la presión hidrostática  $\rho gh\pi R^2$ ; equilibra la fuerza gravitacional  $(m + \rho V)g$ . Note que  $H = R - h$ .
63. El potencial de la fuerza centrífuga es  $\frac{1}{2}\omega^2 r^2$ , donde  $r$  es la distancia desde el eje de rotación.
64. Asuma el marco de referencia del bloque grande (que se mueve con aceleración  $a$ ). ¿Dónde debe dirigirse la gravedad efectiva (la fuerza neta de la gravedad y la fuerza de inercia)? ¿Qué es  $a$ ? ¿Con qué aceleración cae el pequeño bloque en este marco de referencia? ¿Cuál es la tensión  $T$  del hilo? Al tener respuestas a estas preguntas, podemos escribir la condición de equilibrio para el bloque grande  $ma = T(1 - \sin \alpha)$ .
65. Usemos el desplazamiento de la esfera (por la superficie inclinada) como la coordenada generalizada  $\xi$ . ¿Cuál es el desplazamiento de la esfera (arriba de la otra superficie inclinada)? Evidentemente  $\Pi = (m - M)g\xi \sin \alpha$ . La fuerza normal entre los dos cuerpos se puede encontrar proyectando la 2.<sup>a</sup> ley de Newton en la dirección de la superficie inclinada.
66. Considere que el desplazamiento del cilindro grande sea  $\xi$ , el desplazamiento horizontal del cilindro central y el extremo izquierdo, respectivamente,  $x$  y  $y$ . ¿Cuál es la relación entre ellos dado que el centro de masa está en reposo? ¿Cuál es la relación entre ellos dado que la longitud de las varillas no cambia? De las dos ecuaciones así obtenidas podemos expresar  $x$  y  $y$  a través de  $\xi$ . Si suponemos que el desplazamiento es pequeño, ¿cuál es la relación entre el desplazamiento vertical  $z$  del cilindro central y la proyección horizontal de la longitud de la varilla,  $\xi - x$ ? Conociendo estos resultados, aplicar el método 6 es sencillo.
67. ¿Dónde está dirigido el pequeño desplazamiento  $\xi$  de la esfera (ver idea 31)? ¿Cuál es el desplazamiento del anillo expresado a través de  $\xi$ ? Use el método 6.
68. Use la idea 40 junto con la conservación de energía proyectando la fuerza y la aceleración con la 2.<sup>a</sup> ley de Newton radialmente.
69. Usemos algunas ideas de la cinemática para encontrar la aceleración de la esfera (C-1, C-29 y C-2: al cambiar al

marco de referencia que se mueve con velocidad  $v$  encontramos la componente de la aceleración de la esfera a lo largo de la barra y al notar que la aceleración horizontal de la esfera es cero, obtenemos, usando trigonometría, la magnitud de la aceleración). Ahora use la 2.<sup>a</sup> ley de Newton.

70. Usando la velocidad  $v$  de la esfera, podemos expresar la velocidad del bloque en el momento en que se investiga (teniendo en cuenta que sus velocidades horizontales son iguales). Usando la idea 40 encontramos que la aceleración horizontal del bloque (y por lo tanto de la esfera) es cero; mediante el uso de la 2.<sup>a</sup> ley de Newton para la esfera y la dirección horizontal, concluimos que la tensión en la barra también es cero. De la ley de conservación de energía expresamos  $v^2$  y de la 2.<sup>a</sup> ley de Newton para la esfera y el eje dirigido a lo largo de la barra obtenemos una ecuación en la que se oculta la solución.
71. Usando la 2.<sup>a</sup> ley de Newton investigue si el centro de masa del sistema se moverá hacia la izquierda o hacia la derecha (si el centro de masa no se hubiera movido, entonces ambos eventos habrían sucedido al mismo tiempo).
72. Para responder a la primera parte: demuestre que la fuerza perpendicular a la velocidad es cero (use el método 3 y la idea 27). Para responder a la segunda parte, utilice el método 3 y la idea 56.
73. Debido a la longitud del hilo, no hay fuerzas horizontales, es decir, la componente horizontal del momento se conserva y también la energía. De las dos ecuaciones correspondientes, la velocidad límite  $v = v_0$  se puede encontrar, para lo cual la esfera inferior asciende exactamente a la altura de la superior. Tenga en cuenta que en ese punto su velocidad vertical es cero, ver idea 44.
74. Use la idea 51. Opciones: todos los bloques se mantienen juntos; todo se desliza; la superior se desliza y las dos inferiores permanecen juntas (¿por qué no es posible que las dos superiores se mantengan juntas y la inferior se deslice?).
75. ¿Qué ley de conservación actúa cuando los dos niños chocan (durante un tiempo limitado de colisión), consideramos la colisión absolutamente elástica o inelástica? (¿se puede perder el momento y dónde? Si es inelástica, ¿a dónde va la energía?), ver idea 58. Después de la colisión: la aceleración común de los dos niños es constante, conocer las velocidades iniciales y finales para encontrar la distancia se convierte en un problema cinemático fácil.
76. Demuestre que para un hilo vertical la velocidad  $v$  es máxima (aplicando la idea 44 porque el ángulo de rotación de la barra muestra que su velocidad angular es cero en esa posición; use la idea 61). Entonces solo queda aplicar la conservación de energía (recuerde que  $\omega = 0$ ). Para la aceleración  $a$ , usemos la idea 44 y observe que la aceleración horizontal del centro debe ser cero; esto se desprende de la 2.<sup>a</sup> ley de Newton para el movimiento horizontal (no hay fuerzas horizontales en ese momento). Además, observe que la coordenada vertical del centro de masa es el promedio aritmético de las coordenadas de los puntos fi-

nales,  $x_O = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ ; al tomar la derivada temporal obtenemos  $\dot{x}_O = \frac{\dot{x}_A}{2}$  y  $\ddot{x}_O \equiv a = \frac{\ddot{x}_A}{2}$  (tenga en cuenta que  $x_B$  es constante). Por lo tanto, la aceleración de  $O$  se puede encontrar como la mitad de la aceleración vertical del extremo superior de la barra  $A$ ; este es la componente radial, es decir, centrípeta de la aceleración del punto  $A$  en su movimiento circular alrededor del punto de suspensión. Finalmente, por la fuerza de tensión.  $T$  ahora tenemos una ecuación  $T + N - mg = ma$ , pero necesitamos otra más. Para obtener esa, debemos considerar el movimiento angular de la barra en el marco de  $O$ . En el momento dado, nuestro nuevo marco se mueve traslacionalmente a la derecha con velocidad  $v$  y con aceleración ascendente  $a$ . El torque con respecto al centro de masa es causado solo por  $T$  y  $N$  (la gravedad y las fuerzas de inercia tienen brazo cero). Entonces podemos relacionar  $T - N$  a la aceleración angular de la barra a través de la 2.<sup>a</sup> ley de Newton para movimiento angular. Para encontrar la aceleración angular, notemos que en el marco del laboratorio, las velocidades de  $A$  y  $O$  son iguales; de hecho, ambas velocidades son horizontales (la velocidad vertical de  $A$  es cero porque es el punto más bajo de su trayectoria y  $\dot{x}_O = \frac{\dot{x}_A}{2}$ ) y usando la idea de cinemática C-35 (las proyecciones de las velocidades a la dirección de la barra deben ser iguales) podemos concluir que las velocidades también deben ser iguales. Por lo tanto, en el marco móvil, la velocidad del punto  $A$  es cero y también lo es su aceleración centrípeta. Por lo tanto, la aceleración debe ser perpendicular a la barra; conocemos la componente vertical  $2a$  de esta aceleración y usando trigonometría se puede deducir su módulo. Con esta aceleración, podemos encontrar la aceleración angular de la barra.

77. Encuentre el eje de rotación instantánea (asegúrese de que su distancia desde el centro de masa sea  $\frac{1}{2}$ ). Demuestre que el centro de masa se mueve a lo largo de un círculo centrado en la esquina de la pared y el piso, mientras que la coordenada polar del centro de masa en ese círculo es igual al ángulo  $\varphi$  entre la pared y el palo. Expresé la energía cinética en función de la derivada  $\dot{\varphi}$  de la coordenada generalizada  $\varphi$  usando el teorema de los ejes paralelos (de Steiner) y expresando la ley de conservación de energía como  $\omega^2 = f(\varphi)$ ; usando el método 6 obtenemos  $\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{1}{2}f'(\varphi)$ . Cuando la fuerza normal contra la pared llega a cero, la aceleración del centro de masa es vertical: presente esta condición usando las aceleraciones tangencial y radial del centro de masa en su órbita circular ( $\frac{1}{2}\varepsilon$  y  $\frac{1}{2}\omega^2$  respectivamente) y úsela como una ecuación para encontrar  $\varphi$ .
78. Basados en la idea 64 encontramos que  $\omega = 6v/l$ . Usando la energía y la conservación del momento, eliminamos la velocidad del disco después de la colisión y expresamos la razón de masa.
79. Las fuerzas a lo largo de la superficie normal son fuerzas elásticas, por lo que la energía en dirección vertical se conserva durante la colisión: después de la colisión, el componente de velocidad correspondiente es el mismo que antes. Para encontrar las otras dos incógnitas, las velocida-

des horizontal y angular, podemos obtener una ecuación usando la idea 64. La segunda ecuación surge de (a) la condición de que la velocidad de la superficie de la pelota sea cero en el punto de contacto (sin deslizamiento; (b) la ecuación que surge de 60).

80. Usando la idea 51 investigamos los regímenes de deslizamiento y rodamiento. En el último caso, la forma más rápida de encontrar la respuesta es usar la idea 65.
81. La velocidad se puede encontrar en las leyes de conservación de energía y momento (tenga en cuenta que el aro se mueve traslacionalmente). Para encontrar la aceleración, es conveniente utilizar el marco de referencia no inercial del aro, donde se encuentra fácilmente la aceleración centrípeta del bloque. La condición para el equilibrio radial del bloque proporciona la fuerza normal entre el bloque y el aro (¡no olvide la fuerza de inercia!); la condición de equilibrio horizontal para el aro proporciona una ecuación para encontrar la aceleración.
82. Supongamos que la velocidad del bloque es aproximadamente constante. Durante cierto tiempo  $t_l$  la base se desliza hacia la izquierda con respecto al bloque y el momento impartido por la fuerza de fricción en ese momento también se dirige hacia la izquierda. Durante el tiempo restante  $t_r$  la base se desliza hacia la derecha con el momento respectivo dirigido también hacia la derecha. La condición de equilibrio es que los dos momentos tienen magnitudes iguales; por lo tanto, determinamos el valor de equilibrio de  $t_l/t_r$ . Del gráfico encontramos la velocidad para la cual esa razón tiene el valor necesario.
83. A medida que el agua fluye contra las paletas, obtiene la misma velocidad vertical  $u$  que las paletas mismas. Esto nos permite calcular el momento impartido a la pala por unidad de tiempo (es decir, la fuerza), que termina siendo proporcional a la diferencia:  $F \propto (v - u)$ . A partir de ahí, no es muy difícil encontrar el máximo de la potencia  $Fu$ .
84. En el marco de referencia de la tabla, el problema es equivalente al problema 53.
85. Observe en el marco de referencia (acelerado) del vagón, donde la gravedad efectiva  $\sqrt{a^2 + g^2}$  está en un ángulo pequeño con respecto a la vertical. La carga oscilará pero permanecerá inmóvil al final si el cable está vertical en el momento de detención y la velocidad de la carga es cero. Es posible cuando la posición correspondiente es la desviación máxima durante la oscilación. Por lo tanto, la amplitud de la oscilación debe ser la misma tanto durante la aceleración como la desaceleración, de modo que incluso cuando comienza la desaceleración, el cable debe ser vertical. En ese caso, ¿cómo se relacionan el tiempo de aceleración y el período de oscilación?
86. Si la onda de choque está en el punto donde el área de intersección de su frente de onda y el cuerpo considerado es  $A$ , ¿cuál es la fuerza que actúa sobre el cuerpo? Supongamos que el cuerpo permanece (casi) en el mismo lugar donde pasa la onda de choque. Luego, se puede encontrar el momento impartido durante el tiempo  $dt$  usando el área

de sección transversal  $A$  y la distancia  $dx = c_s dt$  cubierta por el frente de onda. Tenga en cuenta que  $A dx$  es el volumen elemental. Finalmente sumamos todos los momentos impartidos.

87. La varilla actuará como un resorte (ya que la varilla es delgada y está hecha de acero, mientras que el acero es elástico). Después de que la esfera izquierda ha chocado con la esfera estacionaria, esta última adquirirá velocidad  $v_0$  y la primera permanecerá en reposo. Entonces la pesa, como un sistema de esferas y resortes, comenzará a oscilar alrededor de su centro de masa. ¿Cuál es la velocidad del centro de masa? Convéznase de que, después de medio período, la esfera individual ya está lo suficientemente lejos como para que la esfera izquierda no vuelva a chocar con ella. Las oscilaciones de la mancuerna desaparecen poco a poco, por lo que se perderá algo de energía allí.

## 7. RESPUESTAS

- $\arcsen \frac{R\mu}{(R+l)\sqrt{\mu^2+1}}$ .
- $\arcsen \frac{m}{M+m} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$ .
- $mg/2$ .
- a)  $\mu mg/\sqrt{1+\mu^2}$ ; b)  $mg \sin(\arctan \mu - \alpha)$ .
- $\mu \geq \frac{|g \sin \alpha - a \cos \alpha|}{g \cos \alpha + a \sin \alpha}$ , si  $g + a \tan \alpha > 0$ .
- a)  $\omega^2 R \geq g\sqrt{1+\mu^{-2}}$ ;  
b)  $\omega^2 R \geq g\sqrt{1+\mu^{-2}}$ , si  $\mu < \cot \alpha$  y  
 $\omega^2 R \geq g(\cos \alpha + \mu^{-1} \sin \alpha)$  si  $\mu > \cot \alpha$ .
- $v = 3\sqrt{gR}$ .
- $v/2$ .
- $\tan 2\alpha = h/a$ .
- $\mu_1 \geq \sqrt{l^2 - h^2}/h$ .
- $3mg$ .
- $2 \arctan \left[ \left(1 + \frac{m}{M}\right) \cot \alpha \right]$ .
- $\sqrt{2HL\mu + \mu^2 H^2} - \mu H \approx \sqrt{2HL\mu} - \mu H \approx 7,2 \text{ m}$ .
- a)  $\omega^2 < g/l$ ; b)  $\omega^2 < (2 - \sqrt{2})g/l$ .
- $\frac{1}{2}(1 - 3^{-1/2})\rho_w \approx 211 \text{ kg/m}^3$ .
- $\frac{\pi}{3}\rho R^3$ .
- $v/\sqrt{\mu^2 \cot^2 \alpha - 1}$ .
- $\frac{4}{3}\pi Gr^3 \Delta\rho/g(r+h) \approx 0,95 \text{ cm}$ .
- $-\omega$ .
- $\mu mgv/\omega R$ .
- $\cos \varphi \tan \alpha < \tan 30^\circ$ .
- $L - \pi R/2 \cos \alpha$ ;  $2\pi\sqrt{L/g}$ .
- $\frac{1}{12}mg, \frac{1}{3}mg, \frac{7}{12}mg$ .
- $mg/(2M+m)$ .
- $m < M \cos 2\alpha$ .
- $mg \sin \alpha / [M + 2m(1 - \cos \alpha)] = mg \sin \alpha / [M + 4m \sin^2 \frac{\alpha}{2}]$ .
- $g \frac{(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{(m_1 + m_2 + M)(m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}$ .
- $mg(5\sqrt{2} - 4)/6$ ; simultáneamente.

29.  $\cos \alpha \geq \frac{1}{3}(2 + v^2/gR)$ .
30.  $\frac{2m}{M+m} \sqrt{2gR}$ .
31.  $mMg/(m + 4M)$ .
32.  $F_x = 2Ra\rho$ ,  $F_y = (m + \rho L)g - \rho(L - \pi R - 2l)a$ , donde  $a = \rho g(L - \pi R - 2l)/(m + \rho L)$ .
33. El que no se empujó.
34. Si  $F \leq 2\mu mg \frac{m+M}{2m+M}$ :  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \frac{F}{M+m}$ ; de otra manera  $a_1 = \frac{F}{M} - \mu g \frac{m}{M}$ ,  $a_2 = \mu g \frac{m}{2m+M}$ .
35. En un medio círculo.
36. (a)  $v/5$ ; (b)  $v/4$ .
37.  $n(n-1)/2$ .
38.  $\sqrt{2\mu gL(1 + \frac{m}{M})}$ .
39. 3,5 y venía de la derecha abajo.
40. A:  $\sqrt{2gh}$ ; B:  $\sqrt{gh}$ .
41.  $2R\mu\sqrt{gl \operatorname{sen} \alpha}$ ,  $\sqrt{gl \operatorname{sen} \alpha}$ .
42.  $u - \mu\sqrt{2gh}$ .
43.  $mg(h + \mu a)$ .
44.  $\arctan \frac{2}{5} \approx 21^\circ 48'$ .
45. (a)  $(3v - \omega l)/4$ ; (b)  $(v - \omega l)/2$ .
46. A la distancia  $2l/3$  de la mano que sostiene, donde  $l$  es la longitud del bate.
47.  $\frac{2}{3} \frac{F}{M} \frac{a}{R}$ .
48. Un círculo de radio  $(1 + \frac{1}{\beta})v/\Omega$ ,  $\mu \approx 0,14$ .
49.  $(v_{x0}, v_{y0} - \frac{5}{7}u)$ .
50.  $L/v_0 + \pi\sqrt{m/2k}$ .
51.  $\frac{1}{2}\pi^2(n + \frac{1}{2})^2 R \tan \alpha$ .
52. 1,03 s.
53.  $2g$ .
54.  $v_1 = v_2 = v$ ;  $\cot^2 \frac{\alpha}{2}$ .
55.  $\sqrt{gH}$ .
56. 5 m/s.
57. (a)  $\tan \leq 2\mu$ ; (b) imposible.
58.  $g(1 - \frac{\pi}{l}) \operatorname{sen}^{-1} \alpha$ ;  $\frac{\pi}{2}\sqrt{l \operatorname{sen} \alpha/g}$ .
59.  $\mu < \cot \alpha$ .
60.  $\mu_1 < \tan \frac{\alpha}{2}$  y  $\mu_2 < \tan \frac{\alpha}{2}$ .
61.  $R > h/2$ .
62.  $\sqrt[3]{3m/\pi\rho}$ .
63.  $\omega^2 R^2/2g$ .
64.  $M/m = \frac{(1 - \operatorname{sen} \alpha)^2}{\operatorname{sen} \alpha}$ .
65.  $\frac{2mM}{M+m}g \tan \alpha$ .
66.  $g/9$ .
67.  $g \frac{m+M}{m+M \operatorname{sen}^2 \alpha} \operatorname{sen}^2 \alpha$ .
68.  $2/3R$ .
69.  $m[g - v^2(2l - x)/\sqrt{2}l^2]$ .
70.  $M/m = 4$ ,  $u = \sqrt{gl/8}$ .
71. El primero llega primero.
72. Una línea recta; si  $\omega \neq 0$ .
73.  $\sqrt{2gl(1 + m/M)}$ .
74.  $\frac{F}{3m}$ , si  $\frac{F}{m\mu g} < 6$ ;  $\frac{F}{4m} + \frac{1}{2}\mu g$ , si  $6 < \frac{F}{m\mu g} < 10$ ;  $3\mu g$ , si  $\frac{F}{m\mu g} > 10$ .
75.  $m^2 v^2/2(M^2 - m^2)\mu g$ .
76.  $v = \sqrt{(l - \frac{H}{2})g}$ ,  $a = \frac{g}{2}(1 - \frac{H}{2l})$ ,  $T = \frac{mg}{4}(3 - \frac{H}{2l} + \frac{l}{6H})$ .
77.  $\arccos \frac{2}{3} \approx 48^\circ 12'$ .
78.  $M/m = 4$ .
79. (a)  $\omega = 5v_0/7R$ ,  $v_x = 5v_0/7$ ,  $v_y = \sqrt{2gh}$ ;  
(b)  $v_y = \sqrt{2gh}$ ,  $v_x = v_0 - 2\mu v_y$ ,  $\omega = 5\sqrt{2gh}\mu/R$ .
80.  $\frac{5}{7}g \operatorname{sen} \alpha$ , si  $\mu > \frac{2}{7} \tan \alpha$ , de otra manera  $g \operatorname{sen} \alpha - \mu g \cos \alpha$ .
81.  $\sqrt{\frac{2gr}{m+M} \frac{1 + \cos \varphi}{m \operatorname{sen}^2 \varphi + M} m \cos \varphi}$ ;  
 $\frac{gm \operatorname{sen} 2\varphi}{m \operatorname{sen}^2 \varphi + M} \left[ \frac{1}{2} + \frac{m^2 \cos \varphi (1 + \cos \varphi)}{(m \operatorname{sen}^2 \varphi + M)(m+M)} \right]$ .
82. 0,6 m/s.
83.  $\frac{1}{4}27\mu v^2$ .
84.  $v/\cos \alpha$ .
85.  $n^{-2}Lg/4\pi^2 l$ ,  $n = 1, 2, \dots$
86. (a), (b)  $(p_1 - p_0)V/mc_s$ .
87.  $\frac{1}{2}v_0$ ; no, una fracción entra en las oscilaciones longitudinales de la barra y luego (a medida que se debilitan las oscilaciones) en calor.