الميكانيكا

Jaan Kalda

ترجمت للإنجليزية جزئيا بواسطة: S. Ainsaar, T. Pungas, S. Zavjalov

ترجمت للعربية بواسطة: فيصل ف. ع. السلوم

1 المقدمة

هذا الكتيب هو تكملة لتجميعة مشابهة من المسائل في علم الحركة (الكينيماتيكا kinematics) وله جزآن رئيسيان: قسم 3— الإستاتيكا وقسم 4— الديناميكا؛ قسم 5 يحتوي على مسائل مراجعة. الهدف الأساسي لتجميعة المسائل هذه هو تقديم أفكار الحل الأكثر أهمية؛ باستخدامها، يستطيع المرء أن يحل أغلب ($> 95\%$) مسائل الأولمبياد في الميكانيكا. غالبا ما تطرح المسألة أولا، ثم تُتبع ببعض الأفكار والاقتراحات ذات الصلة (حرف K أمام رقم الفكرة يشير إلى رقم الفكرة ذات الصلة في كتيب علم الحركة). حلول المسائل وضعت في نهاية الكتيب (قسم 7). يسبقها تلميحات مفصلة جيدا (قسم 6)، لكنه من المقترح أن تستخدم التلميح كملاذ أخير فقط، بعد أن تفشل أفضل مجهوداتك في حل المسألة. (مع ذلك، حينما تحل المسألة بنجاح بنفسك، سيكون من المفيد أن ترى ما إذا كان نهجك هو نفسه الذي اقترح بواسطة التلميحات).

التوجيه الجوهري لهذا الكتيب يجادل بأن تقريبا كل مسائل الأولمبياد عبارة عن "تشكيلات" من مجموعة محددة من المواضيع— الحلول تأتي من أفكار الحل ذات الصلة. غالبا لا يكون من الصعب جدا التعرف على الفكرة الصحيحة لمسألة معطاة، بكونك درست ما يكفي من أفكار الحلول. اكتشاف كل الأفكار الضرورية أثناء الحل الفعلي سيظهر حتما إبداعا أكثر بكثير وسيعطي متعة أعظم، لكن مهارة تصور الأفكار لسوء الحظ صعبة (أو حتى غير عملية) للتعلم أو التعليم. إضافة إلى هذا، قد يستهلك الكثير من الوقت للوصول لفكرة جديدة، وهؤلاء من يعتمدون على تجربة هذا أثناء الأولمبياد سيكونون في ضرر مقارنة بأولئك الذين قد أتقنوا الأفكار.

في العلوم عموما، أفكار الحلول تلعب دورا مشابها كالذي في الأولمبياد: أغلب الأوراق العلمية تطبق وتجمع الأفكار المعروفة لحل مسائل جديدة (أو أسوأ، قديمة)، لتحسين وتعميم الأفكار. الأفكار الجيدة الجديدة الحقيقية تأتي نادرا جدا وكثير منها تعرف لاحقا كروائع العلوم. على كل حال، كما أن خزينة الأفكار العلمية تحتوي على كمية ضخمة أكثر من مجرد الميكانيكا، فليس من السهل تذكرهم والانتفاع بهم في المواضع الصحيحة. هذه المهارة مقدرة جدا؛ إنجاز مميز سيحصل بتوظيف فكرة معروفة جيدا في حالة غير متوقعة.

بالإضافة إلى الأفكار، يعرض الكتيب أيضا "حقائق" و"طرق". التفريق بينهم اعتباطي جدا، بعض الأفكار قد تسمى طُرُقا أو حقائق والعكس صحيح؛ وقد تم وضع التصنيف الآتي: الحقائق هي موجودات جوهرية أو محددة، هي المعرفة التي من الممكن أن تكون مفيدة أو ضرورية لحل المسائل، لكنها ليست مصاغة كوصفات جاهزة. نظريا، كل المسائل من الممكن حلها بداية من المبادئ الأُوَل ("الحقائق" الأساسية)، لكن استخدام نهج "القوة الغاشمة Brute Force" عادة ما سيؤدي إلى حسابات طويلة وأحيانا معقدة بشكل غير طبيعي؛ "الأفكار" هي وصفات لحل المسائل بطرق أسهل؛ "الطرق" هي "أفكار" خارقة ذات قابلية واسعة للتطبيق.

العديد من المصادر قد استخدمت للمسائل: الأولمبيادات الإستونية الإقليمية أو الوطنية، أولمبيادات Estonian-Finnish، أولمبيادات الفيزياء الدولية، مجلة "Kvant"، أولمبيادات روسيا والاتحاد السوفييتي؛ بعض المسائل تم الإضافة عليها (سواء تسهيلها أو تصعيبها)، بعضها مجهولة المصدر.

بشكل مشابه لكتيب علم الحركة، تم تصنيف المسائل إلى $\boxed{\text{سهلة}}$، $\boxed{\text{متوسطة}}$، $\boxed{\text{صعبة}}$: أرقام المسائل ملونة بناءً على هذا الرمز اللوني (تذكر أن الصعوبة تصنيف شخصي!).

ختاما، لا تيأس لو كان هناك بعض الأشياء (أو بعض الأقسام) التي لست قادرا على فهمها للوقت الحالي: فقط تقدم إلى الموضوع التالي أو المسألة التالية؛ تستطيع أن تعود لتلك الأجزاء التي لم تفهمها لاحقا.

2 القوانين الأولى – الأساس النظري

هؤلاء الذين يألفون القوانين الأساسية في الميكانيكا يستطيعون تجاوز هذا القسم (على كل حال، تستطيع أن تقرأه، فقد تبصر شيئا جديدا)، وانتقل إلى قسم 3. في الحقيقة، من المتوقع أن غالبية القراء يستطيعون فعل هذا لأنه تقريبا كل مقررات الفيزياء تبدأ بالميكانيكا، ومن غير المرجح أن شخصا سحب لهذا الكتيب هادفا لتطوير مهارات حل المسائل المتقدمة بدون أي خبرة سابقة في الفيزياء. على الرغم من هذا، كانت المساعي في أن نجعل سلسلة دليل الدراسة هذه مكتفية بذاتها؛ هذا يفسر إضافة الفصل الحالي. مع ذلك، العرض في هذا القسم مضغوط للغاية وفي بعض الأماكن يحتوي على صيغ رياضية قد تبدوا مرهبة للمبتدئين (على سبيل المثال

استخدام رمز الجمع والتفاضل)، وبالتالي فهي ليست قراءة سهلة. إذا وجدت هذا القسم صعبا جدا لتبدأ به، خذ كتاب ميكانيكا للمدارس الثانوية واذهب هنا لقسم "الإستاتيكا".

2.1 مسلمات الميكانيكا الكلاسيكية

الميكانيكا التقليدية، موضوع هذا الكتيب، هو علم مرتكز كليا على قوانين نيوتن الثلاثة، التي صيغت هنا كحقائق.

الحقيقة 1: (قانون نيوتن الأول.) حينما تعتمد حركة الأجسام على الإطار المرجعي (على سبيل المثال، جسم يتحرك بسرعة ثابتة في إطار ما، يتحرك بتسارع في إطار آخر إذا كان التسارع النسبي بين الإطارين ليس صفرا)، يوجد هنالك ما يسمى بالأُطر المرجعية القصورية حيث تكون الحقائق 2-5 صالحة لكل الأجسام.

الحقيقة 2: (قانون نيوتن الثاني.) في إطار مرجعي قصوري، التسارع الغير صفري لجسم ما دائما يأتي نتيجة لمؤثر خارجي؛ كل جسم يمكن، وصفه بكتلة قصورية m (فيما يلي سيتم ترك صفة "قصورية")، وكل مؤثر يمكن وصفه بكمية متجهة $\vec{F}$، من الآن فصاعدا سنذكرها بالقوة، حيث أن المساواة $\vec{F} = \mathrm{m}\vec{a}$ صالحة لأي زوج مؤثر-جسم.

لاحظ أنه بمجرد وجود مرجع للكتلة، مثلا تعريف $1kg$ ككتلة ديسيمتر مكعب واحد من الماء، فإن حقيقة 2 كذلك تعطينا تعريفي كتلة الجسم ومقدار القوة. بالفعل، إذا كان لدينا قوة ثابتة مرجعية حيث (أ) تضمن دائما إعطاء نفس مقدار القوة، و(ب) يمكن تطبيقها على أي جسم اعتباطي (مثل زنبرك مشدود بمقدار بمعين) فإنه يمكننا تعريف كتلة أي جسم آخر بالكيلوجرامات عدديا لتساوي النسبة بين تسارع الجسم إلى تسارع المرجع عندما يكون كلا الجسمين خاضعين للقوة المرجعية. قانون نيوتن الثاني صالح إذا كان هذا تعريف متسق بذاته، أي إذا كانت الكتلة المحصول عليها مستقلة عن أي قوة مرجعية استخدمت. بشكل مشابه، مقدار أي قوة بالنيوتن (يرمز له بـ $N \equiv kg\ m/s^2$) يمكن تعريفه ليكون حاصل ضرب الكتلة وتسارع الجسم المعرض لهذه القوة؛ قانون نيوتن الثاني صالح إذا كان الناتج مستقلا عن أي جسم اختبار تم استخدامه.

كملخص: قانون نيوتن الثاني $\vec{F} = \mathrm{m}\vec{a}$ يخدمنا كتعريف لكتلة الجسم (بافتراض أننا اخترنا مرجع للكتلة)، وكتعريف لقوة التفاعل؛ القانون يضمن لنا أن هذين متسقان بذاتهما: كتلة الجسم ومقدار القوة مستقلان عن عملية القياس.

الحقيقة 3: القوى تجميعية ككميات متجهة: إذا كان هنالك قوى كثيرة $\vec{F_i}(i = 1 \ldots n)$ تؤثر على جسم كتلته m فإن الحقيقة 2 تظل صالحة مع $\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$ المحصلة المتجهة $\sum_i \vec{F_i}$ يمكن أيجادها عن طريق قاعدة المثلث/متوازي الأضلاع، أو بجمع مركبات المحاور: $\vec{F_x} = \sum_i \vec{F_{ix}}$، حيث العلامة x ترمز لمركبة—x (الإسقاط على محور—x) لمتجه؛ تعبيرات مشابهة يمكن كتابتها للمحوري — y وz.

الحقيقة 4: الكتل تجميعية ككميات قياسية: إذا كان هنالك جسم مصنوع من أجزاء أصغر كتلها $m_j(j = 1 \ldots m)$ فإن الكتلة الكلية للجسم المركب تساوي مجموع كتل مكوناته، $m = \sum_j m_j$

الحقيقة 5: (قانون نيوتن الثالث.) إذا بذل جسم A قوة $\vec{F}$ على جسم B فإن الجسم B يبذل قوة لحظية على الجسم A مساوية في المقدار ومعاكسة في الاتجاه $-\vec{F}$.

2.2 القواعد الأساسية المشتقة من المسلمات

الحقائق 1-5 يمكن اعتبارها مسلمات الميكانيكا الكلاسيكية (النيوتونية)، مؤكدة بواسطة التجارب. كل ما يلي من حقائق، نظريات، وغيرها يمكن اشتقاقها رياضيا من هذه المسلمات.

حتى الآن كنا نستخدم مبدأً مهما لتسارع الجسم. كل شيء على ما يرام ما دام الجسم يترك انتقاليا، بمعنى أن كل النقاط فيه لديها نفس متجه التسارع. على كل حال، إذا كان للجسم مقاس معتبر ويدور فوقها نقاط مختلفة سيكون لها تسارع مختلف، إذن فنحن نحتاج أن نوضح، أي نقاط سنستخدم تسارعها. من أجل أن نتعدى هذه الصعوبة ونبقي مجموعة مسلماتنا 1-5 بسيطة قدر الإمكان، لنفترض أن الحقيقة 2 صالحة لما يسمى بالكتل النقطية، وهي الأجسام ذات الأبعاد الصغيرة جدا مقارنة بالمسافات المقطوعة؛ حينها، سيكون موقع كتلة نقطية معرفا بنقطة واحدة تمتلك سرعة وتسارع معرفين بشكل غير غامض. نستطيع أن نعمم الحقيقة 2 لأجسام حقيقة ذات حجم منتهٍ بواسطة تجزئتها تخيليا لقطع صغيرة، كل منها يمكن معاملتها معاملة الكتلة النقطية.

يستطيع المرء أن يشتق (انظر إلى ملحق 1) الصيغة العامة لقانون نيوتن الثاني.

الحقيقة 6: (قانون حفظ الزخم/ قانون نيوتن الثاني المعمم.) للزخم الكلي $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v_i}$ لنظام من الكتل النقطية،

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F} \tag{1}$$

حيث $\vec{F}$ هي القوة المحصلة (مجموع القوة الخارجية) المؤثرة على النظام. بشكل أكثر تحديدا، فإن **الزخم الكلي محفوظ** ($\boldsymbol{\vec{P} = const}$) إذا كانت $\boldsymbol{\vec{F} = 0}$.

بتعويض $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v_i} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r_i}$ (حيث $\vec{r_i}$ ترمز لمتجه الموقع للكتلة النقطية الi)، نستطيع إعادة كتابة المعادلة (1) كـ

$$\mathrm{M}\frac{d^2\vec{r_C}}{dt^2} = \vec{F}$$

حيث

$$\vec{r_C} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{m_i} \quad (2)$$

يسمى مركز الكتلة. هذه النتيجة توضح: في حالة الأجسام الفوق مجهرية، الحقيقة 2 تظل صالحة إذا استخدمنا تسارع مركز الكتلة.

طبقا لقانون نيوتن الثاني، وقتما نعرف كيف تعتمد قوى التفاعل بين الأجسام على المسافات داخل الجسم والسرعات، نستطيع (نظريا) حساب كيف سيتطور النظام مع الوقت (أنظمة كهذه تسمى بالأنظمة التعيينية deterministic). فعلا، نحن نعرف تسارع الأجسام كلها، وبالتالي، نستطيع تحديد السرعات والمواقع بعد فاصل زمني صغير: إذا كان الفاصل الزمني Δt صغيرا كفاية، فإن التغير في التسارعات $\Delta\vec{a}$ يمكن إهماله، ما يعني أن السرعة الجديدة للجسم الـ i ستكون $\vec{v_i}' = \vec{v_i} + \vec{a_i}\Delta t$، ومتجه الموقع الجديد $\vec{r_i}' = \vec{r_i} + \vec{v_i}\Delta t$؛ كل الاعتمادات المؤقتة $\vec{r_i}(t)$ و$\vec{v_i}(t)$ (بـ$i = 1 \dots N$ حيث N هي عدد الأجسام) يمكن الحصول عليها بالتقدم خطوة بخطوة في الزمن. بمعنى رياضي، هذا تكامل عددي لنظام معادلات تفاضلية اعتيادية: المشتقات الثانية بالنسبة للزمن للإحداثيات $\ddot{x_i}, \ddot{y_i}, \ddot{z_i}$ يعبر عنها بواسطة الإحداثيات x_i, y_i, z_i، والمشتقات الأولى $\dot{x_i}, \dot{y_i}, \dot{z_i}$. مبدئيا، هذه الحسابات يمكن القيام بها دائما، على الأقل رقميا بافتراض أن لدينا قدرة حسابية كافية. كمبدأ، العمل الرياضي التطبيقي يمكن أن يكون صعبا جدا. بعيدا عن الحقائق 1-5، الميكانيكا النيوتونية هي تجميعة من الوصفات لحل هذه المعادلات التفاضلية بشكل أسهل.

من بين وصفات كهذه، إيجاد وتطبيق قوانين الحفظ له دور مركزي. هذا سببه طبقا لما قيل أعلاه، تطور الأنظمة الميكانيكية يمكن التعبير عنه بواسطة نظام من المعادلات التفاضلية، وكل قانون حفظ يخفض رتبة هذا النظام بواحد؛ هذا يجعل المهمة الرياضية أبسط بكثير. قوانين الحفظ يمكن اشتقاقها رياضيا من قوانين نيوتن؛ على الرغم من أنه مفيد بالطبع أن تعرف كيف يتم اشتقاقها، لكن معظم مسائل الميكانيكا يمكن حلها بدون أن تألف هذه العملية. بسبب هذا، اشتقت قوانين الحفظ في الملحقات 1، 2 و3؛ هنا سنوفر الصيغ فقط. لقد قمنا بالتعامل مع قانون حفظ الزخم (انظر إلى حقيقة 6)، بالتالي سنستمر إلى القانون التالي.

حقيقة 7: (قانون حفظ الزخم الزاوي.) لمحصلة الزخم الزاوي $\vec{\mathcal{L}} = \sum_i m_i \vec{r_i} \times \vec{v_i}$ لنظام من الأجسام،

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{L}} = \vec{T} \quad (3)$$

حيث

$$\vec{T} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

هو محصلة العزم المطبق على النظام؛ هنا $\vec{F_i}$ هي محصلة القوى المؤثرة على الكتلة النقطية i. بشكل أكثر تحديدا، **محصلة الزخم الزاوي للنظام محفوظة إذا كانت $\vec{\tau} = 0$.**

معادلة (3) اشتقت في ملحق 2، ويمكن اعتبارها قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية للأجسام.

في الهندسة الثلاثية الأبعاد، حساب الضرب الاتجاهي لتحديد العزم والزخم الزاوي الصافي قد يكون صعبا جدا. لحسن الحظ، معظم مسائل الأولمبياد تتضمن هندسة ثنائية الأبعاد: السرعات، الزخوم، ومتجهات الموقع تقع في سطح $\mathrm{x}-\mathrm{y}$، ونواتج ضرب المتجهات (العزوم والزخوم الزاوية) موازية لمحور z. بمعنى أننا نستطيع أن نعتبر $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ و$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$ ككميات قياسية، موصوفة بإسقاطها على محور z (فيما يلي يعبر عنها كـ L وT على التوالي).

رجوعا لتعريف الضرب الاتجاهي، إشارة عزم كهذا موجبة إذا كان الدوران من متجه $\vec{r}$ إلى المتجه $\vec{F}$ تتوافق مع حركة عقارب الساعة، وسالبة خلاف ذلك. بالتالي يمكننا كتابة $\mathrm{T} = |\vec{r}| \times |\vec{F}| sin\alpha$، حيث α هي الزاوية بين متجه نصف القطر والقوة ويمكن أن تكون موجبة (الدوران من $\vec{r}$ إلى $\vec{F}$ مع عقارب الساعة أو سالبة. يمكننا أن نعرف ذراع القوة

$h = |\vec{r}| sin\alpha$ (أنظر إلى الشكل)، حيث

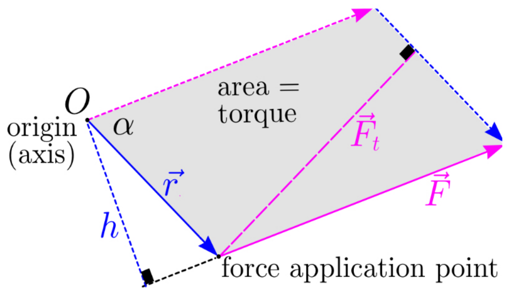
$$\mathrm{T} = |\vec{F}| h$$

بشكل مشابه نستطيع أن نستخدم المركبة المماسية للقوة $F_t = |\vec{F}| sin\alpha$ ونحصل على

$$T = |\vec{r}| F_t$$

بطريقة مشابهة يمكن تطبيقها على الزخم الزاوي:

$$L = |\vec{r}||\vec{p}|sin\alpha = h|\vec{p}| = |\vec{r}|p_t$$



مجال الإستاتيكا يدرس اتزانات الأجسام، بمعنى تلك الحالات حينما يكون هنالك إطار مرجعي قصوري يكون فيه الجسم عديم الحركة. من الواضح أن كلا من الزخم والزخم الزاوي لجسم عند اتزان يجب أن يكونا ثابتين، بالتالي فإن مجموع كل القوى، وكذلك مجموع كل العزوم المؤثرة على جسم ما يجب أن تكون صفرا. كما توجد مسائل على الإستاتيكا تدرس تشوه الأجسام (تغير شكل الأجسام عند تطبيق قوة عليها)، توجد حالة مثالية مهمة وهي الجسم الصلد: جسم يحافظ على شكله تحت تأثير أي قوة (غير كبيرة جدا).

بينما أنه لقانون نيوتن الثاني [معادلة 1]، ولشرط اتزان القوة السكوني، لا يهم أين تطبق القوة، في حالة الزخم الزاوي [معادلة 3] ولشرط اتزان العزم السكوني يصبح هذا مهما. في الميكانيكا الكلاسيكية، القوى مقسمة لقوى التلامس التي تطبق عند نقطة التلامس بين الجسمين (قوى المرونة بأشكالها المختلفة، مثل القوة العمودية وقوة الاحتكاك، انظر أدناه)، وقوى المجال التي تطبق على كل نقطة في الجسم الصلب (مثل قوتي الجاذبية والكهروسكونية). نقطة تطبيق القوة لقوى التلامس هي بوضوح نقطة التلامس؛ في حالة قوى المجال، يمكن حساب العزم عن طريق تقسيم الجسم كاملا (نظام الأجسام) إلى قطع صغيرة جدا (كتل نقطية) وبأخذ التكامل للعزوم المطبقة على كل منها. من السهل أن نرى أنه مع قوة المجال الكاملة (بمعنى مجموع كل قوي المجال المطبقة على الأجزاء المختلفة من الجسم $\vec{F}$ والعزم الكامل $\vec{T}$ المطبق على الجسم، يستطيع المرء دائما أن يجد متجه نصف قطر $\vec{r}$ بحيث أن $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$، بمعنى أنه على الرغم من أن قوى المجال تطبق على كل نقطة في الجسم، محصلة التأثير تكون كما لو أن محصلة القوة طبقت على مركز تأثير فعال؛ في بعض الحالات، يكون هنالك بعض القواعد البسيطة لإيجاد مراكز تأثير كهذه، على سبيل المثال في حالة مجال جاذبية متجانس، يظهر أنه مركز الكتلة.

عند المستوى المجهري لميكانيكا الكم، هذا التفريق بين القوى يصبح عديم المعنى، لأنه من جهة، المجالات التي تنقل قوى المجال هي عبارة عن مواد وبهذا التعبير، كل القوى هي قوى تلامس. وفي المقابل، قوى التلامس الكلاسيكية تنقل كذلك عند المستوى المجهري بواسطة مجالات وبهذا التعبير كل القوى هي قوى مجالات. على الرغم من هذا، عند المستوى فوق المجهري، تقسيم كهذا يظل مساعدا.

حقيقة 8: (قانون حفظ الطاقة؛ لمزيد من التفاصيل؛ انظر إلى ملحق 3.) إذا عرفنا الطاقة الحركية لنظام من الكتل النقطية (أو أجسام صلدة تتحرك انتقاليا) كالتالي

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i^2$$

ومحصلة الشغل الناتجة عن كل القوى أثناء إزاحة لانهائية الصغر $d\vec{r_i}$ للكتل النقطية كالتالي

$$dW = \sum_i \vec{F_i} \cdot d\vec{r_i}$$

فإن تغير الطاقة الحركية يساوي محصلة الشغل المبذول بواسطة كل القوى

$$dK = dW$$

هنا، $\vec{F_i}$ تمثل محصلة القوى المؤثرة على الكتلة النقطية الـi. الشغل المبذول بواسطة ما يسمى القوى المحافظة يعتمد فقط على الحالتين الابتدائية والنهائية للنظام. (بمعنى، على مواقع الكتل النقطية)، وليس على أي مسار قد تحركت به الكتل النقطية. هذا يعني أن الشغل المبذول بواسطة القوى المحافظة يمكن التعبير عنه بانخفاض دالة حالة معينة $\Pi(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dots)$ والتي يشار إليها بطاقة الوضع؛ لإزاحات بالغة الصغر نستطيع أن نكتب $dW_{cons} = -d\Pi$. وبالتالي، إذا عرفنا الطاقة الميكانيكية الكلية كـ $E = K + \Pi$ فحينها

$$dE = dW'$$

حيث dW' ترجع للشغل المبذول بواسطة القوى غير المحافظة؛ إذا لم يكن هنالك قوى كهذه فإن $\mathrm{dE} = 0$، وبالتالي

$$E = K + \Pi = const. \tag{4}$$

هنا نحتاج بعض التعليقات. أولا، بينما أن زخم جسم ما هو زخم مركز كتلته، الطاقة الحركية لجسم مركب ليست فقط الطاقة الحركية لمركز كتلته: الطاقة الحركية في إطار مركز الكتلة يجب أن تضاف كذلك

$$K = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{u}_i^2$$

حيث $\vec{u_i} = \vec{v_i} - \vec{v_C}$ هي السرعة المتجهة للكتلة النقطية الـi في إطار مركز الكتلة. كيفية حساب الطاقة الحركية في إطار مركز كتلة جسم صلد يدور ستناقش لاحقا.

في النهاية، لنلاحظ أن القوى المعتمدة على السرعات (على سبيل المثال، قوى الاحتكاك) و/أو الزمن (مثل القوة العمودية المبذولة بواسطة جدار متحرك)، لا يمكن أن تكون محافظة لأن الشغل المبذول خلال مسار ما بواسطة قوى كهذه يعتمد بوضوح على سرعة هذه الأجسام. استثناء يأتي عندما تكون القوى المعتمدة على السرعة عمودية دائما على السرعة المتجهة (مثل قوة لورنتز والقوة العمودية) التي يكون لها $\mathrm{dW} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt \equiv 0$.

2.3 القوى الأساسية

الجاذبية. الآن، لنقم باعتبار حالة مجال الجاذبية بتفاصيل أكثر؛ يمكن وصفها بواسطة متجه تسارع السقوط الحر $\vec{g}$. من "علم الحركة" نعلم أن كل الأجسام ستتحرك بتسارع $\vec{g}$؛ حينها، طبقا لقانون نيوتن الثاني، هذا يجب أن يحدث بواسطة قوة

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

هذه تسمى بقوة الجاذبية. حقيقة أنه في مجال جاذبية معطى، تتناسب قوة الجاذبية مع كتلة الجسم تعتبر نتيجة مختبرية. لنتذكر أن الكتلة عرفت بواسطة قانون نيوتن الثاني وتصف قصور جسم ما، بمعنى قدرة الجسم على الاحتفاظ بسرعته المتجهة؛ بسبب هذا يمكننا أيضا أن نسميها الكتلة القصورية. على الرغم من هذا، هنا الكتلة تدخل في قانون مختلف تماما: قوة الجاذبية تتناسب مع الكتلة. من السهل تخيل أن قوة الجاذبية تعرف بواسطة صفة أخرى للجسم، لنسميها الكتلة الثقالية، وهي غير مرتبطة بالكتلة القصورية. التجارب أظهرت أن الكتلة الثقالية دائما تساوي الكتلة القصورية وبهذا يمكننا الاستغناء عن الصفتين "قصورية" و"ثقالية". في الواقع، تكافؤ الكتلتين الثقالية والقصورية له أهمية كبيرة في الفيزياء ويمثل المسلمة الأساسية وحجر القاعدة للنظرية النسبية العامة.

نعلم من قانون نيوتن الثالث أن كل قوة تحصل بسبب جسم آخر: قوة جاذبية مطبقة على جسم A يجب أن تكون مسببة بواسطة جسم B. ونعلم كذلك أن قوة الجاذبية مسببة بواسطة الكتلة وتتناسب معها، وبشكل ظاهر، هذا ينطبق على كل من الجسم A والجسم B. وبالتالي، فإن القوة يجب أن تتناسب مع حاصل ضرب الكتلتين، $\mathrm{F} = c m_A m_B$، حيث معامل التناسب c يمكن أن يكون دالة في المسافة. ظهر أن c يتناسب عكسيا مع مربع المسافة، $\mathrm{c} = \mathrm{G}/r^2$؛ لنعتبر هذا كنتيجة عملية، $G \approx 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ يسمى ثابت الجذب. من السهل التوقع أن هذه القوة ستكون موازية للاتجاه المفضل الوحيد لنظام مكون من نقطتين كتليتين، ألا وهو الخط الواصل بينهما. هذه هي الحالة بالفعل؛ بالإضافة إلى هذا، قوة الجاذبية يظهر أنها قوة تجاذب.

حقيقة 9: قوة الجاذبية المؤثرة على الكتلة النقطية الـ i بسبب الكتلة النقطية الـ j يمكن التعبير عنها كالتالي

$$\vec{F_i} = \widehat{r_{ij}} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \tag{5}$$

حيث $\widehat{r_{ij}}$ هو متجه الوحدة المشير من الجسم i إلى الجسم j. وجود جسم ثالث لا يؤثر في صلاحية هذا القانون، بمعنى أن مبدأ التراكب يعمل هنا: محصلة قوة الجاذبية يمكن إيجادها عن طريق جمع مساهمات كل الأجسام الجاذبة طبقا للمعادلة (5). معادلة (5) تظل كذلك صالحة عندما تكون الأجسام المتجاذبة ذات توزع كتلة متماثل كروية—في هذه الحالة، r_i و r_j تشيران إلى مركزي التماثل (اللذان ينطبقان على مركزي الكتلة) لاحظ جيدا! في حالة الأجسام ذات الأشكال الاعتباطية، استخدام مركز الكتلة سيكون خاطئا؛ يجب أن تحسب القوة عن طريق تقسيم الجسم إلى كتل نقطية وأخذ التكامل.

لجذب الكرة الأرضية، يمكننا تقريب r_{ij} لنصف قطر الأرض R_E، لتكون

$$\vec{F} = m\vec{g}, \quad \vec{g} = \hat{z} \frac{G M_E}{R_E^2} \approx \hat{z} \cdot 9.81 m/s^2 \tag{6}$$

حيث $\hat{z}$ هو متجه الوحدة الذي يشير إلى الأسفل و M_E يرمز لكتلة الأرض.

لاحظ أن القوة الناتجة بسبب مجال جاذبية متجانس $\vec{g}$ تكون مطبقة بشكل فعال على مركز كتلة الجسم، بغض النظر عن شكله. بالفعل، العزم الناتج عن قوة الجاذبية يحسب كالتالي

$$\vec{T}=\sum_i \vec{r_i}\times\vec{g}m_i=\left(\sum_i \vec{r_i}m_i\right)\times\vec{g}=\vec{r_C}\times\vec{g}M,$$

حيث $M=\sum_i m_i$.

قوة الجاذبية قوة محافظة لأنه لأي زوج من الكتل النقطية، القوة تكون متجهة على طوال الخط الواصل بين هاتين الكتلتين النقطيتين وتعتمد فقط على المسافة بينهما (انظر إلى ملحق 3). الشغل المبذول بواسطة قوة جاذبية $\vec{F}=m\vec{g}$ نتيجة لمجال جاذبية متجانس يمكن التعبير عنه كـ $dA=m\vec{g}\cdot d\vec{r}$، فبالتالي $d\Pi=-m\vec{g}\cdot d\vec{r}$؛ نحصل عبر التكامل على

$$\Pi=-m\vec{g}\cdot(\vec{r}-\vec{r_0})$$

بحيث $\vec{r_0}$ هو المتجه المشير إلى نقطة مرجعية اعتباطية. الآن، مع تذكر أن الطاقة تجميعية، يمكننا كتابة تعبير لطاقة الوضع لعدد N من الأجسام:

$$\Pi=-\vec{g}\cdot\sum_i m_i\,(\vec{r}-\vec{r_0})=-\vec{g}\cdot(\vec{r_C}-\vec{r_0})\sum m_i \qquad (7)$$

طاقة وضع كتلتين نقطيتين يمكن حسابها عن طريق أخذ التكامل؛ لكتلتين نقطيتين، غالبا ما يكون من الملائم أخذ التصور المرجعي (الذي تكون طاقة الوضع عنده صفر) عند كون المسافة بين الجسمين لانهائية. لإزاحات صغيرة، الشغل المبذول بواسطة قوى الجاذبية المؤثرة على كلا الجسمين

$$dW=G\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}\widehat{r_{12}}\cdot(d\vec{r_1}-d\vec{r_2})=-G\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}d\overrightarrow{r_{12}}$$

هنا قمنا بالأخذ في الحسبان أن $d\vec{r_1}-d\vec{r_2}=d(\vec{r_1}-\vec{r_2})$، و $\widehat{r_{12}}\cdot d(\vec{r_1}-\vec{r_2})=-dr_{12}$. إذن،

$$\Pi=\int_\infty^{r_{12}}G\frac{m_1m_2}{r^2}dr=-G\frac{m_1m_2}{r_{12}} \qquad (8)$$

لاحظ أن طاقة التفاعل بين أي زوج من الأجسام يجب أن يُعَد مرة واحدة، بالتالي نجمعها للأزواج مع $i>j$.

حقيقة 10: طاقة الوضع الجاذبية لجسمين لهما تماثل كروي يعطى بالمعادلة (8)؛ في حالة مجال جاذبية متجانس متجه للأسفل بقوة g، فتغير طاقة الوضع لجسم كتلته m هو $\Delta\Pi=\mathrm{m}g\Delta h$، حيث Δh هو التغير في الارتفاع.

المرونة. بشكل مشابه لقوى الجاذبية، يمكن أن نواجهها في كل خطوة حرفيا. بينما مجهريا يمكننا شرح كل قوى المرونة (على الأقل في المبدأ) بواسطة التفاعلات الكهرومغناطيسية باستخدام ميكانيكا الكم، يمكنها أن تأخذ أشكالا مختلفة فوق مجهريا. بداية، يوجد هنالك قانون هوك الذي يصف قوى المرونة للأجسام القابلة للتشوه (مثل المطاط أو الزنبرك)؛ يوجد كذلك القوة العمودية وقوة الاحتكاك الجاف اللذان يبدوان بعيدين كل البعد عن المرونة، لكن في الحقيقة، كل من القوة العمودية وقوة الاحتكاك الجاف لهما نفس الجذور مجهريا كقانون هوك.

حقيقة 11: (قانون هوك) إذا كان تشوه جسم ليس كبيرا جدا، فإن الجسم المشوه يبذل قوة (أ) معاكسة لمتجه التشوه $\vec{a}$ و(ب) مقدارا تتناسب مع التشوه، أي

$$\vec{F}=-k\vec{a} \qquad (9)$$

هذا القانون صالح للتشوهات الصغيرة لكل المواد المرنة متضمنة المطاط، الزنبركات، إلخ، طالما أن التشوه ليس كبيرا جدا، وأن تشوه الجسم يتضمن فقط التمدد (أو الانضغاط)، ولا يتضمن الحني أو القص. إذا ضمت تشوهات الانحناء والقص، مع اتجاه تشوه ثابت (موصوفا بمتجه الوحدة $\hat{a}\equiv\vec{a}/|\vec{a}|$)، يظل مقدار القوة متناسبا مع $|\vec{a}|$؛ على كل حال، حينها يكون الجسوء (معامل التناسب k) يعتمد كذلك على $\hat{a}$، وحينها القوة لا تكون بالضرورة معاكسة للإزاحة.

قوى المرونة محافظة، طاقة الوضع يمكن إيجادها عن طريق تكامل بسيط $\Pi=-\int\vec{F}\cdot d\vec{a}=\int kada=\frac{1}{2}ka^2$.

حقيقة 12: تحت افتراض حقيقة 9، طاقة الوضع لجسم قابل للتشوه تعطى بـ

$$\Pi=\frac{1}{2}\mathrm{k}\mathrm{a}^2 \qquad (10)$$

من الواضح أنه إذا أخذنا مطاطا طوله l وجسوءه k على سبيل المثال، فإننا لو جعلناه أطول بمرتين فإن جسوءه سينخفض إلى النصف. بالفعل، يستطيع المرء تقسيم المطاط الطويل خياليا إلى نصفين، كلاهما بطول l، ما يعني أننا لو طبقنا الآن نفس القوة F على نقاط النهاية للمطاط الطويل، كلا النصفين سيتمددان بـ $x=F/k$ وبالتالي، كامل المطاط سيتمدد بـ $x'=x+x=2F/k$

بشكل مشابه، جعل المطاط أسمك مرتين سيضاعف جسوءه لأننا نستطيع اعتبار المطاط السميك كائنين نحيلين متوازيين. لاحظ جيدا! هذا لا ينطبق على الزنبركات وتشوه الانحناء: جعل الزنبرك أطول مرتين سيخفض الجسوء إلى النصف بالطبع، لكن صنعه بسلك أسمك مرتين سيضاعف الجسوء أكثر من مرتين: السلك السميك سيتشوه أكثر من السلك النحيل عند نفس زاوية الانحناء. هذه الفقرة يمكن تلخيصها بالحقيقة التالية.

حقيقة 13: لمادة مرنة طولها L ومساحة مقطعها العرضي A، الجسوء

$$k = \frac{AY}{L} \tag{11}$$

حيث Y ترمز لما يسمى بمعامل يونج للمادة.

هذه المساواة تجعله من الممكن أن نعطي صيغة بديلة لقانون هوك. فلنقم بتقديم مفهوم الانفعال، وهو معرف بكونه التشوه النسبي $\varepsilon = a/L$، والإجهاد ويعرف بأنه قوة المرونة لوحدة المساحات، $\sigma = F/A$. بالتالي، يمكن إعادة كتابة قانون هوك كالتالي

$$\sigma = \varepsilon Y$$

يستطيع المرء أن يقدم كذلك مفهوم كثافة الطاقة لمادة مشوهة، وهي النسبة بين طاقة الوضع والحجم، $w = \Pi/(LA) = \frac{1}{2} Y \varepsilon^2$.

الآن يمكننا ذكر السؤال، أي تشوهات يمكن اعتبارها "صغيرة كفاية" بحيث أن قانون هوك يظل صالحا. قد يفكر المرء أننا بحاجة لكون $1 \gg \varepsilon$، لكن هذا عادة متطلب رخو جدا: غالبية المواد المرنة تنقطع قبل وصول تشوهات $\varepsilon \sim 1$ بكثير. عادة، يبدأ قانون هوك بالانهيار عندما تكون التشوهات كبيرة بحيث أن المواد تصبح قريبة للانقطاع. كذلك، لتشوهات كبيرة كهذه، لن تظل المواد مرنة بالكامل: عند إبعاد القوة، لن تسترجع المادة شكلها الابتدائي بشكل كامل وبعض التشوه سيبقى؛ تشوهات كهذه يشار إليها بالتشوهات اللدنة. يوجد كذلك مواد (التي يمكن الإشارة إليها بالمواد اللدنة) التي تتشوه لدنيا عبر مدى واسع من الانفعال قبل أن تتحطم إلى قطع. في حالات كهذه، قانون هوك يظل صالحا فقط لانفعالات بالغة الصغر التي يظل فيها التشوه مرنا.

لاحظ أنه توجد مواد خارقة المرونة يمكن أن يصبح التشوه فيها عاليا جدا $\varepsilon > 1$؛ حينها بالفعل، الظرف $\varepsilon \ll 1$ سيكون متطلبا لقابلية تطبيق قانون هوك.

غالبية المواد لها قيم Y عالية مما يعني أنه على غرار امتلاكنا لخيوط أو أسلاك طويلة ونحيلة فإن القوى الاعتيادية ستسبب تشوهات ضئيلة وغير ملاحظة. هذه هي الحالة غالبا للأسلاك، الحبال، القضبان، والأسطح الصلبة. في هذه الحالات، بينما أنه يمكن إهمال التأثير الهندسي للتشوه، فإنه ستتشكل قوى مرونية تعادل أي قوة خارجية مطبقة. إذا كنا نتعامل مع سطح صلب، فإن قوة مرونية كهذه تسمى القوة العمودية؛ في حالة القضبان، الأسلاك والحبال، نسميها قوة الشد.

مالم يشدد غيره، فإنه يفترض أن قوة الشد موازية للقضيب، السلك والحبل. في حالة الحبل أو السلك النحيل، هذه دائما الحالة: لا توجد أي إمكانية لتواجد قص أو انحناء مروني لأن الحبل عادة طري جدا بالنسبة لتشوهات كهذه: إذا حاولنا انتاج قوة مرونية عمودية بواسطة تطبيق قوة خارجية عمودية، فإن الحبل سينحني بدون تكوين أي قوة ملحوظة. في حالة القضيب، هذا ليس صحيحا: إذا طبقنا قوة عمودية خارجية، فإن القضيب يمانع مرونيا محاولة حنيه ويكون مركبة قوة شد عمودية. لكن إذا كانت كل القوى الخارجية موازية للقضيب، فإنه طبقا لقانون نيوتن الثالث، قوة الشد ستكون أيضا موازية للقضيب.

في حالة خيط مشدود (قضيب، حبل، إلخ)، يمكننا تقسيمه وهميا إلى جزئين. ثم عند نقطة التقسيم P، تقوم القطعتان بجذب بعضهم البعض بقوة مرونية معينة. اتجاه هذه القوة يعتمد على أي جزء من الخيط تم اعتباره، لكنه طبقا لقانون نيوتن الثالث، مقدار القوة يظل نفسه. القوة التي يتفاعل بها الجزآن الوهميان عند النقطة P تصف حالة الخيط عند هذه النقطة، ويشار إليها بالشد. إذن، سنقوم بتمييز القوة $\vec{F}$ المطبقة على نقطة نهاية الخيط، والشد T المعرف لأي نقطة في الخيط ويصف حالتها؛ لاحظ أنه عندما تكون القوى الخارجية مطبقة فقط على نقاط النهاية لخيط في اتزان، $|\vec{F}| = T$ (هذا يأتي كنتيجة لشرط اتزان القوى لأي جزء وهمي من الخيط).

حقيقة 14: الشد هو قوة مرونية في عنصر خطي مثل الخيط (الحبل، السلك، إلخ). لأي خيط غير قابل للتمدد، إذا تم سحبه (أو دفعه، وهو الممكن في حالة القضيب) فإن قوة الشد تعدل من ذاتها لمنع القوة المطبقة الخارجية من إحداث تمدد. إذا كان من الممكن إهمال كتلة خيط أو حبل، فإن قوة الشد ثابتة على طوله. في حبل حر محني، قوة الشد عند نقطة P موازية للماس المرسوم للحبل عند النقطة P.

حقيقة 15: القوة العمودية هي قوة مرونية معامدة على سطح جسم صلد (غير قابل للتشوه) التي يؤثر بها الجسم الصلد على الجسم الملامس؛ تقوم بتعديل ذاتها لمنع القوة المطبقة الخارجية من إحداث تشوه في الجسم الصلد.

لاحظ أنه إذا كانت القوة المطبقة الخارجية ليست عمودية على سطح الجسم الصلد فإنه طبقا لقانون نيوتن الثالث، قوة المرونة ستمتلك مركبتين عمودية ومماسية (موازية للسطح). الأخيرة تظهر نفسها عند نقاط التلامس بين جسمين صلبين كقوة الاحتكاك. بشكل أكثر دقة، قوة الاحتكاك هي قوة عند نقطة التلامس بين جسمين وتحدث بسبب التفاعل بين جزيئات جسم ما مع جزيئات الجسم الآخر عندما يقوم الجسمان بمحاولة الانزلاق فوق بعضهما البعض؛ جزيئات السطح تبقى مكانها بسبب قوى المرونة داخل كل جسم من الجسمين؛ قوى المرونة هذه تُسَبب بواسطة تشوهات القص (التي عادة ما تكون صغيرة بشكل غير ملحوظ) للجسمين.

حقيقة 16: (قانون أمونتونس.) قوة الاحتكاك السكوني العظمى عند منطقة التلامس بين جسمين هي $F_{max} = \mu_s N$، حيث N هي القوة العمودية عند منطقة التلامس وμ_S هو ثابت يعتمد على مادتي الجسمين المتلامسين، يشار إليه بمعامل الاحتكاك السكوني؛ قد يعتمد كذلك على درجة الحرارة، الرطوبة، إلخ. بالتالي، F_{max} مستقلة عن مساحة منطقة التلامس.

حقيقة 17: (قانون كولوم للاحتكاك.) عندما يتحرك جسمان بالنسبة لبعضهما البعض، قوة الاحتكاك عند منطقة التلامس بينهما هي $F = \mu_k N$، حيث N هي القوة العمودية عند منطقة التلامس و μ_k هو ثابت يعتمد على الجسمين المتلامسين، يشار إليه بمعامل الاحتكاك الحركي؛ يقوم بالاعتماد قليلا على سرعة الانزلاق، لكن هذا الاعتماد ضعيف ويهمل عادة.

في حالة مسائل الأولمبياد، غالب الأوقات نفترض أن $\mu_k = \mu_s$، لكن بعض الأحيان يؤخذان على أنهما مختلفان مع $\mu_S > \mu_k$.

بينما أن قوانين الاحتكاك بسيطة جدا وتمت صياغتها قبل زمن طويل، اشتقاقها من الحركة المجهرية (الجزيئية) ظهر أنه عمل صعب جدا (ما زال هنالك أوراق بحثية تطرح في الموضوع هذا).

3 الإستاتيكا

عند حل مسائل في الإستاتيكا، يستطيع المرء دائما أن يستخدم طريقة القوة الغاشمة القياسية: معادلات (1) و(3) تقول لنا أنه لكل جسم عند الاتزان، $\vec{F} = 0$ و$\vec{T} = 0$. إذن، فلكل جسم صلب، لدينا ظرف اتزان للقوى، وظرف اتزان للعزوم. رجوعا إلى الطريقة القياسية، هذه المعادلات يتم إسقاطها على محاور x, y وz مما يعطينا ست معادلات (بافتراض هندسة ثلاثية الأبعاد)؛ إذا كان لدينا N جسم متفاعل، العدد الكلي للمعادلات هو 6N. لمسألة مطروحة بشكل صحيح، سنحتاج أيضا 6N متغير بحيث يمكننا أن نحل هذه المجموعة من المعادلات الجبرية. وصف العملية يبدو سهلا، لكن حل عدد كبير من المعادلات قد يكون صعبا جدا. في حالة الهندسة ثنائية الأبعاد، عدد المعادلات اختزل مرتين (عدد معادلات اتزان القوة أصبح اثنين وكل العزوم أصبحت معامدة على المستوى، إذن توجد معادلة واحدة للعزم)، لكن حتى بجسمين فقط، ما زال لدينا 6 معادلات.

لحسن الحظ، توجد حيل تستطيع أن تساعدنا لاختزال عدد المعادلات! عادة ما يقع الإبداع الأساسي في

فكرة 1: اختر المحاور المثلى لإلغاء أكبر كم ممكن من إسقاطات القوى، خصوصا إسقاطات القوى التي لا نعرفها ولسنا مهتمين بها،

على سبيل المثال، قوة التفاعل بين جسمين أو قوة الشد في الخيط (أو قضيب). لإلغاء أكبر قدر ممكن من القوى من المفيد أن تلاحظ أن أ) المحاور قد لا تكون متعامدة؛ ب) إذا كان النظام يتكون من عدة أجسام، فإن مجموعة مختلفة من المحاور يمكن اختيارها لكل جسم.

فكرة 2: لمعادلة العزوم، من الحكمة أن تختار نقطة محور تلغي أكبر قدر ممكن من أذرع القوى. مجددا، خصوصا لإلغاء عزوم القوى الغير مهمة.

على سبيل المثال، إذا اخترنا محورا ليكون عند نقطة تلامس جسمين، فإن ذراعي القوة لقوة الاحتكاك بينهما وقوة التفاعل بينهما سيكونان صفرا.

كما ذكر أعلاه، لنظام ثنائي الأبعاد، نستطيع أن نكتب معادلتين للقوى لكل جسم (مركبتي x- وy-) ومعادلة واحدة (لكل جسم)

للعزوم. من الممكن أن نزيد عدد المعادلات سواء باستخدام أكثر من إسقاطين لمعادلات اتزان القوى، أو باستخدام أكثر من نقطة محورية ("محور" دوران) لاتزان العزوم. على كل حال،

حقيقة 18: العدد الأقصى للمعادلات الخطية المستقلة (التي تصف اتزان القوة والعزم) يساوي عدد درجات الحرية للجسم (ثلاثة للحالة ثنائية الأبعاد، حيث أن الجسم يستطيع أن يدور في المستوى وينزاح على طول محورx- ومحورy-، وستة للحالة ثلاثية الأبعاد).

إذن، إذا كتبنا معادلتين لاتزان القوى ومعادلتين لاتزان العزوم فإن واحدة من هذه المعادلات الأربع ستكون دوما نتيجة زائدة من الثلاث الأخرى.

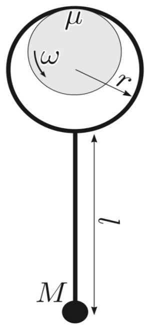
المعادلتان (1) و(3) تبدوان وكأنهما تقولان أنه للهندسة ثنائية الأبعاد، يتوجب علينا أن نستخدم معادلة عزوم واحدة ومعادلتي قوة؛

على أية حال، كل معادلة قوة يمكن "استبدالها" بمعادلة عزوم واحدة. بالتالي، بعيدا عن التشكيلة الأساسية لمعادلتي قوة ومعادلة عزم، نستطيع أن نستخدم معادلة قوة مع معادلتي عزم (بنقطتي محاور مختلفة)، ونستطيع كذلك أن نستخدم ثلاث معادلات عزوم بثلاث نقاط محورية مختلفة بشرط ألا تقع كلها على نفس الخط.

بالفعل، ليكن لدينا ظرفا اتزان للعزوم، $\sum_i \overrightarrow{OP_i} \times \vec{F_i} = 0$ و $\sum_i \overrightarrow{O'P_i} \times \vec{F_i} = 0$، حيث P_i هي نقطة التأثير للقوة $\vec{F_i}$. حينما نطرح أحد المعادلتين من الأخرى، سنحصل على $\sum_i \overrightarrow{OO'_i} \times \vec{F_i} = OO'_i \times \sum_i \vec{F_i} = 0$، وهو إسقاط اتزان القوى للعمودي على OO'. من المتوجب أن نؤكد أنه لابد من تواجد معادلة اتزان عزوم واحدة على الأقل في مجموعة معادلاتك: "تبادل" معادلات القوة بمعادلات العزم يعمل بسبب أن الدوران حول O بزاوية صغيرة $d\varphi$ متبوعا بدوران حول O' بزاوية $-d\varphi$ ينتج حركة انتقالية مقدارها $|OO'|d\varphi$، لكنه لا يوجد أي تسلسل من الحركات الانتقالية كهذه قد ينتج عنه حركة دورانية.

فكرة 3: استخدام ظروف اتزان العزم غالبا ما يكون ذا كفاءة أعلى من استخدام ظروف اتزان القوى، يمكننا أن نزيل قوة واحدة فقط عن طريق إسقاط الظرف على العمودي لهذه القوة؛ بنفس الوقت، لو اخترنا نقطة محورية كنقطة تقاطع امتدادات قوتين غير متوازيتين، كلا القوتين ستختفيان من المعادلة.

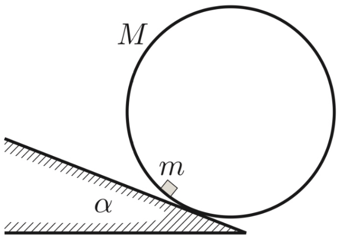
س.1 نهاية سلك خفيف حُنيت على شكل طوق نصف قطره r . طول الجزء المستقيم من السلك l . كره كتلتها M علقت بالنهاية الأخرى للسلك. البندول المتكون علق من الطوق بواسطة محور دوار. معامل الاحتكاك بين الطوق والمحور هو μ. أوجد زاوية الاتزان بين السلك والرأسي.



تم تصنيف هذه المسألة كصعبة لأن أغلب من يحاول أن يحلها يجد صعوبة في رسمها رسما نوعيا صحيحا. ما يساعد فعلا في رسم رسمة صحيحة هو الاعتماد على فكرة 2. تبسيطات رياضيات ستعطى بـ

حقيقة 19: على سطح مائل، الانزلاق سيبدأ عندما تحقق زاوية الميل $tan\alpha = \mu$.

س.2 توجد أسطوانة ذات كتلة M على سطح مائل بزاوية ميلان α، ومحورها أفقي. جسم كتلته m وضع داخلها. معامل الاحتكاك بين الجسم والأسطوانة هو μ. السطح المائل غير زلق. ماهي زاوية الميلان العظمى α بحيث تظل الأسطوانة مستقرة؟

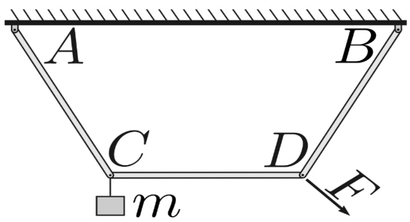


هنا يمكننا استخدام الحقيقة 18 وفكرة 2 إذا أضفنا

فكرة 4: أحيانا يكون من المفيد أن نعتبر نظاما مكونا من جسمين (أو أكثر) كجسم واحد ونكتب معادلات القوى و/أو العزوم للنظام كاملا

حينها، محصلة القوى (أو العزوم) المطبقة على الجسم المركب هي مجموع القوى (العزوم) الخارجية المطبقة على الأجزاء. حساباتنا تتبسط لأن القوى (العزوم) الداخلية بين الأجزاء الداخلية للجسم المركب يمكن تجاهلها (بسبب قانون نيوتن الثالث حيث يلغو تأثير بعضهم البعض). للمسألة الأخيرة، من النافع تكوين جسم مركب من الأسطوانة والجسم.

س.3 ثلاثة قضبان متماثلة تم توصيلها ببعضها البعض بواسطة مفاصل، المفصلان الخارجيان معلقان بسقف عند نقطتي A و B. المسافة بين هاتين النقطتين ضعف طول القضيب. كتلة m عُلِّقت بمفصل C. على الأقل كم مقدار القوة اللازمة المطبقة على D لحفظ النظام ثابتا مع كون القضيب CD أفقيا؟



نستطيع مجددا استخدام فكرة 2. الحل يدعم كذلك بواسطة

حقيقة 20: إذا كانت القوى مطبقة فقط على نقطتي نهاية قضيب وكانت مثبتات القضيب عند نقطتي نهايته غير صلدة (كأن يستند القضيب على حوامله أو أن يعلق بخيط أو مفصل)، فإن قوى الشد في القضيب موجهة على طول القضيب.

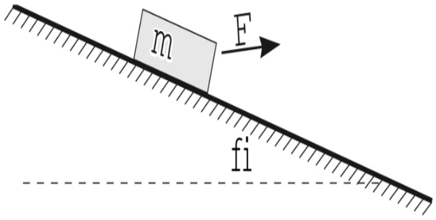
بالفعل، عند أي من نقطتي النهاية، محصلة القوة الخارجية المطبقة لابد أن تشير على طول القضيب، بما أن العزم بالنسبة لنقطة النهاية الأخرى يجب أن يكون صفرا.

كذلك، طبقا لقانون نيوتن الثالث، القوة الخارجية $\vec{F}$ يجب أن تقابل بقوة مساوية ومعاكسة لها مبذولة من القضيب، وهي قوة الشد $\vec{T}$، إذن $\vec{F} = -\vec{T}$.

بعض الأفكار كونية، خصوصا تلك الرياضية.

فكرة K-2. بعض النقاط القصوى من السهل إيجادها دون استخدام المشتقات، على سبيل المثال، المسار الأقصر من نقطة لسطح ما هو المعامد عليه.

س .4 ماهي القوة الصغرى اللازمة لإزاحة جسم كتلته m يستند على سطح مائل بزاوية ميلان α ، إذا كان معامل الاحتكاك μ؟ تحقق من الحالتين عندما أ)



$\alpha = 0$. ب) $0 < \alpha < \arctan(\mu)$.

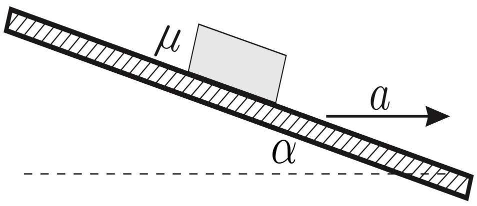
فكرة 5: اتزان القوى يمكن حله أحيانا باستخدام المتجهات بدون إسقاط أي شيء على المحاور.

حقيقة 19، أو بالأحرى تعميمها، ظهر أن له فائدة:

فكرة 6: إذا كان جسم على وشك الانزلاق (أو ينزلق)، فإن مجموع قوة الاحتكاك وقوة التفاعل يأخذ زاوية $\arctan(\mu)$ مع العمودي على السطح.

هذه الفكرة يمكن استخدامها كثيرا، مثلا في المسألة التالية.

س .5 كتلة سكنت على سطح مائل بزاوية ميل α. السطح يتحرك بتسارع أفقي a الذي يقع عموديا على الإسقاط الرأسي للسطح. حدد قيَم معامل الاحتكاك μ التي تسمح للكتلة بأن تظل على حالتها.



من المفيد هنا استخدام

فكرة 7: العديد من المسائل تصبح سهلة جدا في إطار مرجعي انتقالي غير قصوري.

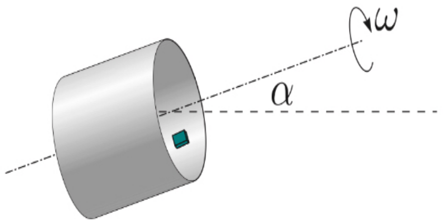
للتوضيح: في الإطار المرجعي الانتقالي نستطيع أن نعيد طرح قوانين نيوتن بتخيل أن كل جسم يتأثر بشكل إضافي بقوة قصورية $-m\vec{a}$ حيث $\vec{a}$ هي تسارع الإطار المرجعي وm هي كتلة الجسم المعطى. بالفعل، لقد تعلمنا في الكينيماتيكا أنه لإطار مرجعي يتحرك انتقاليا، التسارعات يمكن جمعها، راجع فكرة K-19؛ إذن، في إطار متحرك، كل الأجسام تحصل على تسارع إضافي$-\vec{a}$ وكما لو أنه كان هنالك قوة إضافية $\vec{F} = -m\vec{a}$ تؤثر على جسم كتلته m.

لاحظ أنه بسبب تكافؤ الكتلتين القصورية والجذبوية (أنظر إلى قسم 2.3) القوة القصورية مماثلة تماما لقوة الجاذبية.

بسبب هذا، نستطيع أن نستخدم

فكرة 8: محصلة قوتي الجاذبية والقصور تستعمل كقوة جاذبية فعالة.

س .6 أسطوانة نصف قطرها R تغزل حوالي محورها بسرعة زاوية ω. يقع جسم صغير على سطحها الداخلي، معامل الاحتكاك بين الجسم والسطح الداخلي μ. أوجد قيم السرعة الزاوية بحيث أن الجسم لا ينزلق (يظل ساكنا بالنسبة للأسطوانة). اعتبر الحالتين حيث (أ) محور الأسطوانة أفقي. (ب) محور الأسطوانة مائل بزاوية α بالنسبة للأفقي.

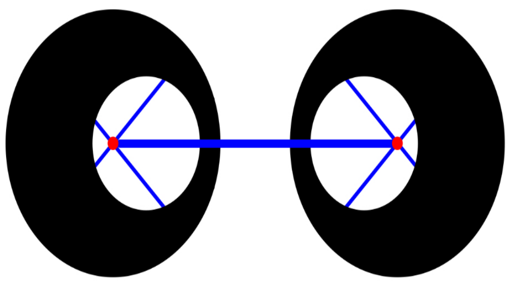


فكرة 9: يمكن استخدام إطار مرجعي دوار عبر إضافة قوة طرد مركزي $m\omega^2\vec{R}$ (حيث ω السرعة الزاوية للإطار و$\vec{R}$ هو متجه مرسوم من محور الدوران إلى النقطة في السؤال) وقوة كوريوليس. الأخيرة غير مهمة (أ) لجسم ساكن أو متحرك بشكل موازي لمحور الدوران في إطار مرجعي دوار (في هذه الحالة قوة كوريوليس تساوي صفرا)؛ (b) لحفظ الطاقة (في هذه الحالة قوة كوريوليس معامدة على السرعة المتجهة، وبالتالي، لا تغير الطاقة).

تحذير: في هذه الفكرة، محور الدوران يجب أن يكون فعليا، ليس لحظيا. تعبيرات قوة الطرد المركزي وقوة كوريوليس اشتقت في ملحق 4. لمسألة 6، تذكر كذلك فكرة K-2b وفكرة 6؛ لجزء (ب)، أضف

فكرة K-11: في حالة الهندسة ثلاثية الأبعاد، اعتبر قطاعات ثنائية الأبعاد. هذا جيد خصوصا إذا كانت كل الأجسام المهمة (على سبيل المثال، متجهات القوة) تقع في قطاع واحد. توجه وموقع القطاعات قد يتغير مع الزمن.

$\boxed{\text{س}.7}$ عربة لديها عجلتان أسطوانيتان موصلتان بواسطة قضيب أفقي باستخدام أسلاك ومحور عديم الاحتكاك كما هو موضح في الشكل. كلا العجلتين مصنوعتان من قرص متجانس ذو نصف قطر R ، وثقب أسطواني نصف قطره $R/2$ محفور موازيا للمحور على بعد $R/3$ من مركز العجلة. تم تدوير العجلتين بحيث تشير الحفرتان لبعضهما البعض، وحركت العربة على سطح أفقي. ماهي السرعة الحرجة v التي ستبدأ فيها العجلات بالقفز؟



هذه المسألة شبيه نوعا ما بالمسألة السابقة، ويمكننا حلها باستخدام تلك الأفكار التي درسناها مسبقا. بالفعل، لو افترضنا العملية في إطار يتحرك مع العربة، يمكننا فحسب تطبيق قانون نيوتن الثاني للتسارع المركزي لمركز كتلة العجلة. على كل حال، لنقم بحلها باستخدام قليل من الأفكار الإضافية.

فكرة 10: قوة الجاذبية (أو القوة الوهمية التي تتناسب مع كتلة الجسم) يمكن اعتبارها على أنها مطبقة على مركز الكتلة فقط في الحالات الآتية:
(أ) مجال الجاذبية الفعال متجانس؛
(ب) الجسم يمتلك توزع كتلي متماثل كرويا؛
(ت) مجال الجاذبية الفعال يتناسب مع متجه نصف القطر، على سبيل المثال، مجال قوة الطرد المركزي إذا كانت الحركة مقيدة للسطح العمودي على محور إطار الدوران. في كل الحالات الأخرى، قد يحدث بالصدفة أن قوة الجاذبية ما تزال مطبقة على مركز الكتلة، لكن عادة لا تكون. فمثلا، قوة كوريوليس يمكن اعتبارها مطبقة على مركز الكتلة فقط إذا كان الجسم لا يدور (كما يرى من الإطار الدوار).

جزء (أ) تم تحفيزه في الفقرة التي تلي فكرة 9؛ الجزآن (ب) و(ت) سيتم تحفيزهما في كتيب الكهرباء والمغناطيسية (المجالات الكهروسكونية والجذبوية غير النسبية تخضع لقوانين متشابهة).

يوجد فكرتان إضافيتان يمكن استخدامهما هنا،

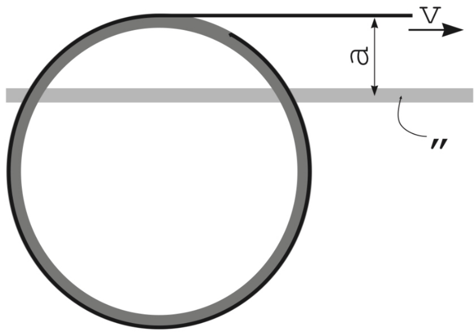
فكرة 11: من أجل الوصول إلى شكل أكثر تماثلا أو لجعل الحالة أبسط بطريقة ما، من المفيد أحيانا تمثيل منطقة ما ذات قيمة صفرية لكمية ما كتراكب منطقتين بإشارات متعاكسة لنفس الكمية.

هذه الكمية يمكن أن تكون الكثافة الكتلية (كمثل هذه الحالة)، الشحنة أو كثافة التيار، مجال قوة ما، إلخ. غالبا ما تجمع هذه الحيلة مع

فكرة 12: اجعل المسألة متماثلة قدر المستطاع.

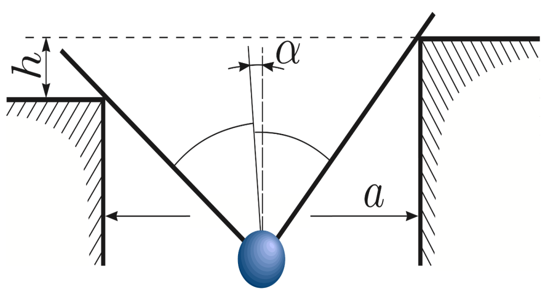
هذا الهدف يمكن تحقيقه عبر تطبيق فكرة 11، لكن كذلك بواسطة اختيار الإطارات المرجعية المناسبة، تجزيئ عملية الحل لعدة أطوار (حيث تستخدم بعض الأطوار هندسة متماثلة)، إلخ.

س 8. أسطوانة مجوفة كتلتها m ونصف قطرها R تقف على سطح أفقي بنهايتها المسطحة الناعمة ملامسة السطح في كل مكان. لفَّ خيط حواليها وتم سحب النهاية الحرة بسرعة v موازية للخيط. اعتبر حالتين: (أ) معامل الاحتكاك بين السطح والأسطوانة صفر في كل مكان ما عدا شريط مستقيم نحيل (أنحف كثيرا من نصف قطر الأسطوانة) بمعامل احتكاك μ، الشريط موازي للخيط ومسافته عنه $a < 2R$ (الشكل يوضح المنظر من الأعلى)؛ (ب) معامل الاحتكاك μ في كل مكان. تلميح: أي حركة سطحية لجسم صلد يمكن اعتبارها كدوران حول مركز دوران لحظي، بمعنى أن متجه السرعة لأي نقطة في الجسم هي نفسها كما لو كان المركز اللحظي هو المحور الدوران الحقيقي.
هذه مسألة صعبة فعلا. من المفيد ملاحظة

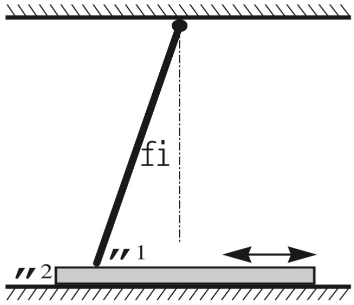


فكرة 13: إذا كان على جسم أن يتحرك بسرعة متجهة ثابتة، فإن المسألة عن الإستاتيكا.
كذلك تذكر الفكرتين 1 و2. الأخيرة يمكن استبدالها بنتيجتها،
فكرة 14: إذا كان جسم في اتزان يتأثر بثلاثة قوى عند ثلاث نقاط منفصلة، فإن امتدادات القوى تتقاطع في نقطة واحدة (لاحظ أن نقطة التقاطع قد تكون لانهائيا بعيدة—خطوط متقاطعة عند اللانهاية يعني أن الخطوط موازية لبعضها البعض). إذا كان هنالك قوتان فحسب، فإن الخطين يتطابقان.
هذه الفكرة المفيدة جدا تأتي مباشرة من شرط اتزان العزوم إذا أخذت نقطة التقاطع لتكون النقطة المحورية (بذراعي قوة ومحصلة عزم مساوية للصفر، الذراع الثالثة لابد أن تساوي صفرا).
حقيقة مفيدة أخرى هي
حقيقة 21: قوة الاحتكاك المؤثرة على نقطة معطاة تكون دائما معاكسة لاتجاه السرعة المتجهة لهذه النقطة في الإطار المرجعي للجسم المسبب للاحتكاك.
من وقت لآخر تستخدم بعض الحيل الرياضية؛ هنا هي خاصية للزاويا المحيطية، وبشكل أكثر تحديدا حالة نظرية طاليس (خلال كل النظريات الهندسية، هذه غالبا هي الأكثر نفعا لحل المسائل الفيزيائية)،
حقيقة 22: الزاوية القائمة متضمنة بواسطة نصف دائرة (بشكل عام: الزاوية المحيطية بالراديان تساوي نصف النسبة بين طول قوسها ونصف القطر).
هذه الخاصية للزوايا المحيطية مفيدة كذلك في المسألة القادمة، إذا أضفنا
فكرة 15: في الاتزان المستقر تكون طاقة الوضع للجسم دنيا.

س 9. سلك خفيف حُنِيَ على شكل زاوية قائمة ووصلت كرة ثقيلة بالانحناء. تم وضع السلك على دعامات ذات فرق ارتفاع h ومسافة أفقية a. أوجد موقع السلك عند اتزانه. عبر عن الموقع بالزاوية بين منصف الزاوية القائمة والرأسي. أهمل أي احتكاك بين السلك والدعامات؛ تمتلك الدعامات حزوزا تجعل كل الحركة في مستوى السلك والشكل.



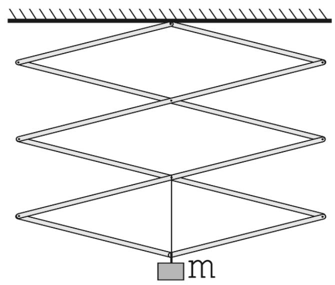
س 10. قضيب طوله l علق بسقف بارتفاع $h < l$. في الأسفل، يتم جر لوح على الأرضية. يفترض بالقضيب أن يوقف حركة اللوح في اتجاه واحد في أثناء سماحه للوح بالحركة في الاتجاه الآخر. ما هو الظرف الذي يتوجب أن يتحقق حتى يقوم بعمله؟ معامل الاحتكاك هو μ_1 بين اللوح والقضيب، و μ_2 بين اللوح والأرضية.



لنتذكر حقيقة 6: إذا كان الانزلاق النسبي بين جسمين له اتجاه معروف فإن اتجاه محصلة متجهي قوتي الاحتكاك والتفاعل يكون دائما محددا بتفرد بواسطة معامل الاحتكاك. إذا كانت قوة تجعل أحد الأجسام يتحرك بطريقة ما حيث تزداد قوى التفاعل فعندها سينسدان: كلما زادت القوى التي نسحب بها الأجسام، كلما ازدادت قوتا الاحتكاك والتفاعل اللتان تقيدان الأجسام.

فكرة 16: الاحتكاك يستطيع حجب الحركة. في حالة كهذه، كل القوى تصبح مهملة باستثناء قوة الاحتكاك، قوة التفاعل والقوة المطبقة الخارجية التي تحاول جعل النظام يتحرك، لأن قوة الجاذبية وغيرها ثابتة، لكن القوى التي تحدثنا عنها تصبح أكبر كلما حاولنا أن نسحب أو ندفع بشكل أقوى.

س 11. أربع قضبان طويلة وأربع قضبان بنصف طول الأولى ثبتت ببعضها البعض مكونة ثلاث معينات متطابقة. أحد نهايات هذه الآلة الغريبة علق بالسقف، النهاية الأخرى معلقة بوزن كتلته m . المفصل القريب للكتلة موصل بالمفصل الذي يعلوه بخيط. أوجد قوة الشد في الخيط.



هذه المسألة يمكن حلها بسهولة بواسطة استخدام طريقة *الإزاحة الافتراضية*.

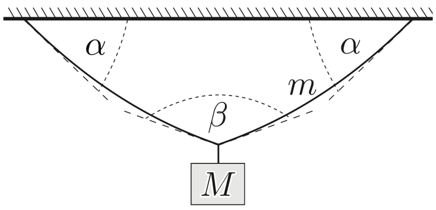
طريقة 1: تخيل أنه بمقدورنا تغيير طول خيط أو قضيب بقوة الشد التي نبحث عنها بمقدار ضئيل جدا Δx. بمساواة الشغل $T\Delta x$ بتغير طاقة الوضع $\Delta\Pi$، سنحصل على $T = \Delta\Pi/\Delta x$.

تعميم: في حالة المزيد من القوى الخارجية $(i = 1,2,\ldots)$ $\vec{F_i}$ مؤثرة على النظام بإزاحات لنقاط تأثيرها $\delta\vec{x_i}$، بينما يحصل للخيط أو القضيب المهم استطالة طولية Δx، فإن

$$T = (\Delta\Pi - \sum_i \delta\vec{x_i}\cdot\vec{F_i})/\Delta x$$

هذه الطريقة يمكن استخدامها لإيجاد بعض القوى غير الشد (على سبيل المثال، في المسائل حول البكرات): عبر إزاحة نقطة التأثير لقوة غير معلومة تخيليا يستطيع المرء إيجاد إسقاط هذه القوة في اتجاه الإزاحة الافتراضية.

س 12. حبل كتلته m عُلق بالسقف من نهايتيه وتم توصيل ثقل كتلته M بمركزه. المماس للحبل عند أي من نهايتيه يُكَوِّن زاوية α بالنسبة للسقف. ما هي الزاوية β بين المماس للحبل عند الثقل؟

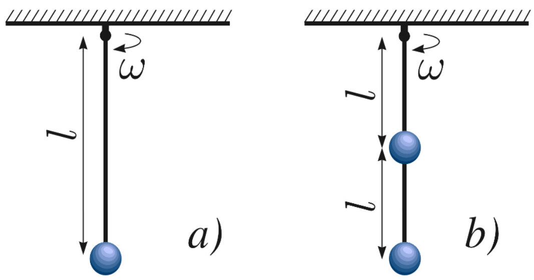


لنقم باستدعاء حقيقة 14: الشد في خيط معلق بحرية يتجه إلى مماس الخيط. بالإضافة يمكننا توظيف

فكرة 17: للحبال المعلقة، الأغشية إلخ. من المفيد اعتبار قطعة من الحبل بشكل منفصل والتفكير حول مركبات قوى الاتزان المؤثرة عليها.
في الحقيقة، هنا نحن لا نحتاج الفكرة بشكل عام، بل أحد نتائجها،
حقيقة 23: المركبة الأفقية للشد في الحبل الثقيل ثابتة.
باستخدام الفكرة 17 والحقيقة 23، من السهل نسبيا إظهار أن التقريب الآتي صالح.
فكرة 18: إذا كان وزن الجزء المعلق من الحبل أصغر بكثير من الشد فيه فإن انحناء الحبل صغير وتوزع الكتلة الأفقي يمكن اعتباره بدقة كثابت.
هذا يسمح لنا بكتابة شرط اتزان العزوم للجزء المعلق من الحبل (حيث أننا نعرف الإحداثي الأفقي لمركز كتلته). المسألة القادمة توضح هذه الطريقة.

س.13 يقوم صبي بجر حبل طوله $L = 50\mathrm{m}$ على طول أرض أفقية معامل احتكاكها $\mu = 0.6$ ، حاملا نهاية الحبل عند ارتفاع $H = 1\mathrm{m}$ من الأرض. ما هو طول الجزء الذي لا يلمس الأرض من الحبل l ؟

س.14 قضيب خفيف طوله l تم تعليقه بطريقة ما حيث أن المفصل ينطوي في سطح واحد فقط. تم تدوير المفصل حول نفسه بسرعة زاوية ω حول المحور الرأسي. كرة صغيرة ثبتت في النهاية الأخرى للقضيب. (أ) أوجد السرعات الزاوية التي تجعل الاتجاه الرأسي مستقرا. (ب) الكرة الآن ثبتت بمفصل آخر وكذلك ثبت قضيب مماثل لهذا المفصل (أنظر إلى الشكل أدناه)؛ الفصل العلوي تم تدويره بنفس الطريقة. ما هو ظرف الاتزان الآن للاتجاه الرأسي؟



هنا نستخدم الفكرة الآتية
فكرة 19: لتحليل استقرار اتزان ما، يوجد خياران.
أولا، افترض أن النظام ينحرف قليلا عن اتزانه، سواء بإزاحة صغيرة Δx أو بزاوية صغيرة $\Delta\varphi$، ثم أوجد اتجاه القوة أو العزم الذي سيظهر — سواء كان باتجاه الاتزان أو بعيدا عنه.
ثانيا، عبر عن التغير الكلي لطاقة الوضع بدلالة إزاحة صغيرة لترى ما إذا كان لها قيمة عظمى أو صغرى (لنظام متزن، لابد لطاقة وضعه أن تكون قصوى)؛ الصغرى ترتبط بالاستقرار، والعظمى ترتبط بعدم الاستقرار (لتحفيز وتعميم هذه الطريقة، انظر إلى ملحق 5).
لاحظ جيدا! احسب تقريبيا: عند العمل مع القوى (العزوم)، غالبا ما يكفي إبقاء الحدود التي تتناسب خطيا مع الانحراف فقط؛ عند التعامل مع طاقة الوضع، يتم استخدام التقريب التربيعي.
من المهم للغاية في الفيزياء المقدرة على تطبيق تقريبات خطية، تربيعية، وأحيانا لدرجات أعلى، المبنية على
فكرة 20: متسلسلة تايلور

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta x^2}{2} + \cdots$$

فمثلا، $\sin\varphi \approx \tan\varphi \approx \varphi$؛ $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$؛ $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$؛ $(1+x)^a \approx 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2$؛ $\ln(1+x) \approx 1 + x - \frac{x^2}{2}$. طريقة مشابهة يمكن استخدامها للتعبيرات عديدة المتغيرات، على سبيل المثال $(x+\Delta x)(y+\Delta y) \approx xy + x\Delta y + y\Delta x$. اعتبر استخدام تقريبات كهذه متى ما كانت البيانات الابتدائية تلمح أن أحد المعاملات صغير.
الحالة (ب) أصعب بشكل فعلي حيث أن للنظام درجتي حرية (على سبيل المثال، زوايا الانحراف $\Delta\varphi1$ و$\Delta\varphi2$ للقضيبين). على الرغم من أن الفكرة 19 يمكن تعميمها لأكثر من درجة حرية واحدة، يتضح أنه من الأسهل البدء من الفكرة 15.
فكرة 21: الاتزان $x = y = 0$ لنظام يمتلك درجتي حرية يكون مستقرا (وفقط إذا) كانت طاقة الوضع $\Pi(x,y)$ كدالة في متغيرين لها نقطة صغرى محلية عند $x = y = 0$، بمعنى أنه لأي زوج من قيم x, y قرابة نقطة الاتزان $(0,0)$، المتباينة $\Pi(x,y) > \Pi(0,0)$ يجب أن تكون صحيحة.

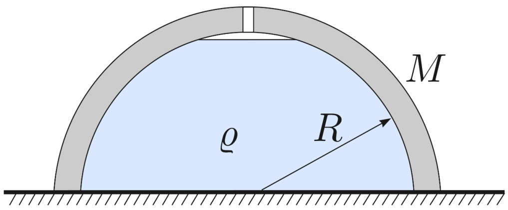
س.15 إذا وضعنا عمودا ذو مقطع عرضي مربع الشكل وذو كثافة منخفضة جدا في الماء، سوف يلتف أحد زوجي الأضلاع المتقابلة حتى يصبحا أفقيين. على أية حال، هذا الاتجاه يصبح غير مستقر عندما نزيد كثافته. أوجد الكثافة الحرجة التي يحصل عندها هذا التحول. كثافة الماء هي $\rho_w = 1000kg/m^3$.

فكرة 22: العزم المؤثر على جسم موضوع داخل سائل يساوي العزم من قوة الطفو، إذا أخذنا القوة الأخيرة لتكون مؤثرة على مركز كتلة السائل المزاح.

صلاحية الفكرة 22 يمكن رؤيتها لو تخيلنا أن الحجم المزاح تم مجددا ملؤه بالسائل، وأن الجسم نفسه تم إبعاده. حينها طبعا سيكون الحجم المعاد ملؤه في حالة اتزان (كما لو أنه جزء من السائل الساكن). هذا يعني أن العزم من قوة الطفو يجب أن يوازن العزم القادم من وزن الحجم المعاد ملؤه؛ وزن الحجم المعاد ملؤه مطبق على مركز كتلته، وطبقا للفكرة 14، قوة الطفو يجب أن تكون مؤثرة على الخط المرسوم المار بمركز الكتلة.

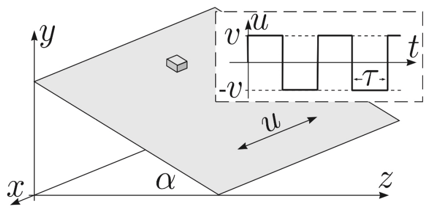
بعيدا عن فكرة 22، حل مسألة 15 يمكن أن يبسط عن طريق استخدام الفكرتين 11 و12.

$\boxed{\text{س }16.}$ حاوية نصف كروية وضعت مقلوبة على سطح أفقي ناعم. تم سكب ماء داخلها عبر فتحة صغيرة في أسفل الحاوية. بالضبط عندما امتلأت الحاوية، بدأت المياه بالتسرب بين الطاولة وحَدِّ الحاوية. أوجد كتلة الحاوية إذا كانت كثافة الماء ρ ونصف قطر نصف الكرة R.



فكرة 23: إذا بدأ السائل بالانسياب من تحت خزان مقلوب، فإن القوة العمودية يجب أن تكون تلاشت بين الطاولة وحواف الخزان. بالتالي القوة المؤثرة على النظام المكون من الخزان والسائل من الطاولة تساوي فقط القوة من الضغط الهايدروستاتيكي.
الأخير يعطى بـ pS، حيث p هو ضغط السائل قرب أعلى الطاولة وS هي مساحة الجهة المفتوحة للخزان.

$\boxed{\text{س }17.}$ وضع الجسم على سطح مائل بزاوية α، معامل الاحتكاك بينهما هو $\mu > tan\alpha$. السطح المائل يسحب أماما وخلفا بشكل سريع بحيث أن متجه السرعة u مواز لكل من السطح المائل والأفق وله مقدار ثابت v؛ اتجاه u ينعكس بشكل مفاجئ بعد كل مدة زمنية τ. ما هو متوط السرعة w لحركة الجسم؟ افترض أن $g\tau \ll v$.



فكرة 24: إذا كان النظام يتغير مع تردد عالي، فإن من العملي غالبا استخدام المتوسط الزمني للقيم $\langle X\rangle$ بدلا عن الحسابات التفصيلية. في الحالات الأكثر تعقيدا، مركبة تردد الـ $\tilde{X}$ يمكن إضافتها (بحيث $X = \langle X\rangle + \tilde{X}$)

طريقة 2: (طريقة الاضطراب perturbation method) إذا كان تأثير قوة ما يمكن افتراض صغره، فحينها حُل المسألة في طورين (أو أكثر): أولا أوجد حركة الجسم عند غياب هذه القوة (ما يسمى بالتقريب الصفري)؛ حينها تظاهر أن الجسم يتحرك كما وجدت في الطور الأول، لكن يوجد هنالك قوة صغيرة تؤثر عليه. انظر أي تصحيح (ما يسمى بالتصحيح الأول) يمكن إضافته للتقريب الصفري بسبب هذه القوة.

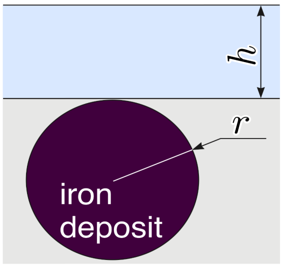
في هذه الحالة المحددة، اختيار التقريب الصفري يحتاج بعض الشرح. الشرط أن $g\tau \ll v$ يوحي أنه خلال زمن دوري واحد، السرعة المتجهة للجسم لا يمكن أن تتغير كثيرا. بالتالي فإن كان الجسم ينزلق للأسفل في الحالة الابتدائية عند سرعة ما w وقمنا باعتبار مدة زمنية قصيرة، فإن سرعة الجسم المتجهة يمكنها أخذها كثابت في التقريب الصفري، بحيث أنه تتحرك في خط مستقيم. يمكننا الآن الانتقال للطور الثاني لإيجاد متوسط قوة الاحتكاك بناء على الحركة التي حصلنا عليها في الطور الأول.

لمسألة 17، تذكر درسا من علم الحركة،

فكرة 7-K إذا كان الاحتكاك يؤثر في الحركة فإن الإطار المرجعي المناسب غالبا ما يكون البيئة المسببة للاحتكاك.

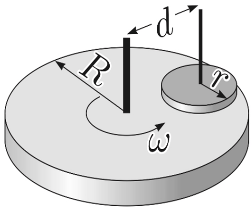
$\boxed{\text{س }18.}$ لنقم باستكشاف لأي درجة قد يؤثر تراكم الحديد بشكل رواسب على مستوى سطح الماء. اعتبر راسب حديد في قاع المحيط عند عمق $h = 2km$. حتى نبسط تحليلنا، لنفترض أن الراسب كروي بنصف قطر $1km$ بكثافة أكبر من الصخور المجاورة بـ
$\Delta\rho = 1000km/m^3$. افترض أن هذه الكرة تلمس قاع المحيط بأعلاها، بمعنى أن مركزها موضوع عند عمق $r + h$.

بكم يختلف مستوى الماء الواقع مباشرة فوق راسب الحديد عن متوسط مستوى الماء؟



فكرة 25: سطح السائل في الاتزان يأخذ شكلا متساوي الجهد، بمعنى أن طاقة الجسيمات على سطحه متساوية في كل نقطة على السطح.
إذا لم تكن هذه هي الحالة، فإن طاقة وضع السائل يمكن تخفيضها عن طريق السماح لبعض الجسيمات على سطحه بالجريان على طول السطح لحيثما كانت طاقة الوضع أقل (انظر إلى فكرة 15). تذكر كذلك حقيقة 10.

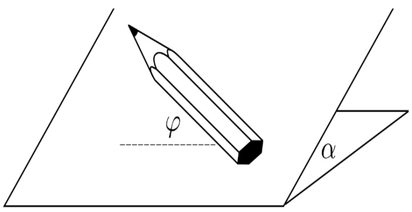
س.19 منصة أفقية تدور حول محور رأسي بسرعة زاوية ω . قرص ذو نصف قطر R يستطيع أن يدور بحرية ويتحرك للأعلى وللأسفل على طول محور رأسي زلق موضوع عند مسافة $d > R$ من محور المنصة. القرص مضغوط على المنصة الدوارة بسبب الجاذبية، معامل الاحتكاك بينهما هو μ. أوجد السرعة الزاوية للقرص. افترض أن الضغط موزع بالتساوي على قاعدة القرص كاملة.



فكرة 26: إذا تحولنا إلى إطار مرجعي دوار، فبإمكاننا جمع السرعات الزاوية حول محاور الدوران اللحظية كما كنا نجمع عادة السرعات المتجهة.
بالتالي فإن $\overrightarrow{\omega_3} = \overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2}$، حيث $\overrightarrow{\omega_1}$هي السرعة الزاوية للإطار المرجعي، $\overrightarrow{\omega_2}$هي السرعة الزاوية للجسم في الإطار المرجعي الدوار و$\overrightarrow{\omega_3}$هي السرعة الزاوية في الإطار المستقر. في هذا السؤال، يمكننا استخدام الحقيقة 21، الأفكار 2،9،13 K-7.و كذلك
فكرة K-33: الحركة الاعتباطية لجسم صلد يمكننا اعتبارها كدوران حول مركز دوران لحظي (بدلالة متجهات سرعة الجسم).
طريقة 3: (حساب التفاضل) قسم الكائن إلى قطع لانهائية الصغر أو العملية إلى فترات لانهائية القصر (عند الضرورة، استخدم فكرة 20).
خلال قطعة (فترة) بالغة الصغر، الكميات التي تتغير في المكان (الزمان) يمكن أخذها كثابت (في حالتنا، الكمية هي اتجاه قوة الاحتكاك). عند الضرورة (انظر إلى المسألة القادمة)، هذه الكميات يمكن جمعها عبر كل القطع—هذا يسمى التكامل.

س.20 آلة تتكون من قرص ثقيل كتلته M مغي بكثافة بشعيرات قصيرة من جهة واحدة، حيث أنها إذا كانت على الأرضية، فإن وزنها يوزع بالتساوي على مساحة دائرية بنصف قطر R. محرك كهربائي يجعل القرص يدور بسرعة زاوية ω ، المستخدم يقوم بمعادلة العزم الناتج عن قوى الاحتكاك بواسطة مقبض طويل. نفس المقبض يمكن استخدامه لدفع الآلة أماما وخلفا على طول الأرضية. بأي قوة يجب دفع الآلة بها لجعلها تتحرك بسرعة v. افترض أن السرعة الزاوية ω للقرص كبيرة، $\omega R \gg v$، وأن القوة اللازمة لمعادلة العزم يمكن اهمالها. معامل الاحتكاك بين الشعيرات والأرضية هو μ.
هنا نحتاج حقيقة 21، أفكار K-33،11، وبالإضافة
فكرة 27: حاول أن تحدد المنطقة حيثما تكون القوى (أو العزوم) تلغي بعضها البعض عند أزواج من النقاط.
أزواج النقاط هذه غالبا ما تقع متماثلة. فكرة 12 ذات صلة أيضا.

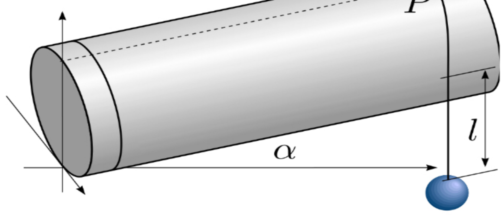
س.21 قلم رصاص سداسي يقع على ميل بزاوية ميلان α؛ الزاوية بين محور قلم الرصاص وخط التقاطع بين الميل والأفقي هو φ. تحت أي حالة لن يتدحرج قلم الرصاص للأسفل؟



فكرة 28: عند حل مسائل ثلاثية الأبعاد، يكون من المفيد في بعض الأحيان حساب الإحداثيات في محاور مختارة بشكل مناسب وتطبيق علاقات الدوران المكاني. للدوران حول محور z بزاوية φ، $x' = xcos\varphi - ysin\varphi$ و $y' = ycos\varphi + xsin\varphi$.

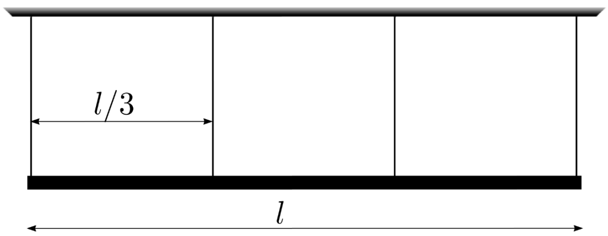
أي متجه يمكن التعبير عنه بواسطة مركباته في حالتنا؟ الخيار الواحد الوحيد هو الإزاحة الصغيرة لمركز الكتلة عندما تبدأ في الحركة؛ في النهاية نحن مهتمين فقط بمركبتها الرأسية.

س .22 أسطوانة زلقة نصف قطرها R تم رفعها لصنع زاوية α بين محورها والأفقي. خيط بطول L تم توصيله بأعلى نقطة P لمقطع عرضي للأسطوانة، النهاية الأخرى للخيط مشدودة بوزن كتلته m. يأخذ الخيط موضع اتزانه، كم طول الجزء الذي لا يلمس الأسطوانة l؟ الوزن مزاح عن موضع اتزانه بحيث أن متجه الازاحة موازٍ للسطح الرأسي المتضمن محور الأسطوانة؛ ما هو الزمن الدوري لاهتزازات صغيرة؟



فكرة 29: نشر جزء من سطح جسم ثلاثي الأبعاد والنظر إلى السطح المسطح يساعد في حل المسائل، من بين أمور أخرى، يساعد هذا في إيجاد المسافات الأقصر.

س .23 قضيب منتظم كتلته m وطوله l معلق بواسطة أربعة أسلاك خفيفة متماثلة. تم توصيل الأسلاك بالقضيب بشكل رأسي على مسافة $l/3$ بعضها البعض، في حين أن القضيب أفقي، قوى الشد هي نفسها لكل الأسلاك، $T_0 = mg/4$. أوجد قوى الشد بعد أن قطعت إحدى الأسلاك الخارجية.



فكرة 30: إذا استخدم عدد من عناصر التثبيت (قضبان، خيوط، إلخ) أكثر من العدد الأدنى الضروري لإبقاء جسم في حالة اتزان سكوني (أي أكثر من عدد درجات الحرية) وكانت عناصر التثبيت صلدة بشكل مطلق، فإن الشد في العناصر لا يمكن تحديده. من أجل جعل هذا ممكننا، يجب أن تعتبر العناصر مرنة (قادرة على التشوه)؛ تذكر حقيقة 13.

لنلاحظ أن هذا التصريح في توافق مع حقيقة 18 التي تعطي العدد الممكن من المعادلات (لا يمكن أن يكون هنالك مجاهيل أكثر من المعادلات). في هذه الحالة المعينة، نحن نتعامل بشكل فعال مع هندسة وحيدة البعد بدون أي قوى أفقية، لكن الجسم يمكن أن يدور (عند غياب الأسلاك). بالتالي فلدينا درجتا حرية، مرتبطتين بالحركتين الرأسية والدورانية. بما أن الأسلاك متطابقة، لابد أن يكون لهم نفس الجسوء كذلك؛ كلمة "سلك" تلمح لجسوء كبير أي أن التشوه (وكذلك زاوية انحدار القضيب) صغيران.

4 الديناميكا

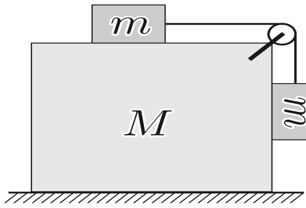
نسبة كبيرة من مسائل الديناميكا تتضمن إيجاد تسارع بعض أنظمة الأجسام، أو إيجاد القوة المؤثرة على الأجسام. يوجد عدة طرق ممكنة لحل مسائل كهذه، هنا سنعتبر ثلاثة منهم.

طريقة 4: سنجد كل القوى المؤثرة على كل جسم، يتضمن ذلك القوى العمودية وقوى الاحتكاك، وسنكتب قانون نيوتن الثاني بدلالة المركبات (بمعنى إسقاط المعادلة على محاور — x و y وربما z). لاحظ جيدا! اختر اتجاه المحاور بحذر، انظر إلى فكرة 1. في بعض الحالات، قد يكون ممكنا (وأكثر ملاءمة) الامتناع عن استخدام الإسقاطات والعمل مع المعادلات المتجهية.

ضع في الحسبان أنه لأي مسألة مطروحة جيدا، يتوجب أن يكون ممكنا كتابة عدد من المعادلات الخطية المستقلة مساو لعدد المجاهيل (اتباع فكرة 1 قد يقلل هذا الرقم). القواعد التوجيهية لإيجاد كم عدد المعادلات التي يمكن إيجادها تظل نفسها كالتي في مسائل الإستاتيكا، انظر إلى فكرة

18 (للوقت الحالي سنعتبر مسائلا حيث لا تدور الأجسام، لذا فنحن نحتاج إلى عد درجات الحرية الانتقالية فقط). إذا كان عدد المعادلات وعدد المجاهيل لا يتوافق، فإما أنها مسألة مطروحة بشكل خاطئ، أو أنه يتوجب عليك وضع افتراضات فيزيائية إضافية (مثل حالة مسألة 23).

س.24 يقع مكعب بكتلة M على سطح أفقي زلق. يوجد فوقه مكعب آخر بكتلة m الذي هو بدوره موصل بمكعب مماثل بواسطة خيط. تم سحب الخيط خلال بكرة موضوعة عند زاوية المكعب الكبير والمكعب الثاني معلق رأسيا. في البداية، كان النظام في سكون. أوجد تسارع المكعب الكبير بعد أن يحرر النظام مباشرة. تستطيع أن تهمل الاحتكاك، كما يمكنك أن تهمل كتلتي الخيط والبكرة.



هذا السؤال يمكن حله بنجاح بواسطة طريقة 4، لكننا نحتاج المزيد من الأفكار.

فكرة 31: إذا كان الجسم ابتدائيا في سكون، فإن متجه إزاحته سيكون موازيا للقوة المطبقة عليه (وتسارعه كذلك) بعد بداية الحركة فورا.

فكرة 32: إذا كانت أجسام متصلة بواسطة حبل أو قضيب أو ربما بكرة أو كان أحدها مدعوما بواسطة الآخر، فإنه يوجد علاقة خطية حسابية بين إزاحات الأجسام (وسرعاتهم وتسارعاتهم) التي تصف حقيقة كون طول الخيط (القضيب، إلخ) ثابت.

العلاقة بين الإزاحات يكون غالبا من السهل إيجاده؛ إذا كانت الحركة على طول خط مستقيم، هذه العلاقة يمكن حساب تفاضلها مرة أو مرتين بالنسبة للزمن، لإيجاد العلاقة للسرعات والتسارعات. يجب أخذ الحيطة في حالة الحركة المنحنية. في حالة السرعات ولأجسام صلدة، فسنصل إلى فكرة 35-K (لنقطتين على جسم صلد، إسقاطات السرعات على الخط الواصل بينهم متساوية). في حالة التسارعات، الحالة أكثر تعقيدا لوجود تسارعات مركزية. على كل حال، إذا بدأت الحركة من السكون، يمكننا الافتراض لمدة قصيرة جدا من الزمن t أن التسارع ثابت وأن التسارع المركزي v^2/r مهمل (السرعة v ما تزال صغيرة جدا)، بالتالي يوجد علاقة خطية بسيطة $\vec{s}=\frac{t^2}{2}\vec{a}$ بين الإزاحة $\vec{s}$ والتسارع $\vec{a}$ لنقطة محددة لجسم محدد؛ المعامل $\frac{t^2}{2}$ سيكون مشتركا بين الإزاحات، لذلك عند أخذ النسبة سيتلاشى هذا المعامل وتصبح الإزاحات تتناسب مع التسارعات.

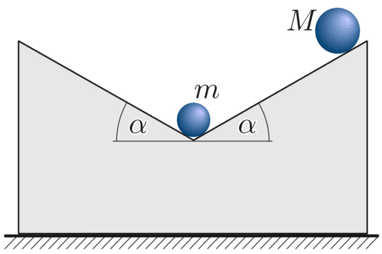
فكرة 33: إذا رمى حبل خفيف على بكرة مثالية (كلاهما مهمل الكتلة) فإن الشد في الحبل له نفس المقدار في كلا جهتي البكرة؛ إذا التف الحبل عند البكرة، فإن هنالك قوة عمودية بين البكرة والحبل التي يمكن إيجادها عن طريق الجمع المتجهي لقوى الشد.

بالفعل، اعتبر ذلك الجزء من الحبل الذي يلامس البكرة؛ كتلتها يمكن إهمالها، بالتالي فإن الحد القصوري في قانون نيوتن الثاني يمكن إهماله كذلك، لهذا لابد أن تكون القوة العمودية المؤثرة في الحبل مساوية ومعاكسة للجمع المتجهي لقوى الشد.

طريقة 5: هي كطريقة 4، لكن يتم التحقيق في الحركة في إطار مرجعي غير قصوري (انظر إلى فكرة 7) حيث تكون إحدى الأجسام في سكون.

طريقة 5 مفيدة في العديد من المسائل التي تتضمن الإسفينات: من الصعب كتابة شرط بقاء جسم على الإسفين في إطار المختبر. تطبيق فكرة 32 غالبا ما يكون أسهل في الإطار المرجعي للإسفين عنه في إطار المختبر. لا تنسى أن الجسم الذي يعرف الإطار المرجعي يكون في سكون: لدينا معادلة واحدة أو أكثر يصفان اتزانه الستاتيكي.

س.25 تم صنع إسفين من مادة خفيفة جدا وزلقة. سطحه العلوي يتكون من ميلين يصنعان زاوية α مع الأفق ويميلان باتجاه بعضهما البعض. تم وضع الإسفين على سطح أفقي؛ كرة كتلها m تقع عند أدنى الفتحة في سطحه العلوي. كره أخرى كتلتها M وضعت أعلى من الكرة الأولى وتم إطلاق النظام. عند أي طرف ستنزلق الكرة الصغيرة ذات الكتلة m للأعلى على طوال الميل؟ يمكن إهمال الاحتكاك.



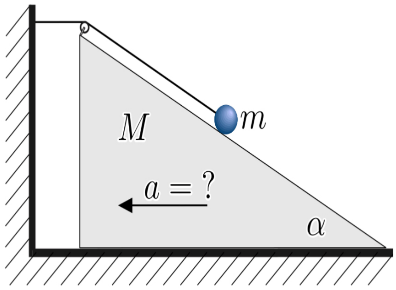
الطريقة الأخيرة مبنية على استخدام *الإحداثيات المعممة* وتنبع من الميكانيكا التحليلية. هناك، تُعْرف كـ *صيغة اللاجرانج* وتُعَرف عبر استخدام أدوات رياضية متقدمة نسبيا (التفاضل الجزئي، تحليل التغاير)، لكن لمعظم المسائل، نسختها المبسطة المذكورة أدناه تكفي. مناقشة مفصلة أكثر عن الصيغ اللاجرانجية موفرة في ملحق 6.

طريقة 6: لنسمي ξ إحداثيا معمما إذا كانت الحالة الكاملة للنظام يمكن وصفها بهذا الرقم الوحيد. لنقل أننا نحتاج أن نجد التسارع $\ddot{\xi}$ للإحداثي ξ. إذا كان بإمكاننا التعبير عن طاقة الوضع Π للنظام كدالة $\Pi(\xi)$ في ξ والطاقة الحركية في الشكل $K = \mathcal{M}\dot{\xi}^2/2$ حيث المعامل $\mathcal{M}$ هو توافق لكتل الأجسام (وربما عزم القصور الذاتي)، فإن

$$\ddot{\xi} = -\Pi'(\xi)/\mathcal{M}$$

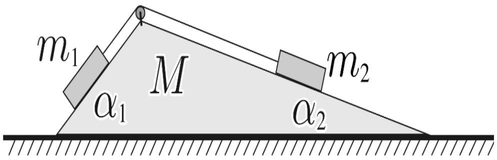
النقطة تمثل الاشتقاق بالنسبة للزمن والخط يمثل الاشتقاق بالنسبة للإحداثي ξ. بالفعل، بسبب حفظ الطاقة $\Pi(\xi) + \mathcal{M}\dot{\xi}^2/2 = Const$. عند اشتقاق هذا بالنسبة للزمن وباستخدام قاعدة السلسلة، سنحصل على $\Pi'(\xi)\dot{\xi} + \mathcal{M}\dot{\xi}\ddot{\xi} = 0$. سنصل للمعادلة السابق ذكرها بعد التقسيم على $\dot{\xi}$.

س.26 جسم صغير كتلته m يقع على إسفين بزاوية α وكتلة M. الجسم موصل بحبل مسحوب على بكرة مثبتة بأعلى الإسفين ومثبت بجدار رأسي (أنظر إلى الشكل). أوجد تسارع الإسفين. كل السطوح زلقة (لا يوجد احتكاك).



حل كامل لهذه المسألة معطى في قسم التلميحات لتوضيح طريقة 6.

س.27 إسفين كتلته M له زاويتان حادتان α_1 و α_2 ويقع على سطح أفقي. تم سحب خيط على بكره موضوعة على أعلى الإسفين، نهايتها الخيط ثبتتا بكتلتين m_1, m_2. ماذا سيكون تسارع الإسفين؟ لا يوجد احتكاك في أي مكان.



قد يبدوا أنه يوجد أكثر من درجة حرية واحدة في هذه المسألة: الإسفين يقدر أن يتحرك والخيط يستطيع أن يتحرك بالنسبة للإسفين. على كل حال، تم إنقاذنا بواسطة

فكرة 34: إذا كانت مركبات—x لمجموع القوى الخارجية وسرعة مركز الكتلة صفرا، فإن إحداثي—x لمركز الكتلة يظل ثابتا.

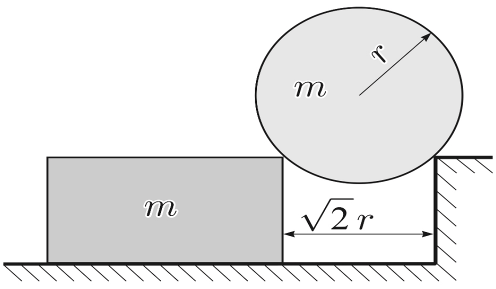
يمكننا استخدام هذا الظرف لاختزال العدد الفعال لدرجات الحرية. في حالتنا المحددة، النظام يتضمن مركبتين وبالتالي يمكننا التعبير عن إزاحة إحدى المركبتين بواسطة إزاحة الأخرى.

فكرة 35: الإحداثي—x لمركز الكتلة لنظام من الأجسام هو

$$X_C = \sum x_i m_i \Big/ \sum m_i$$

حيث m_i ترمز لكتلة المركبة الـi و x_i ترمز لإحداثي مركز كتلتها. المعادلة يمكن إعادة كتابتها بصيغة التكامل، $X_C = \int x\,dm / \int dm$، حيث $dm = \rho(x,y,z)dV$ هي تفاضل الكتلة.

س.28 سطحان أفقيان زلقان يكونان درجة. جسم له نفس ارتفاع الدرجة تم دفعه قرب الدرجة، واسطوانة نصف قطرها r وضعت على الفجوة. كل من الأسطوانة والجسم لهما كتلة m. أوجد القوة العمودية N بين الأسطوانة والدرجة عند اللحظة عندما تكون المسافة بين الجسم والدرجة



$\sqrt{2}r$. في البداية، الجسم والدرجة كانا قريبين جدا لبعضهما البعض وكل الأجسام كانت ساكنة. الاحتكاك صفر في كل مكان. هل ستنفصل الأسطوانة أولا عن الجسم أم عن الخطوة؟

من السهل حين حل هذه المسألة أن ننتهي بتعبيرات معقدة جدا، وقد يقود هذا إلى أخطاء. بالتالي من الحكمة أن نخطط للحل بحذر قبل أن نكتب أي معادلات.

فكرة 36: قوانين نيوتن تستخدم غالبا لإيجاد التسارع من القوة، لكن في الأحيان من الذكاء إيجاد القوة عن طريق التسارع.

لكن كيف نجد التسارعات في هذه الحالة؟ من الممكن إيجادها باستخدام طريقة 6، لكن هذا السبيل يقود إلى تعبيرات طويلة. هذا اقتراح تكتيكي: إذا رأيت أن الحل يصبح أصعب فأصعب تقنيا، توقف وفكر إذا كان هنالك طريق أسهل. يوجد هنالك "مصادفة" في هذا السؤال بالتحديد: الخطوط المستقيمة المرسومة من مركز الأسطوانة لنقاط التلامس معامدة؛ هل يمكن لهذا أن يساعدنا؟ بالفعل، هذا سيساعدنا.

فكرة 37: أعط انتباهك للحالات الخاصة واستخدم التبسيطات الناتجة منها!

لنقم بتذكر ما تعلمنا في علم الحركة:

فكرة K-34 في حالة الحركة على طوال منحنى، المركبة القطرية (المعامدة على المسار) لتسارع نقطة v^2/R تحدد بواسطة السرعة v ونصف قطر التكور R؛ المركبة على طول المنحنى هي التسارع الخطي (تساوي εR في حالة الحركة الدورانية، حيث ε هو التسارع الزاوي).

مركز كتلة الأسطوانة سيتحرك حركة دورانية، طريقة 6 ضرورية لإيجاد التسارع الدوراني — لكننا رجونا أن نستعيض عن استخدامها. تطوير فكرة 1 سيساعدنا:

فكرة 38: أسقط قانون نيوتن الثاني على المحور العمودي على متجه غير مرغوب به، على سبيل المثال، قوة غير معلومة أو المركبة المماسية للتسارع.

يمكننا بسهولة إيجاد سرعة الأسطوانة (وبالتالي، المركبة القطرية للتسارع) إذا استخدمنا

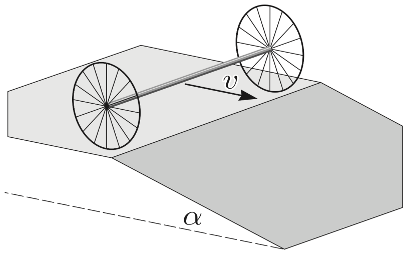
فكرة 39: إذا كانت الطاقة محفوظة (أو كان التغير فيها يمكن حسابه بواسطة الشغل)، اكتب هذا الظرف فورا. الطاقة محفوظة إذا لم يكن هنالك أية تبدد (احتكاك، تصادمات غير مرنة، إلخ) وكانت القوى الخارجية على النظام ساكنة (مثل السطح المائل)؛

القوى التي تتغير كدالة في الزمن (القوة المؤثرة على نقطة متحركة، سطح مائل متحرك) تغير الطاقة كذلك. فكرة 32 تساعد لكتابة قانون حفظ الطاقة (العلاقة بين سرعات الأجسام!). لإجابة السؤال الثاني، نحتاج

فكرة 40: القوة العمودية تتلاشى عند اللحظة التي ينفصل فيها الجسم عن السطح.

أيضا، راجع فكرة 32 لمركبات التسارعات الأفقية.

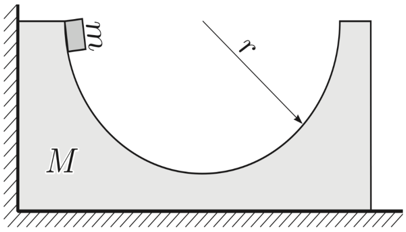
$\boxed{\text{س.}29}$ وصلنا عجلات خفيفة ذات نصف قطر r بمحور ثقيل. يتدحرج النظام على طول سطح أفقي الذي يصل فجأة إلى منحدر بزاوية α. لأي زوايا α ستتحرك العجلات بدون أن ترتفع، بمعنى أن تلمس السطح في كل الأوقات؟ من الممكن إهمال كتلة العجلات. المحور موازٍ للحد بين السطح الأفقي والمنحدر وله سرعة متجهة v.



فكرة 41: لإجابة السؤال ما إذا كان جسم سيرتفع، يجب أن نجد تلك النقطة على المسار التي لها أقل قوة عمودية.

إذا تلزم أن تكون القوة العمودية سالبة عند هذه النقطة، فإن الجسم سيرتفع؛ القيمة الحرجة هي صفر — قارنها مع فكرة 40. أيضا، راجع الأفكار 1، 39 و29-K.

$\boxed{\text{س.}30}$ عائق كتلته M يقع على سطح أفقي زلق ويلمس أيضا جدارا رأسيا. في أعلى سطح العائق، يوجد تجويف بشكل نصف أسطوانة قطره r. كُرَية صغيرة كتلتها m تم اطلاقها عند الحافة العلوية للتجويف، من الناحية الأقرب للجدار. ماهي السرعة القصوى للعائق أثناء حركته التالية؟ يمكن إهمال الاحتكاك.



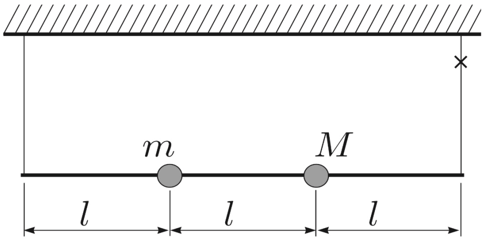
فكرة 42: قانون الحفظ قد يصمد فقط لفترة ما من الزمن.

فكرة 43: الزخم محفوظ إذا كان مجموع القوى الخارجية صفر؛ بعض الأحيان يكون الزخم محفوظا على محور واحد فقط.

ستحتاج فكرة 39 كذلك.

فكرة 44: السرعة تكون عظمى (أو دنيا) عندما يكون التسارع (ومحصلة القوى) صفرا (لأن $a = \frac{dv}{dt} = 0$)؛ الإزاحة قصوى عندما تكون السرعة المتجهة صفرا. أزواج أخرى ممكنة: الشحنة الكهربائية (جهد المكثف) — التيار، التيار — القوة الدافعة الكهربائية الحثية.

س.31 قضيب خفيف طوله $3l$ علق بالسقف بواسطة خيطين طولهما متساوٍ. كرتان كتلتهما m و M ثبتتا بالقضيب، المسافة بينهما وبعدهما عن نهايات القضيب كلها تساوي l. أوجد الشد في الخيط الثاني بعد أن قطع الأول فورا.



يوجد طرق عديدة جيدة لحل هذا السؤال، كلها تشترك في استخدام فكرة 36 والحاجة لإيجاد التسارع الزاوي للقضيب. أولا، التسارع الزاوي للقضيب يمكن إيجاده بواسطة طريقة 6 عبر اختيار زاوية الدوران φ لتكون الإحداثي المعمم. ثانيا، يمكننا أن نستخدم قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية: سنجد العزم على القضيب بالنسبة لنقطة التعليق مع الخيط الثاني وساوِه بـ $I\varepsilon$ حيث ε هو التسارع الزاوي وعزم القصور الذاتي $I = ml^2 + 4Ml^2$. بشكل عام،

فكرة 45: عندما يدور جسم حول المحور s، فإن محصلة العزم التي يتأثر بها هي $M = I\varepsilon$ (لا تخلطها بكتلة الجسم)، حيث I هي عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور s، $I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2\, dm = \int r^2 \rho dV$ حيث r_i هي المسافة بين الجسيم الـi والمحور s. (يحسب المجموع لكل جسيمات الجسم). الطاقة الحركية هي $K = \frac{1}{2} I\omega^2$.

ما إن نجد التسارع الزاوي، من أجل أن نطبق فكرة 36 قد يكون من المفيد استخدام

فكرة 46: الصيغة الأكثر عموما والتي لا يستغنى عنها لقانون نيوتن الثاني هي $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$، حيث $\vec{P}$ هو الزخم الكلي للنظام و $\vec{F}$ هو مجموع القوى الخارجية المؤثرة على النظام. معادلة مماثلة هي $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$، حيث $\vec{L}$ هو محصلة الزخم الزاوي للنظام (بالنسبة لنقطة معطاة) و $\vec{M}$ هو مجموع العزوم الخارجية.

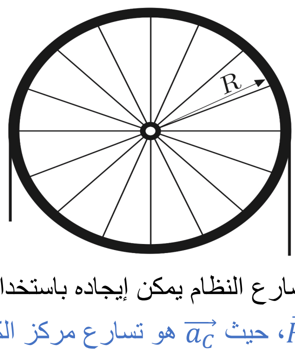
في حالتنا هذه، الطريقة الأخيرة مثمرة عندما نطبقها على كل من القوى والعزوم.

طريقة أخرى للحل هي اعتبار القضيب والكرتين كثلاثة أجسام منفصلة (متفاعلة). حينها تسارع الكرتين يمكن إيجاده عن طريق فكرة 32؛ يستطيع المرء كذلك أن يوظف

فكرة 47: محصلتا القوة والعزم المؤثرتان على الأجسام الخفيفة جدا (بالنسبة للأجسام الأخرى) تكون صفرا.

يتضح أنه إذا كان هذا غير صحيح، فإن أي قوة غير صفرية ستولد تسارعا لانهائيا لجسم عديم الكتلة.

س.32 خيط غير قابل للتمدد له كثافة طولية ρ وطول L رمي على بكرة بحيث أن طول أحد النهايات المتعلقة l. البكرة مكونة من طوق كتلته m ونصف قطره R مثبت بمحور أفقي بمسننات خفيفة. النظام الساكن في البداية ترك ليتحرك. أوجد القوة المؤثرة على المحور بعد أن بدأت الحركة. الاحتكاك بين البكرة والمحور مهمل.



لماذا لا نقوم بالتالي: لإيجاد القوة، سنستخدم فكرة 36؛ تسارع النظام يمكن إيجاده باستخدام طريقة 6. لتطبيق فكرة 36 جيدا، لنقم بتوظيف

فكرة 48: قانون نيوتن الثاني يمكن كتابته كـ $\vec{F} = M\vec{a_C}$، حيث $\vec{a_C}$ هو تسارع مركز الكتلة.

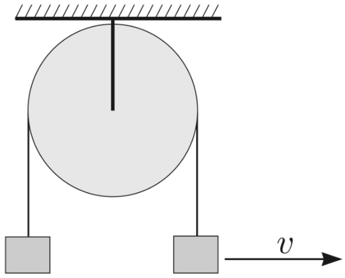
هذه الفكرة تستغل أفضل استغلال عندما يكون جزء من النظام عديم الحركة وفقط كتلة صغيرة نسبيا تتحرك (بالضبط كما في هذه الحالة: الفرق الوحيد بعد فترة زمنية صغيرة هو أن جزءا صغيرا من الحبل "سيُفْقَد" في جهة و"يكسب" في الجهة الأخرى). من الواضح أن فكرة 34 ستكون مفيدة هنا، وفكرة 11 ستحفظ لك بعضا من الجهد. خذ في عين الاعتبار أنه في هذه الحالة نحن لسنا مهتمين بإحداثي مركز الكتلة، بل فقط في تغير إحداثيه كدالة في الزمن؛ بالتالي ففي التعبير عن هذا الإحداثي يمكننا حذف الحدود المستقلة عن الزمن: لأن تفاضلهم بالنسبة للزمن سيتلاشى. الجزء المعتمد على الزمن من إحداثي مركز الكتلة يجب التعبير عنه بنفس الإحداثي الذي سنستخدمه مع طريقة 6 (بما أن طريقة 6 ستنتج مشتقته

الثانية بالنسبة الزمن). نصيحة تكنيكية صغيرة قد تساعد: المتجه يحدد بواسطة (أ) مقداره واتجاهه؛ (ب) إسقاطاته على محاور إحداثية في نظام إحداثيات معطى؛

فكرة 49: بعض الأحيان يكون من الأسهل حساب مركبات متجه، حتى إذا كنا مهتمين بمقداره فقط.

فوق كل شيء، هذا ينطبق عندما يكون كل من مقدار المتجه واتجاهه غير معلومين وغير واضحين. في هذه الحالة، يتوجب علينا إيجاد $\overrightarrow{F_x}$ و $\overrightarrow{F_y}$ في نظام إحداثيات مناسب.

س.33 رمي خيط على بكرة. عند كلا نهايتيه يوجد جسمان بنفس الكتلة. في البداية كان الجسمان على الارتفاع نفسه. أحدهما تم إعطاءه لحظيا سرعة أفقية صغيرة v. أي من الجسمين سيصل أعلى خلال الحركة الناتجة؟ كتلة البكرة مهملة.



هذه المسألة معقدة بالفعل، لأن المفتاح لحلها نادر الاستخدام ومتخصص جدا

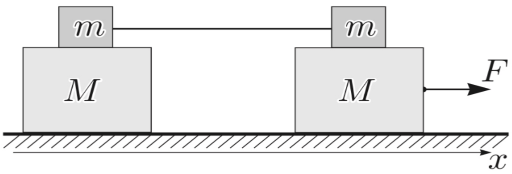
فكرة 50: إذا لم يقدر مركز الكتلة على الحركة، فإن محصلة القوى المؤثرة عليه هي صفر.

هنا مركز الكتلة يستطيع أن يتحرك قليلا، لكن على المدى الطويل (بأخذ متوسط لدورة واحدة لحركة الجسم المركول الشبيهة بالبندول—انظر إلى فكرة 24) يعتبر عديم الحركة: الجسمان لهما نفس الكتلة فإذا ارتفع أحدهما، فإن الآخر سينزل بنفس المقدار مما يلغي التأثير على المركبة الرأسية لموقع مركز الكتلة. هذا أيضا صحيح للمركبة الأفقية، لكن من الكافي اعتبار المركبة الرأسية لحل هذا السؤال. لنقم كذلك بجلب شيء واضح

حقيقة 24: الشد في خيط عديم الكتلة المرمي على بكرة عديمة الكتلة أو المسحوب على طول سطح عديم الاحتكاك يظل نفسه في أي مكان.

إذن فلوغاريتمية الحل ستكون كالتالي: سنكتب قانون نيوتن الثاني لـ (أ) النظام المكون من الجسمين و(ب) جسم واحد؛ سنقوم بأخذ متوسط كل من المعادلتين وسنستخدم المساواة الظاهرة من (أ) لإيجاد متوسط الشد في الخيط، الذي سنقوم بتعويضه في معادلة (ب). على أساس فكرة 24، سنقوم بتجزئة الشد في الخيط إلى المتوسط ومركبة التردد العالي وسنستخدم فكرة 20.

س.34 نظام من أجسام يقع على سطح أملس، كما هو موضح في الشكل. معامل الاحتكاك بين الأجسام μ ، بينما الذي بين الأجسام والسطح هو $\mu = 0$. الجسم الأيمن السفلي يتم سحبه بقوة F. أوجد تسارعات كل الأجسام.



فكرة 51: عندما تتصل أجسام بقوى احتكاك، فإنه من أجل أن نجاوب بعض المسائل بشكل كامل سيتوجب علينا اعتبار كل الحالات الممكنة لوجود انزلاق نسبي بين كل السطوح المتلامسة.

على سبيل المثال، إذا كنا سنفترض أنه لا يوجد انزلاق بين سطحين متلامسين، فإنه يمكننا معاملتهما كجسم واحد. حينها ستوجب عليك إيجاد قوة الاحتكاك F_h بين الجسمين وتحديد متى يصمد الافتراض، أي متى تكون F_h أقل من قوة الاحتكاك السكوني العظمى μN.

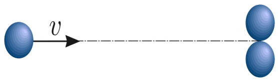
س.35 كرة بلياردو تصطدم بأخرى ساكنة. عند أي مجموعة من النقاط يمكن وضع الكرة الساكنة عندها بحيث أنه يمكن أنه نصل لحالة حيث تدخل كلا الكرتان في حفر مختلفة في الطاولة؟ التصادمات مرنة تماما، الكرتان زلقتان تماما (بالتالي فإن دوران الكرتين مهمل).

فكرة 52: إذا اصطدمت كرة تامة المرونة بكرة مماثلة أخرى عديمة الحركة وكان الدوران (الدحرجة) للكرتين يمكن إهماله، فبعد التصادم سيكون هنالك زاوية قائمة بين متجهات السرعة للكرتين.

لإثبات هذا لاحظ أن متجهات السرعة الثلاثة (السرعة قبل والسرعتان بعد التصادم) تكون مثلثا بسبب قانون حفظ الزخم. حفظ الطاقة يعني أن أضلاع المثلث تحقق نظرية فيثاغورس. حالة خاصة لهذه النتيجة (أنظر إلى المسألة بعد القادمة)

حقيقة 25: عندما تصطدم كرة مرنة تصادما مركزيا مع كرة مماثلة ساكنة، فإن الأولى تتوقف والثانية تحصل على سرعة الكرة الأولى.

$\boxed{\text{س.36}}$ كرة بليياردو زلقة وتامة المرونة تتحرك بسرعة v باتجاه كرتين مماثلتين ساكنتين. الكرتان الساكنتان تتلامسان ومركزا كتلتيهما يقعان على الخط المعامد لمتجه السرعة الكرة القادمة. الكرة المتحركة موجهة بالتمام إلى نقطة التلامس بين الكرتين. أي سرعة ستكون لدى الكرة القادمة بعد التصادم؟ اعتبر سيناريوين: (أ) الكرة القادمة تصطدم بالضبط بالمنتصف بين الكرتين؛ (ب) مسار الكرة القادمة منحرف بعض الشيء فتصطدم بأحد الكرتين الساكنتين أولا هامشيا.



لإجابة السؤال الأول، من الضروري استخدام

فكرة 53: التصادمات (وبقية التفاعلات عديدة الأجسام، مثل حركة الكرات المتصلة بواسطة خيوط أو زنبركات) من الأسهل التعامل معها في نظام مركز الكتلة، لأنه في هذا النظام يكون من السهل كتابة قانون حفظ الزخم (محصلة الزخم صفر).

أيضا، لا تنسى فكرة 39! للسؤال الثاني، لنقم باستخدام

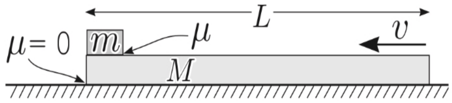
فكرة 54: إذا كانت القوة المؤثرة على جسم أثناء مدة معلومة لم يتغير اتجاهها، فإن الزخم المنقول له نفس اتجاه القوة.

$\boxed{\text{س.37}}$ n كرية تامة المرونة تتزحلق على طول سلك عديم الاحتكاك. ما هو أكبر عدد ممكن من التصادمات؟ حجم الكريات مهمل، وكذلك احتمالية أن أكثر من كريتين ستصطدمان بنفس الوقت.

فكرة 55: تمثيل العملية بصريا، مثل استخدام رسم بياني، يميل ليكون مساعدة عظيمة.

هذا سؤال مساعد: ماذا سيبدو تصادم مرن بين كرتين في رسم بياني $x-t$؟

$\boxed{\text{س.38}}$ لوح خشبي طوله L وكتلته M يقع على سطح أفقي ناعم؛ تقع كتلة صغيرة m عند أحد نهايتيه. معامل الاحتكاك بين الكتلة واللوح الخشبي هو μ. ماهي السرعة الدنيا التي يجب إعطاءها للوح بدفعة سريعة بحيث أنه خلال الحركة الناتجة ستنزلق الكتلة على طول اللوح وتقع منه؟ حجم الكتلة مهمل.

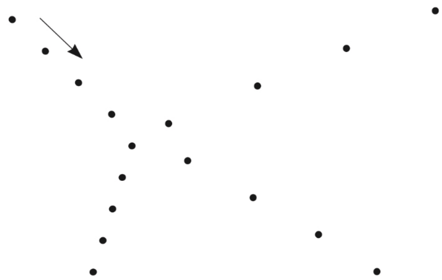


هذه المسألة لها حلان متكافئان. أولا، يمكننا حلها باستخدام فكرة 7. ثانيا، يمكننا استخدام الفكرتين 39 و53، وتوظيف

فكرة 56: إذا انزلق جسم على طول سطح ما، فإن الطاقة التي تتحول إلى حرارة تساوي ناتج ضرب قوة الاحتكاك وطول مسار الانزلاق.

بالفعل، قوة الاحتكاك لها مقدار ثابت، وكما ترى من الإطار المرجعي للدعامة، لها دائما اتجاه مواز للإزاحة.

$\boxed{\text{س.39}}$ الرسم المعطى تم انتاجه بواسطة تصوير استروبوسكوبي ويبين تصادم كرتين لهما نفس القطر لكن كتلتيهما مختلفتان. السهم يبين اتجاه حركة أحد الكرتين قبل التصادم. أوجد النسبة بين الكتلتين وأظهر ماذا كان اتجاه حركة الكرة الأخرى قبل التصادم.



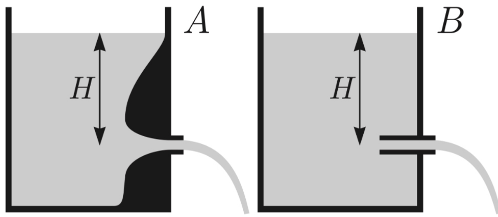
فكرة 57: من المفيد بعض الأحيان معاملة الزخوم كمتجهات، التعامل مع جمعهم وطرحهم باستخدام قاعدة المثلث أو قاعدة متوازي الأضلاع (هذا صحيح أيضا للكميات المتجهة الأخرى: الإزاحات، السرعات المتجهة، التسارعات، القوى، إلخ)

لنكون أكثر تخصيصا: عندما يتفاعل جسمان، متجه الدفع سيساوي الطرح المتجهي لزخميهما. أنظر إلى فكرة 5.

حقيقة 26: في التصوير الاستروبوسكوبي، المتجه من موقع الجسم إلى الموقع التالي يتناسب مع سرعته المتجهة.

حقيقة 27: (قانون نيوتن الثالث) إذا تفاعل جسمان معا، فإن التغيرات في زخمي الجسمين متساوية ومتعاكسة في الاتجاه.

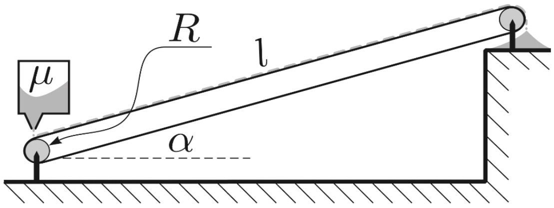
$\boxed{\text{س.40}}$ يوجد برميلان (A و B) صنبورهما لهما تصميم مختلف، انظر إلى الشكل. فتح الصنبوران، ارتفاع سطح الماء عن الصنبورين هو H. ماهي السرعة التي يخرج بها تيار الماء من البرميلين؟



فكرة 58: إذا بدا أنه من الممكن حل مسألة باستخدام كل من حفظ الزخم وحفظ الطاقة، فإن واحد من هذين غير محفوظ في الواقع!

لا يمكن أن تكون، على غرار هذا: الأجوبة ستكون مختلفة. حين تصميم صنبور A، كان هنالك محاولة واضحة لإبقاء طبقية الانسياب: الطاقة محفوظة. على كل حال، إذا استخدمنا طريقة 3، كنا سنقوم بكتابة الزخم المعطى للتيار بواسطة ضغط الجو خلال مدة زمنية ضئيلة $pSdt$—dt (حيث S هي مساحة المقطع العرضي للصنبور)، كنا سنرى حينها، أنه بفضل انسياب المياه، $p \neq \rho gH$ (بسبب الضغط الديناميكي، قانون بيرنولي!). من الجهة الأخرى، للصنبور B، الانسياب الطبقي غير محفوظ؛ سيكون هنالك دوامات وفقد للطاقة. على الرغم من هذا، يمكننا التعامل مع الزخم: سنكتب تعبيرا للضغط المطبق على السائل بواسطة جدران البرميل (عموما الضغط المطبق بواسطة الجانب الأيسر والأيمن للجدران سيلغيان بعضهما البعض، لكن سيظل هنالك جزء غير ملغي $p = \rho gH$ مطبقة ليسار المقطع العرضي للصنبور S).

$\boxed{\text{س }41.}$ يتم نقل الرمل لجهة البناء باستخدام حزام متحرك. طول الحزام هو l، زاويته مع الأفق α؛ يتم تحريك الحزام بواسطة البكرة السفلية التي نصف قطرها R، وهي مشغلة من الخارج. يتم وضع الرمل على الحزام بمعدل ثابت μ $\left(\frac{kg}{s}\right)$. ما هو أدنى عزم مطلوب لنقل الرمل؟ ماهي سرعة الحزام عند هذا العزم؟ معامل الاحتكاك كبير كفاية لتتوقف حبيبات الرمل من التحرك مباشرة بعد اصطدامها بالحزام؛ اعتبر السرعة الابتدائية لحبيبات الرمل صفرا.



حقيقة 28: لجعل أي شيء يتحرك — أجسام أو انسياب (مثل الرمل) — يجب تطبيق قوة.

لهذه المسألة، فكرة 58 وطريقة 3 ستساعدنا بالإضافة إلى

فكرة 59: (شرط الاستمرارية) لانسياب مستقر، تدفق المادة (كمية الشيء الذي يخترق المقطع العرضي للسريان لوحدة الزمن) ثابت ومستقل عن المقطع العرضي: $\sigma v = Const$ [$\sigma(x)$ هو كثافة المادة لوحدة المسافة و$v(x)$— سرعة الانسياب].

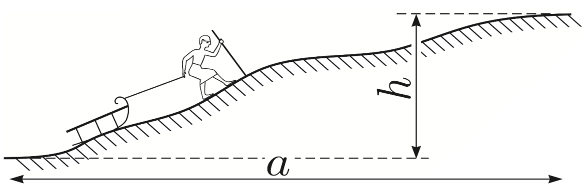
لانسياب سائل غير منضغط (كثافته ثابتة) في أنبوب، الكثافة ستكون $\sigma = \rho S$ وبالتالي $vS = Const$. لمنطقة من الفضاء حيث يتم تفريغ التدفق –– بالوعة — الكتلة تزداد: $\frac{dm}{dt} = \sigma v$ — هذه المعادلة يمكن تسميتها شرط الاستمرارية أيضا.

$\boxed{\text{س }42.}$ كرة صلصال مرنة تسقط على الأرضية من ارتفاع h وتبدأ بالانزلاق. ماهي سرعة الكرة عند بداية الانزلاق إذا كان معامل الاحتكاك بين الأرضية والكرة هي μ؟ السرعة الأفقية الابتدائية للكرة كانت u.

فكرة 60: إذا حصل انزلاق على طوال فترة التصادم مع جدار صلب، فإن النسبة بين الدفع المنتقل موازيا وعموديا للجدار هي μ.

بالفعل، $\Delta p_\perp = \int N(t)dt$ (مكاملة على كل مدة التأثير) و $\Delta p_\parallel = \int \mu N(t)dt = \mu \int N(t)dt$.

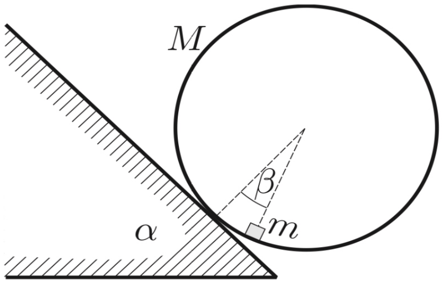
$\boxed{\text{س }43.}$ يقوم صبي بسحب مزلجة بواسطة حبل خلفه بينما يصعد تلة ببطء. ما هو الشغل الذي يفعله الصبي لينقل المزلجة إلى قمة التل إذا كان ارتفاعه h والمسافة الأفقية من أسفل التل إلى قمته a؟ افترض أن الحبل دائما موازي لميل التل، وأن معامل الاحتكاك بين المزلجة والثلج μ.



حقيقة 29: إذا كان الشكل الدقيق لسطح محدد أو لاعتماد على الزمن غير معطى، سيتوجب عليك التعامل مع الحالة العامة: أثبت أن الافتراض صحيح لأي شكل اعتباطي.

بوضوح، لتطبيق فكرة 29، ستحتاج إلى فكرة 3.

$\boxed{\text{س.44}}$ أسطوانة فارغة كتلتها M تتدحرج بدون انزلاق على طول سطح مائل زاوية ميلانه $\alpha = 45^{o}$. على سطحها الداخلي تستطيع كتلة صغيرة $m = M/2$ أن تتزحلق بحرية. ماهي الزاوية β بين العمودي على السطح المائل والخط المستقيم الواصل بين مركز الأسطوانة والكتلة؟
من الواضح أن أسهل حل يعتمد على فكرة 6، لكن من أجل أن نحسب الطاقة الحركية لأسطوانة متدحرجة،



فكرة 61: $K = K_C + M_\Sigma v_C^2/2$، حيث K_C هي الطاقة الحركية كما ترى في إطار مركز الكتلة و M_Σ— هو مجموع كتل النظام. بشكل مشابه $\vec{P} = M_\Sigma \vec{v}_C$ (لأن $\vec{P}_C \equiv 0$) والزخم الزاوي $\vec{L} = \overrightarrow{L_C} + \vec{r}_C \times \vec{P}$. نظرية المحاور المتوازية (ستينر) تصمد: $I = I_0 + M_\Sigma a^2$، حيث I هي عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور s و I_o هي عزم القصور الذاتي لمحور خلال مركز الكتلة (موازٍ لـs) بينما a هي المسافة بين المحورين.

سنقوم بحساب الزخم الزاوي في المسألة القادمة، لذا فلنقم بتوضيح الأمور قليلا.

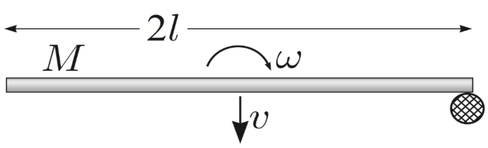
فكرة 62: الزخم الزاوي تجميعي. تقسيم النظام إلى كتل نقطية، $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$، بحيث أنه للكتلة النقطية الـi، $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ (بشكل عام) أو $L_i = h_i p_i = r_i p_{ti}$ (لحركة في سطح)، $h_i = r_i sin\alpha_i$ هي ذراع القوة و $p_{ti} = p_i sin\alpha_i$ هي المركبة المماسية للزخم. الطاقة الحركية، الزخم، إلخ تجميعيون كذلك.

إذا كان الزخم الزاوي متجها في فضاء ثلاثي الأبعاد، وكانت الحركة في سطح ما فإن هذا المتجه عمودي على هذا السطح وبالتالي هو بشكل فعال كمية قياسية (وبالتالي يمكننا ترك الضرب الاتجاهي). من المفيد غالبا جمع الفكرتين 61 و62: نحن لا نقوم بتقسيم الجسم إلى جسيمات، بل إلى أجسام صلدة ($L = \sum L_i$)، سنقوم بحساب عزم القصور الذاتي I_i لكل جسم طبقا لفكرة 61: عزم القصور الذاتي لمركز الكتلة زائدا عزم القصور الذاتي كما يقاس في إطار مركز الكتلة.

فكرة 63: هنا عزوم القصور الذاتي لبعض الأجسام، بالنسبة لمركز الكتلة. قضيب طوله l: $\frac{1}{12}Ml^2$، كرة صلبة: $\frac{2}{5}MR^2$، قشرة كروية: $\frac{2}{3}MR^2$، أسطوانة: $\frac{1}{2}MR^2$، مربع بطول ضلع a ومحور معامد على سطحه: $\frac{1}{6}Ma^2$.

إذا كان محور الدوران لا يخترق مركز الكتلة، حينها فيمكننا (أ) إيجاد عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور باستخدام نظرية المحاور المتوازية؛ (ب) تطبيق فكرة 61 لحساب الطاقة الحركية أو العزم الزاوي (وحينها يكفي فسحب معرفة عزم القصور الذاتي بالنسبة لمركز الكتلة).

$\boxed{\text{س.45}}$ قضيب كتلته M وطوله $2l$ ينزلق على الجليد. السرعة المتجهة لمركز كتلة القضيب هي v، السرعة الدورانية المتجهة له هي ω. لحظة ما كانت السرعة المتجهة لمركز الكتلة عمودية على القضيب نفسه، ضرب القضيب عمودا مثبتا بنهايته. ما هي السرعة المتجهة لمركز الكتلة بعد التصادم لو كان أ) التصادم غير مرن بتاتا (النهاية التي ضربت العمود توقفت عن الحركة)؛ ب) التصادم مرن بشكل تام.



في حالة التصادم تام المرونة سنحصل على معادلة من حفظ الطاقة؛ إذا كان التصادم غير مرن، فإن ظرف آخر سيظهر: وهي كون نهاية القضيب عديم الحركة. مع هذا، لدينا متغيران. المعادلة الأخرى تأتي من

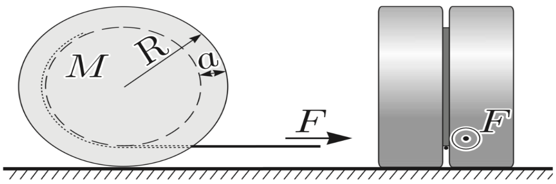
فكرة 64: إذا تصادم جسم مع شيء، فإن زخمه الزاوي محفوظ بالنسبة لنقطة التأثير.

نعم، أثناء التصادم حركة الجسم تتأثر بواسطة القوى العمودية والاحتكاك، لكن كلاهما يطبقان خلال نقطة التأثير: ذراع قوتيهما صفر. إذا تحرك جسم في مجال جاذبية أو ما شابه، فربما على المدى البعيد سيبدأ الزخم الزاوي بالتغير بالنسبة لنقطة التأثير، لكن فورا بعد وقبل التصادم يظل نفسه (الجاذبية ليست قوية كفاية مقارنة بالقوى العمودية التي هي قوية لكنها ضئيلة العمر؛ حتى إذا كان ذراع قوة الجاذبية غير صفري، فلا يمكنها تغيير الزخم الزاوي في لحظة).

$\boxed{\text{س.46}}$ إذا ضرب شخص ما شيئا صلدا — مثل عمود إنارة — بواسطة مضرب، فإن اليد الحاملة للمضرب قد تتأذى طالما أن التصادم يفوت ما يسمى بمركز الإيقاع للمضرب (ويضرب إما أعلى أو أسفل هذا المركز). حدد موقع مركز الإيقاع لمضرب منتظم الكثافة. تستطيع أن تفترض أنه أثناء التصادم كان المضرب يدور حول اليد الحاملة.

طريقة 7: حول مسألة واقعية إلى لغة الفيزياء والرياضيات — بمعنى آخر، اصنع نموذجا.
مصاغة بهذا الشكل، قد تبدو هذه الطريقة عديمة الهدف. على كل حال، تحويل وتأويل سيناريوهات الحياة الحقيقة—أي نمذجة المسألة—هو أحد أهم جوانب الفيزياء تحديا وتشويقا. هو مشوق لأنه يوفر حرية إبداعية أكثر من حل نموذج موجود بأفكار معروفة. مع ذلك، هذه الحرية لها حدود: النموذج يجب أن يصف الواقع بأفضل ما يمكن، التقريبات يجب أن تكون منطقية ومن المفضل أن يكون النموذج قابلا للحل سواء عقليا أو بواسطة حاسب. لمسألة معطاة، لا توجد حرية كثيرة متبقية والعمل تم تبسيطه: يوجد هنالك تلميحات لما قد سيكون افتراضا جيدا. لنبدأ بالترجمة:" قضيب صلد طوله l كثافته منتظمة يدور حول أحد نهايتيه بسرعة زاوية ω، محور الدوران معامد على القضيب. على بعد x من المحور يوجد عمود عديم الحركة موازي لمحور الدوران. يصطدم القضيب بالعمود." الآن نواجه العقبة الأولى: هل التصادم مرن أم غير مرن؟ لم يتم ذكر هذا في نص السؤال. لنتركه للآن: ربما يمكننا الوصول للحل بدون افتراض هذا الشيء (يظهر أن هذه هي الحالة). الآن نواجه السؤال المركزي: ماذا يعني أن اليد لا "تتأذى"؟ نحن نعلم أننا سنتأذى عندما يضرب شيء ما يدنا—إذا كان هذا الشيء سيتلقى دفعا من يدنا أثناء فترة الاصطدام الصغيرة، مما سيؤدي إلى إحداث قوة كبيرة. اليد مستقرة، لذا فإن نهاية المضرب يجب أن تتوقف بدون تلقي أي دفع من اليد. بهذا تأولينا قد اكتمل: " تبعا للاصطدام، سينعكس الدوران، $0 \geq \omega' \geq -\omega$؛ وأثناء الاصطدام محور الدوران لا يؤثر بدفع على المضرب. أوجد x." الجملة قبل الأخيرة تلمح لاستخدام فكرة 64.

$\boxed{\text{س.47}}$ أسطوانة ثقيلة كتلتها M ونصف قطرها R تستلقي على الأرضية. أخدود ضيق بعمق a تم حفره على طول محيط الأسطوانة. لُف خيط حول الأخدود وتم سحبه بنهايته الحرة، بشكل أفقي بقوة F. تم وضع الأسطوانة بحيث أن الخيط ينفك من أسفل الأسطوانة. بأي تسارع ستبدأ الأسطوانة الحركة به؟ الاحتكاك بين الأرضية والأسطوانة قوي كفاية حتى لا يحصل أي انزلاق.



هنالك طرق كثيرة لحل هذه المسألة، لكن لنقم باستخدام الفكرة الآتية.

فكرة 65: العلاقة $I\varepsilon = M$ صالحة وبوضوح فحسب إذا كان مركز الدوران عديم الحركة؛ على كل حال، ظهر أنها تكون أيضا صالحة عندما يكون محور الدوران اللحظي يتحرك انتقاليا بحيث أن المسافة بين المحور ومركز الكتلة لا تتغير (مثل عند دحرجة جسم أسطواني أو كروي).

حتى نثبت هذه الفكرة، تذكر فكرة 6: الطاقة الحركية تظهر عندما يتم عمل شغل، $K = \frac{1}{2}I\omega^2 = M\varphi$ (φ هي زاوية دوران الجسم، $\omega = d\varphi/dt$). إذا كان عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور الدوران اللحظي I لا يعتمد على الزمن، فإن

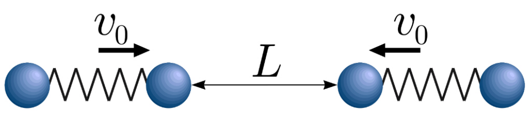
$$\frac{dK}{dt} = \frac{\frac{1}{2}Id\omega^2}{dt} = I\omega\varepsilon = \frac{dM\varphi}{dt} = M\omega.$$

$\boxed{\text{س.48}}$ تتدحرج كرة على طول سطح أفقي في المنطقة $x < 0$ بسرعة متجهة $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$. في المنطقة $x > 0$ يوجد حزام ناقل يتحرك بسرعة متجهة $\vec{u} = (0, u)$ (موازيا لحافته $x = 0$). أوجد السرعة المتجهة للكرة $\vec{v} = (v_x, v_y)$ بالنسبة للحزام بعد أن تتدحرج على الحزام. سطح الحزام الناقل خشن (الكرة لا تنزلق) ويقع على نفس مستوى السطح.

فكرة 66: للأجسام الأسطوانية أو الكروية التي تتدحرج أو تنزلق على سطح أفقي، فإن الزخم الزاوي محفوظ بالنسبة لأي محور اعتباطي يقع في مستوى السطح.

نعم، النقاط التي تؤثر عليها القوة العمودية والجاذبية تقع على نفس الخط الذي تقع عليه القوى نفسها ومحصلتهم صفر، بمعنى أن عزمهم الصافي صفر كذلك؛ قوة الاحتكاك تقع في مستوى السطح، ولهذا فذراع قوتها بالنسبة لمحور في نفس المستوى صفر.

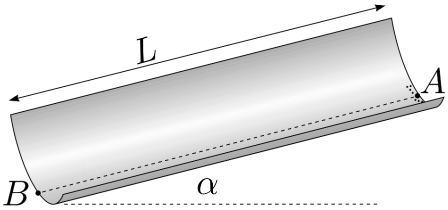
$\boxed{\text{س.49}}$ "دمبل زنبركي" يتكون من كرتين كتلتهما m وموصلتان بزنبرك جسوءه k. اثنان منهم ينزلقان باتجاه بعضهما البعض، سرعة كل منهما v_o. في نقطة ما كانت المسافة بينهما L (أنظر إلى الشكل). بعد أي زمن ستكون المسافة بينهما L مرة أخرى؟ التصادمات مرنة بشكل تام.



فكرة 67: إذا تفاعل نظام متضمن لأجسام مرنة، موصلة بواسطة زنبركات، خيوط، إلخ مع أجسام أخرى، فحينها تكون مدة التصادم للأجسام المرنة أقل بكثير من الزمن المميز للعمليات الأخرى. يمكن إذن تقسيم العملية كاملة إلى مراحل أبسط: أولا تصادم يكاد يكون لحظيا لأجسام مرنة (هذه يمكن اعتبارها مرحلة حرة حيث أن الزنبرك يبذل قوة غير معتبرة مقارنة بالقوة المبذولة في تصادم مروني) وما يأتي بعده (أو قبله، أو أثناء التصادمات) من عمليات بطيئة: مثل تذبذب الزنبرك، إلخ.

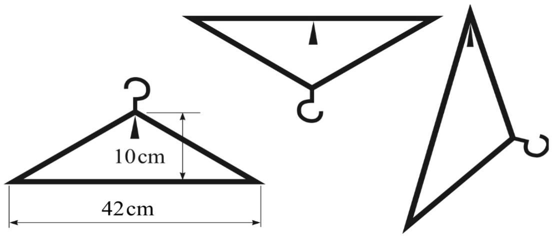
ملاحظ: هذه فكرة عامة، تجزيئ العملية إلى خطوات أبسط يمكن أن يكون نافعا إذا كان لدينا عمليات خاطفة (بالكاد لحظية) تحصل في النظام الديناميكي؛ أنظر على سبيل المثال إلى المسألة القادمة (تذكر كذلك فكرة 53).

$\boxed{\text{س.50}}$ حبيبات رمل صغيرة تنزلق بدون احتكاك على طول حوض أسطواني نصف قطره R (أنظر إلى الشكل). زاوية ميلان الحوض هي α. كل الحبيبات لها سرعة ابتدائية صفرية وتبدأ بقرب النقطة A (ولكن ليس بالضرورة عند نقطة A نفسها). ماذا يتوجب على طول الحوض أن يكون بحيث أن كل الحبيبات ستخرج منه عند النقطة B (أي بالضبط عند مؤخرة الحوض)؟



فكرة 68: إذا كانت حركة مجموعة منتشرة من الجسيمات يمكن تقسيمها إلى اهتزاز في اتجاه معروف وحركة لا اهتزازية (أي حركة عمودية على الاهتزاز)، فإن الجسيمات ستكون مركزة عند بعض النقاط: حينما يكون طور الاهتزاز لكل الجسيمات صفرا أو من مضاعفات 2π.

$\boxed{\text{س.51}}$ معلاق مصنوع من سلك ذو توزع كتلي غير منتظم يتذبذب بسعة صغيرة في مستوى الشكل. في الحالتين الأولى كان الضلع الأطول أفقيا. في كل الحالات الثلاثة الزمن الدوري متساوي. أوجد موقع مركز الكتلة والزمن الدوري.



معلومة: يُعرف الجسم الصلد ذو الحجم المنتهي الذي يتذبذب حول محور مثبت بالبندول الفيزيائي. من السهل اشتقاق تردده لتذبذبات صغيرة بواسطة العلاقة $I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$، حيث I هو عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور التذبذب و l هو بعد مركز الكتلة عن هذا المحور: $\omega^{-2} = \frac{I}{mgl} = \frac{I_o}{mgl} + l/g$ (وظفنا هنا نظرية المحاور المتوازية، أنظر إلى فكرة 61). *الطول المختزل* للبندول الفيزيائي هو المسافة $\tilde{l} = l + I_o/ml$ بحيث أن تردد تذبذب بندول رياضي بهذا الطول هو نفسه كتردد البندول الفيزيائي.

فكرة 69: إذا رسمنا خطا مستقيما طوله $\tilde{l}$ بحيث أنه يمر بمركز الكتلة وأحد نهايتيه تقف على مركز الدوران، فإننا لو حركنا محور الدوران إلى النهاية الأخرى للخط (وجعلنا الجسم يصل إلى اتزان مستقر)، فإن التردد الجديد سيكون مثل القديم. الاستنتاج: مجموعة النقاط التي يمكن وضع مركز الدوران عليها بدون تغيير تردد التذبذب تتضمن دائرتين متحدتي المركز حول مركز الكتلة.

الإثبات: المعادلة أعلاه يمكن إعادة كتابتها كمعادلة تربيعية لإيجاد الطول l المرتبط للتردد المعطى ω (أي للطول المختزل $\tilde{l} = g/\omega^2$): $l^2 - l\tilde{l} + I_o/m = 0$. طبقا لعلاقات فيتا، الحلان l_1 و l_2 يحققان $l_1 + l_2 = l$، فإذن l_1 و $l_2 = \tilde{l} - l_1$ سينتجان نفس تردد الذبذبة.

$\boxed{\text{س.52}}$ كرة معدنية نصف قطرها $2mm$ وكثافتها $\rho = 3000\text{kg}/m^3$ تتحرك في الماء سقوطا حرا بتسارع $a_o = 0.57g$. كثافة الماء هي $1000kg/m^3$. بأي تسارع سترتفع به فقاعة كروية نصف قطرها $1m$ في الماء؟ افترض أن التدفق طبقي في كلا الحالتين؛ أهمل الاحتكاك.

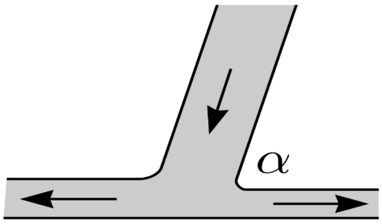
فكرة 70: إذا تحرك جسم في مائع، فإن المائع سيتحرك أيضا. (أ) إذا كان التدفق طبقيا (لا دوامات)، ففقط المائع القريب للجسم سيتحرك؛ (ب) إذا كان التدفق مضطربا، فسيتكون ذيل مضطرب وراء الجسم. في كلا الحالتين السرعة المميزة للمائع المتحرك هي نفس سرعة الجسم.

باستخدام طريقة 6 سنجد أنه في حالة (أ) الطاقة الحركية للنظام $K = \frac{1}{2}v^2(m + \alpha\rho_o V)$، حيث الثابت α هو رقم يميز هندسة الجسم الذي يعبر عن مدى منطقة المائع الذي سيتحرك (مقارنة بحجم الجسم نفسه). حصلنا على هذا التعبير بملاحظة أن السرعة المميزة للسائل بقرب الجسم هي v، وأن الحجم المميز للمنطقة التي يتحرك فيها السائل قُرّب ليكون حجم الجسم نفسه. إذا بذلت قوة F على جسم ما، فإن القدرة الناتجة عن هذه القوة هي $P = Fv = \frac{dK}{dt} = va(m + \alpha\rho_o V)$. بالتالي $F = a(m + \alpha\rho_o V)$: الكتلة الفعالة للجسم ازدادت بمقدار $\alpha\rho_o V$. في المسألة أعلاه، الثابت α للجسم الكروي يمكن إيجاده بواسطة الظروف المعطاة في النصف الأول من المسألة.

في حالة (ب)، إذا افترضنا أن سرعة الجسم ثابتة، سنجد أن $K = \frac{1}{2}v^2\rho_o(\alpha Svt)$، حيث S هي مساحة المقطع العرضي للجسم و αS هي مساحة المعرض العرضي للذيل المضطرب. هذه الـ α مجددا تصف الجسم. من هنا، من السهل إيجاد أن

$F = \frac{\alpha}{2}v^2\rho_oS$ الذي سيعطي، $Fv = \frac{dK}{dt} = \frac{\alpha}{2}v^3\rho_oS$.

س.53 تيار من الماء يسقط على قناة سفلية بسرعة v وينقسم إلى تيارين صغيرين ذاهبين إلى اليمين واليسار. أوجد سرعات كل من التيارين إذا كان التيار القادم مائل بزاوية α عن القناة (والتيارين المتكونين). ماهي النسبة بين كميتي الماء المنقولتين في وحدة الزمن مع التيارين الخارجين؟



هذه مسألة صعبة. لنقم أولا بطرح بعض من الأفكار والحقائق.

فكرة 71: لانسياب سائل، قانون بيرنولي (أي حفظ الطاقة) غالبا ما يكون مساعدا: $p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = Const$، حيث p هو الضغط الستاتيكي، h هو ارتفاع النقطة المعتبرة وv هي سرعة الانسياب في هذه النقطة.

حقيقة 30: داخل السائل بالقرب لسطحه الحر يكون الضغط الستاتيكي مساويا للضغط الخارجي.

حتى نحل النصف الثاني من المسألة، نحتاج الآتي:

فكرة 72: فكرة 46 يمكن تعميمها بحيث تصبح صالحة للأنظمة المفتوحة (كميات معينة من المادة تدخل وتخرج من النظام):

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\Phi}_{Pin} - \vec{\Phi}_{Pout}$، حيث $\vec{\Phi}_{Pin}$ و$\vec{\Phi}_{Pout}$ هما تدفقا الزخم الداخل والخارج (بمعنى آخر، محصلة الزخم الداخل والخارج من النظام على التوالي).

تدفق الزخم لسائل منساب يمكن حسابه كحاصل ضرب كثافة الزخم الحجمية $\rho\vec{v}$ مع معدل التدفق (حجم السائل الداخل إلى /الخارج من النظام لوحدة الزمن).

ما هو النظام المفتوح الذي يتوجب علينا اعتباره في هذه الحالة؟ بوضوح، سيكون نظاما سيسمح لنا بربط معدل التدفق الداخل $\mu(kg/s)$ مع التدفقات الخارجة μ_l, μ_r باستخدام المعادلة أعلاه: منطقة تخيلية صغيرة من الفضاء التي تتضمن المنطقة التي ينقسم فيها التيار إلى اثنين.

حقيقة 31: إذا كان بإمكاننا إهمال اللزوجة، فإن مركبة القوة المبذولة بواسطة مجرى التيار (متضمنا الجدران التي تحد التدفق) على الموازية لهذه الجدران صفر.

س.54 أوجد سرعة انتشار الموجات الصغيرة في المياه الضحلة. تعتبر المياه ضحلة إذا كان الطول الموجي أكبر بشكل معتبر من عمق المياه H. بفضل هذا يمكننا افتراض أنه على طول المقطع العرضي الرأسي تكون السرعة الأفقية لجميع الجسيمات v_h هي نفسها وأن السرعة الأفقية لجسيمات الماء أصغر كثيرا من السرعة الرأسية. صُغر الموجات يعني أن ارتفاعاتها أصغر كثيرا من عمق المياه. هذا يسمح لنا بافتراض أن السرعة الأفقية لجسيمات الماء أصغر كثيرا من سرعة الموجة، u.

فكرة 73: طريقة قياسية لإيجاد سرعة الانتشار (أو خاصية أخرى) لموجة (أو لتركيب آخر ذي شكل ثابت) هي اختيار نظام مرجعي تكون فيه الموجة ساكنة. في هذا الإطار، (أ) الاستمرارية (فكرة 59) و(ب) حفظ الطاقة (في شكل قانون بيرنولي) يصمدان. في حالات معينة حفظ الطاقة يمكن استبداله باتزان القوى.

(طريقة بديلة هي تحويل المتغيرات للشكل الخطي وحل نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية المقترنة.)

س.55 كرة صغيرة كتلتها $m = 1g$ تتحرك على طوال سطح ناعم، متزحلقة ذهابا وإيابا متصادمة مرونيا مع جدار وجسم. كتلة الجسم المستطيلي هي $M = 1kg$، السرعة الابتدائية للكرة هي $v_o = 10m/s$. ماهي سرعة الكرة عند اللحظة التي تكون فيها المسافة بين الكرة والجدار تضاعفت عما كانت عليه في البداية؟ بكم مرة سيتغير متوسط القوة (بالنسبة للزمن) المؤثرة على الجدار بواسطة الكرة حينها؟

فكرة 74: إذا وجدت حركة ترددية مشابهة، بحيث تتغير معاملات النظام ببطء (مقارنة بالزمن الدوري)، فحينها ما يسمى بالثابت الأدياباتي I محفوظ: إنه المساحة المنطوية داخل محيط مغلق مصنوع بواسطة مسار النظام على ما يسمى بالرسم البياني للطور (وإحداثياته هي الإحداثي المكاني x والزخم p_x).

لنكن أكثر دقة هنا. المحيط المغلق صنع كمنحنى وسيطي (بارامتري) (ما يسمى بمسار الطور) $p_x(t), x(t)$ إذا قمنا بتتبع حركة النظام خلال زمن دوري واحد T. مسار الطور يرسم عادة مع سهم يوضح اتجاه الحركة. الثابت الأدياباتي ليس محفوظا بالتمام، لكن دقة كونه محفوظا ترتفع إذا ما ارتفعت النسبة τ/T، حيث τ هو الزمن المميز لتغير معاملات النظام.

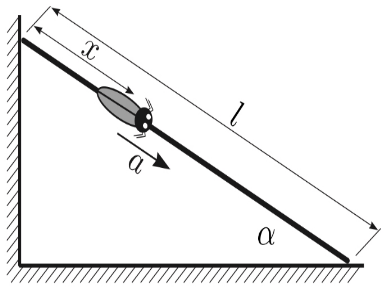
الثابت الأدياباتي يلعب دورا فعالا في الفيزياء: من القانون الأدياباتي في الغازات (قارن نتيجة المسألة الماضية مع قانون التمدد

الأدياباتي لغاز مثالي ذو درجة حرية واحدة!) ويمكن تطبيقه حتى في ميكانيكا الكم (عدد الكمات في النظام—مثل الفوتونات—محفوظ إذا كانت معاملات النظام تتغير ببطء).

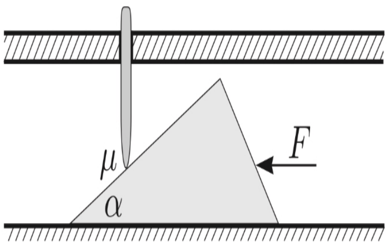
5 مسائل مراجعة

س.56 قضيب مستقيم متجانس تم إسناده على حائط رأسي بحيث أن الزاوية بين الحائط والقضيب هي $\alpha < 90$. لأي قيم α سيصبح القضيب مستقرا عند إسناده؟ اعتبر سيناريوهين: أ) الحائط زلق والأرضية خشنة بمعامل احتكاك μ؛ ب) الأرضية زلقة والجدار خشن بمعامل احتكاك μ.

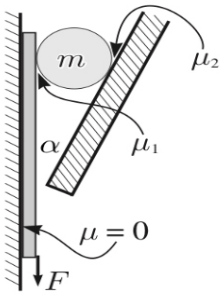
س.57 عصا خفيفة تستند بأحد نهايتيها على جدار رأسي والنهاية الأخرى على أرضية أفقية. تريد حشرة أن تزحف نزولا على طول العصا. كيف يتوجب على تسارع الحشرة أن يعتمد على المسافة بينها وبين نقطة النهاية العلوية للعصا؟ كتلة الحشرة هي m، طول العصا هو l، الزاوية بين الأرضية والعصا هي α وكتلة العصا مهملة؛ كل من الجدار والأرضية زلقان $(\mu = 0)$. كم ستأخذ من الوقت حتى تصل لنهاية العصا مع العلم أنها بدأت في أعلى نقطة (من السكون)؟



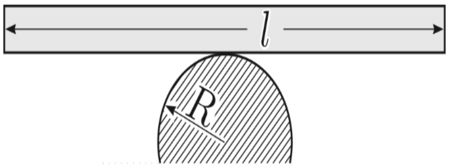
س.58 لدينا إسفين مقدمته تصنع زاوية α ويقع على سطح أفقي. يوجد ثقب جدرانه زلقة في السقف. تم وضع قضيب في هذا الثقب، ويمكنه أن يتحرك إلى الأعلى وإلى الأسفل بدون احتكاك، مع كون محوره رأسيا دائما. يتلامس القضيب مع الإسفين؛ ونقطة التلامس هي النقطة الوحيدة التي يوجد فيها احتكاك، بحيث يكون معامل الاحتكاك هناك μ. لأي قيم من μ سيكون من الممكن دفع الإسفين إلى الأمام، ما وراء القضيب، عبر تطبيق قوة أفقية كافية فحسب؟



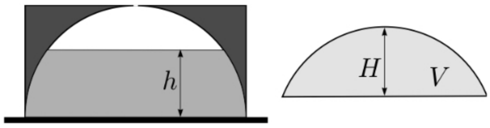
س.59 بعض الأحيان تستخدم أداة لتعليق الصوت وغيرها على الحائط، ونموذجها سيعرض أدناه. مقابل سطح رأسي مثبت لدينا صفيحة مائلة غير قابلة للتحريك، بحيث تكون الزاوية بينها وبين السطح α. يوجد فراغ بين السطح والصفيحة يمكن وضع طبق نحيل فيها. وضع الطبق بإحكام مقابل السطح الرأسي؛ يمكن اعتبار معامل الاحتكاك بينهما صفرا. في المكان بين الصفيحة والطبق لدينا أسطوانة كتلتها m يمكنها التحرك بحرية، بحيث يكون محورها أفقيا وموازيا للأسطح المعتبرة. الأسطوانة تقع على كل من الصفيحة والطبق ومعامل الاحتكاك على هذين السطحين هما μ_1 و μ_2 على التوالي. لأي قيم لمعاملات الاحتكاك سيكون من المؤكد أن الطبق لن يسقط بغض النظر عن كتلته؟



س.60 وضع لوح على قمة أسطوانة محورها أفقي، طوله l وسُمْكه h. لأي نصف قطر R للأسطوانة سيكون الموقع الأفقي للوح مستقرا؟

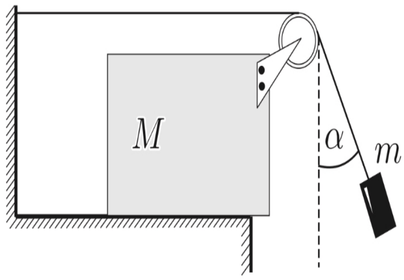


س.61 وعاء بشكل أسطوانة ارتفاعها يساوي نصف قطرها R وفيه حفرة نصف كروية مملوءة تماما بالماء، قُلب رأسا على عقب ووضع على سطح أفقي. نصف قطر الحفرة النصف كروية هو R ويوجد هنالك ثقب صغير في مؤخرة الوعاء. يتسرب بعض الماء من تحت حواف الوعاء. كم سيكون ارتفاع الماء المتبقي، لو كانت كتلة الوعاء m وكثافة الماء ρ؟ إذا كان من الضروري، استخدم معادلة الحجم لشريحة من كرة (أنظر إلى الشكل): $V = \pi H^2(R - \frac{H}{3})$.

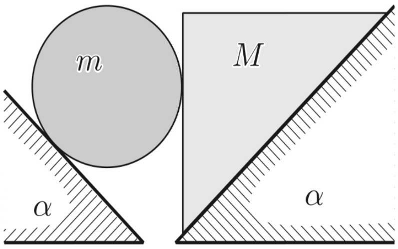


س.62 وعاء أسطواني رأسي نصف قطره R يدور حول محوره بسرعة زاوية ω. بكم يختلف ارتفاع سطح الماء عند المحور عنه قرب حواف الوعاء؟

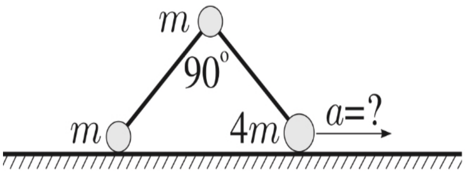
س.63 لدينا جسم كتلته M تقع على سطح أفقي أملس. لدينا خيط يمتد من الجدار من أحد نهايتيه مارة بأحد حواف الجسم إلى كتلة صغيرة m تصنع زاوية α مع الرأسي. في البداية كان الخيط مشدودا وكانت الكتل مثبتة. بعدها تم إطلاق النظام. لأي نسبة بين الكتلة ستظل الزاوية α ثابتة طوال الحركة الناتجة؟



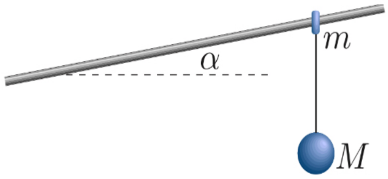
س.64 لدينا سطحان مائلان أملسان ($\mu = 0$) لهما نفس زاوية الميلان α وضعا بحيث تكون جوانبهما متوازية، أسطح الميلان متقابلة، ويوجد فارق بسيط بينهما (أنظر إلى الشكل). وضع على هذين السطحين أسطوانة وجسم ذو شكل إسفيني، بحيث يدعمان بعضهما البعض وأحد جوانب الجسم أفقية. الكتل على التوالي هي m وM. بأي تسارع ستتحرك كل من الأسطوانة والجسم؟ أوجد قوة التفاعل بينهما.



س.65 ثلاث أسطوانات صغيرة وصلت ببعضها البعض عن طريق قضبان عديمة الكتلة، بحيث يوجد مفصل قرب الأسطوانة الوسطى، حيث تتغير الزاوية بين القضيبين بأريحية. في البداية كانت هذه الزاوية قائمة. أسطوانتان لهما كتلة m والأخرى التي بالجانب لها كتلة $4m$. أوجد تسارع الأسطوانة الثقيلة بعد بدء الحركة مباشرة. أهمل الاحتكاك.

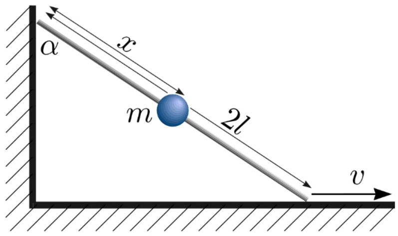


س.66 وضعنا عمودا أملسا على زاوية α مع الأفق. ولدينا خاتم صغير كتلته m يمكنه الانزلاق على طول العمود. علقنا كرة صغيرة كتلتها M بالخاتم بواسطة خيط طويل. في البداية كان الخاتم ممسكا به، وكان الخيط رأسيا. بعدها تم إطلاق الخاتم. ما هو تسارع الكرة بعد هذا فورا؟



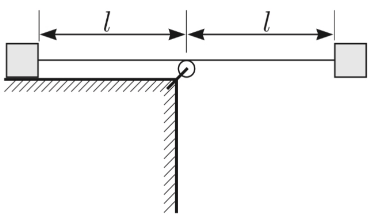
س.67 يبدأ جسم بالانزلاق عند أعلى نقطة لسطح كروي. أوجد الارتفاع الذي سيخسر فيه هذا الجسم الاتصال بالسطح. الكرة مثبتة في مكانها ونصف قطرها هو R؛ لا يوجد أي احتكاك.

س.68 لدينا قضيب عديم الكتلة طوله $2l$. كرة صغيرة كتلتها m ثبتت عند مسافة $x = l$ عن نهايته العليا. القضيب ساكن بأحد نهايتيه على جدار ونهايته الأخرى على الأرضية. حُركت النهاية التي على الأرضية بسرعة ثابتة v بعيدا عن الجدار. (أ) أوجد القوة التي تؤثر بها الكرة على القضيب عندما تكون الزاوية بين الجدار والقضيب $\alpha = 45^o$؛ (ب) ماهو الجواب إذا كانت $x \neq l$؟



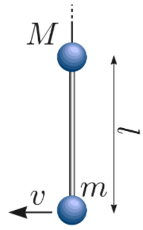
س.69 قضيب خفيف طوله l وُصل بالسطح الأفقي بواسطة مفصل؛ وهنالك كرة صغيرة كتلتها m وصلت بنهاية القضيب. في البداية كان القضيب رأسيا وكانت الكرة تلمس مكعبا كتلته M. تم ترك النظام حرا، وبعد وقت معين فقدت الكرة تلامسها مع سطح المكعب—عند اللحظة التي يصنع فيها القضيب زاوية $\alpha = \pi/6$ مع الأفقي. أوجد النسبة بين الكتلتين M/m والسرعة u للمكعب عند لحظة الانفصال.

س.70 يقع جسم على بعد l من حافة طاولة وهو موصل بواسطة خيط لجسم آخر مطابق. طول الخيط $2l$ ويمتد حول بكرة وضعت عند حافة الطاولة. الجسم الأول تم إمساكه فوق الطاولة بحيث يكون الخيط تحت الشد. حينها تم إطلاق الجسم الثاني. مالذي سيحصل أولا: هل سيصل الجسم الثاني إلى البكرة أم أن الجسم الأول سيصطدم بالطاولة؟

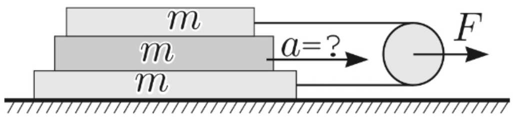


س.71 قرص هوكي ذو سمك وكثافة منتظمين أعطي سرعة زاوية ω وسرعة انتقالية u. أي مسار سيتبعه القرص إذا كان الجليد زلقا بشكل متساوٍ في كل مكان؟ في أي حالة سينزلق أكثر: عندما تكون $\omega = 0$ أو عندما تكون $\omega \neq 0$، بافتراض أنه في كلا الحالتين u نفسها؟

س.72 كرة صغيرة كتلتها M تتعلق بنهاية خيط عديم الكتلة وطويل جدا، كما وصلت بكرة صغيرة أخرى كتلتها m عبر قضيب عديم الكتلة طوله l. في البداية كان النظام متزنا. ما هي السرعة الأفقية اللازم إعطاءها للكرة السفلية من أجل أن ترتفع حتى تصبح على نفس الارتفاع مع الكرة العلوية؟ مقاسا الكرتين مهمل مقارنة بطول القضيب.

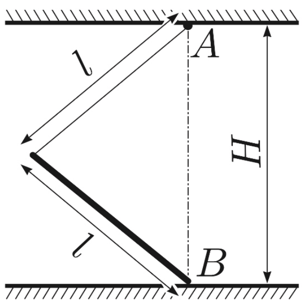


س.73 لدينا كتلة m تقع على سطح أفقي أملس. فوق هذه الكتلة كتلة أخرى m، وفوق الأخيرة كتلة أخرى m. لدينا خيط يصل بين الأولى والثالثة بحيث يمتد حول بكرة يتم سحبها بقوة F. ما هو تسارع الكتلة الثانية؟ معامل الاحتكاك بين الكتل μ.

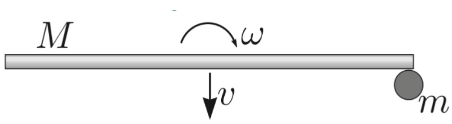


س.74 صبي كتلته m يريد دفع صبي آخر كتلته M أكبر من كتلته ويقف على الثلج. لذا يقوم بالإسراع جاريا نحو الصبي الآخر وقام بدفعه لأكبر مدة يمكن أن يظلا فيها واقفين. ماهي المسافة العظمى التي يمكن بها دفعها بهذه الطريقة؟ السرعة العظمى للجري هي v، معامل الاحتكاك بين كلٍّ من الصبيين والثلج هو μ.

س.75 قضيب منتظم طوله l ثبت بخيط عديم الكتلة (الذي طوله l كذلك) موصل بنقطة A في السقف. النهاية السفلية للقضيب تقع على أرضية ملساء عند نقطة B تقع مباشرة أسفل نقطة A. طول AB هو H، بحيث $l < H < 2l$. يبدأ القضيب بالانزلاق من السكون؛ أوجد السرعة العظمى لمركز كتلته أثناء الحركة اللاحقة. كذلك أوجد تسارع مركز القضيب والشد في الخيط عند اللحظة التي تكون فيها سرعة القضيب عظمى إذا كانت كتلته m.



س.76 لدينا عصا منتظمة الكثافة ساكنة بأحد نهايتيها على الأرضية والأخرى على الحائط. في البداية كانت العصا رأسية ثم بدأت بالانزلاق من السكون حيث أن الحركة الناتجة ستكون في بعدين. ماهي الزاوية بين العصا والجدار عند اللحظة التي ستخسر فيها ملامستها للجدار؟ أهمل الاحتكاك.

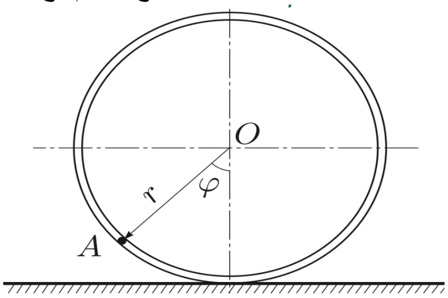


س.77 قضيب كتلته M ينزلق على الثلج أثناء دورانه. سرعة مركز كتلة القضيب v، سرعته الزاوية ω. عند اللحظة التي يكون فيها القضيب عموديا على سرعة مركز كتلته، يصطدم بقرص ساكن كتلته m. لأي نسبة بين الكتلتين M/m سيظل القضيب في مكانه وينزلق القرص بعيدا؟ التصادمات مرونية تماما. القضيب كثافته الطولية منتظمة.

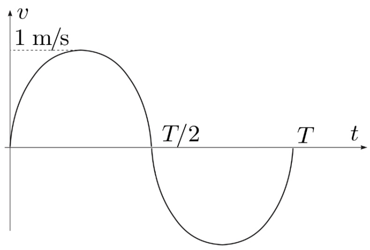
س.78 سقطت كرة من ارتفاع h، ففي البداية كانت سرعة الكرة الأفقية v_0 ولم تكن تدور. أ) أوجد السرعة والسرعة الزاوية للكرة بعد التصادم التالي مع الأرضية: تشوه الكرة على الأرضية كان مرونيا تماما، لكن كان هنالك احتكاك عند سطح التلامس بحيث أن الجزء من الكرة الذي كان ملامسا للأرضية توقف. ب) جاوب عن نفس السؤال بافتراض أن سرعات السطوح الملامسة لم تتجانس وأنه أثناء التصادم كان هنالك احتكاك بمعامل μ.

س.79 تتدحرج كرة نزولا على سطح مائل. أوجد تسارع الكرة. السطح مائل على زاوية α، معامل الاحتكاك بين الكرة والسطح هو μ.

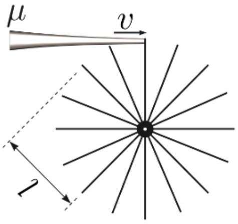
س.80 طوق كتلته M ونصف قطره r يقع على سطح أفقي زلق. يوجد هنالك نفق نحيل زلق داخل الطوق، يمكن لجسم صغير كتلته m أن ينزلق على طوله. في البداية كانت كل الأجسام في راحة وكان الجسم عند أعلى نقطة للطوق. أوجد سرعة وتسارع نقطة الطوق المركزية عند اللحظة التي تكون فيها الزاوية بين الخط التخيلي الواصل بين مركز الطوق وموقع الجسم مع الرأسي φ.



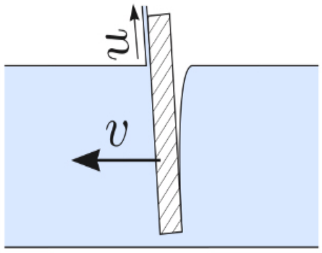
س.81 جسم كتلته $m = 10g$ وُضع على لوح صُنع بحيث أنه عندما يكون الانزلاق نحو اليسار، يكون معامل الاحتكاك $\mu_1 = 0.3$، بينما عندما يكون الانزلاق نحو اليمين يكون $\mu_2 = 0.5$. يُحرك اللوح بشكل متردد لليمين واليسار بناء على المنحنى $v(t)$ (أنظر إلى الشكل). المنحنى دوري بزمن دوري $T = 0.01s$؛ السرعة v للوح تعتبر موجبة في اتجاه اليمين. باستخدام المنحنى، أوجد متوسط السرعة المتجهة التي سيتحرك بها الجسم.



س.82 توربين ماء يتضمن عددا كبيرا من المجاديف التي يمكن اعتبارها كألواح مستوية خفيفة طولها l ثبتت بأحد نهاياتها بمحور دوار. النهايات الحرة للمجاديف وضعت على سطح أسطوانة تخيلية متحدة المركز مع محور التوربين. تيار من الماء بسرعة v ومعدل تدفق $\mu(kg/s)$ تم توجيهه على التوربين بحيث أنه يصطدم بنهاية المجاديف فقط. أوجد القدرة العظمى التي يمكن استخراجها من توربين كهذا؛ افترض أن عدد المجاديف كبير كفاية بحيث أن كل حزم المياه ستصطدم بمجداف.

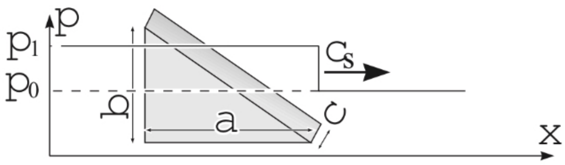


س.83 لوح مستوٍ تم تمييله بزاوية α بالنسبة للرأسي. أحد نهايتيه في الماء، النهاية الأخرى خارج الماء. اللوح يتحرك بسرعة v بالنسبة للعمودي عليه. ماهي سرعة تيار الماء المتجه لأعلى اللوح؟

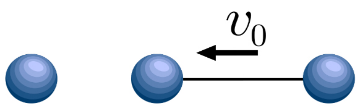


س.84 لدينا عربة تتحرك بمحرك تستخدم لنقل أثقال أفقيا مسافة L. الأثقال توصل بأسفل العربة بواسطة كابل طوله l. تتسارع العربة بشكل منتظم لنصف الزمن، ثم تتباطأ خلال النصف الآخر بشكل منتظم. أوجد قيم التسارع a بحيث أنه حين وصول الوجهة، ستكون الأثقال متعلقة بسكون. يمكنك افتراض أن $a \ll g$.

س.85 موجة الصدمة shockwave يمكن اعتبارها كقفزات غير متصلة لضغط الهواء من قيمة p_o إلى p_1، منتشرة بسرعة c_s. أوجد السرعة التي سيحصل عليها كل من الآتي عند تأثره بموجة الصدمة، (أ) منشور ذو شكل إسفيني ارتفاعه c، وقاعدته مثلث قائم الزاوية بأرجل a و b مصنوع من مادة كثافتها ρ؛ (ب) جسم ذو شكل اعتباطي حجمه V وكثافته ρ.



س.86 دمبل متكون من كرتين مرونيتين متصلتين بقضيب حديد نحيل يتحرك بشكل موازٍ لمحوره بسرعة v باتجاه كرة مطابقة أخرى. أوجد سرعة الدمبل بعد التصادم المركزي. هل الطاقة الحركية للنظام محفوظة؟



ملحق 1: قانون حفظ الزخم

لنقم باعتبار نظام مكون من N كتلة نقطية، ولنقم بالتعبير عن القوة المؤثرة على الجسم الـ i لمجموع، $\vec{F_i} = \sum_j \vec{F_{ij}} + \vec{\mathcal{F}_i}$، حيث $\vec{F_{ij}}$ هي القوة المبذولة على الجسم الـ i بواسطة الجسم الـ j و $\vec{\mathcal{F}_i}$ هي القوة الخارجية، أي تلك القوى المطبقة بواسطة أجسام لا تعتبر جزء من النظام. حينها، قانون نيوتن الثاني للجسم الـ i سيكتب كـ

$$m_i \frac{d}{dt}\vec{v_i} = \sum_j \vec{F_{ij}} + \vec{\mathcal{F}_i}$$

إذا قمنا بجمع هذه المساواة لكل قيم الرمز i فحينها سنحصل في الطرف الأيسر على

$$\sum_i m_i \frac{d}{dt}\vec{v_i} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{v_i} = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

حيث $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v_i}$ يسمى بزخم نظام من الأجسام. هنا قد قمنا بأخذ $\vec{F_{ii}} = 0$، واستخدمنا تجميعية الاشتقاق: مشتقة المجموع هي مجموع المشتقات. القوى الداخلية في الجانب الأيمن تلغي بعضها بعضا:

$$\sum_i (\sum_j \vec{F_{ij}}) = \sum_{i,j} \vec{F_{ij}} = \sum_{i>j} (\vec{F_{ij}} + \vec{F_{ji}}) = 0$$

قمنا في البداية بتمثيل المجموع كما لو أنه أخذ لجميع ازواج الرمزين ij، ثم قمنا بجمع كل الأزواج ذات الرموز المتماثلة (ij و ji) معا $\sum_{i>j}$. تعني أن المجموع مأخوذ لكل هذه الأزواج حيث $i > j$)؛ في النهاية، استخدمنا قانون نيوتن الثالث لاستنتاج أن $\overrightarrow{F_{ij}} + \overrightarrow{F_{ji}} = 0$. فمع تقديم محصلة القوة الخارجية كـ $\vec{\mathcal{F}} = \sum_i \vec{\mathcal{F}_i}$، سنحصل على

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{\mathcal{F}}$$

المساواة الأخيرة هي أصلا تعميم لقانون نيوتن الثاني لنظام من الأجسام. بشكل أكثر تحديدا، إذا لم يكن هنالك أية قوى خارجية، $\vec{\mathcal{F}} = 0$، فإن الزخم $\vec{P}$ محفوظ.

لاحظ أنه إذا لم يكن هنالك أية قوى خارجية، فإن معادلات الحركة (المعادلات التي تصف كيف يتطور النظام)، أي المعادلات التي تعبر عن قانون نيوتن الثاني، ستخضع لتماثل انتقالي: يمكننا إزاحة الإطار المرجعي انتقاليا بواسطة متجه $\vec{a}$ بدون أية تأثير على معادلات الحركة. بالفعل، المتجهات الجديدة التي تشير إلى مواقع الأجسام (متجهات نصف القطر) يعبر عنها بواسطة المتجهات القديمة كـ $\vec{r_i'} = \vec{r_i} - \vec{a}$. القوى الداخلية $\overrightarrow{F_{ij}}$ تعتمد فقط على الموضع النسبي للأجسام، أي على المتجهات $\vec{r_i} - \vec{r_j} = (\vec{r_i} - \vec{a}) - (\vec{r_j} - \vec{a}) = \vec{r_i'} - \vec{r_j'}$ التي يعبر عنها بواسطة الإحداثيات الجديدة تماما كما يعبر عنها بواسطة الإحداثيات القديمة.

مجال *الميكانيكا التحليلية* يظهر أنه لكل تماثل لمعادلات الحركة المتضمنة متغير (الذي يمكن أن يأخذ قيما اعتباطية صغيرة) سيعطي قانون حفظ. هنا في الواقع لدينا ثلاثة متغيرات مستقلة، مركبات متجه الإزاحة a_x, a_y و a_z؛ ولهذا لدينا ثلاثة كميات محفوظة — ألا وهي مركبات متجه الزخم $\vec{P}$.

ملحق 2: قانون حفظ الزخم الزاوي

بشكل مشابه لقانون حفظ الزخم، سنعتبر نظاما مكونا من N جسم. سنقوم بأخذ مشتقة الزمن لتعبير الزخم الزاوي للجسم الـ i:

$$\frac{d}{dt}m_i\vec{r_i} \times \vec{v_i} = m_i(\frac{d\vec{r_i}}{dt} \times \vec{v_i} + \vec{r_i} \times \frac{d\vec{v_i}}{dt})$$

هنا قمنا بتطبيق قاعدة مشتقة المضروب $(ab)' = a'b + ab'$ (لاحظ! يتوجب علينا إبقاء ترتيب المتجهات لأن الضرب الاتجاهي ليس تبديليا، $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$) لاحظ أن $\frac{d}{dt}\vec{r_i} = \vec{v_i}$ و $\vec{v_i} \times \vec{v_i} = 0$، بالتالي فإن الحد الأول في الجانب الأيمن سيتلاشى. لنقم أيضا بجمع مساواتنا الأولى لجميع الـ i، ولنقم بتعويض الحدود المتبقية في الجانب الأيمن باستخدام قانون نيوتن الثاني،

$$m_i\frac{d\vec{v_i}}{dt} = \sum_j \overrightarrow{F_{ij}} + \vec{\mathcal{F}_i} \;\Rightarrow\; m_i\vec{r_i} \times \frac{d\vec{v_i}}{dt} = \vec{r_i} \times (\sum_j \overrightarrow{F_{ij}} + \vec{\mathcal{F}_i})$$

لنحصل على

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \sum_{i,j} \vec{r_i} \times \overrightarrow{F_{ij}} + \sum_i \vec{r_i} \times \vec{\mathcal{F}_i}$$

الآن، لاحظ أنه بسبب قانون نيوتن الثالث $\overrightarrow{F_{ij}} = -\overrightarrow{F_{ji}}$؛ كل القوى فوق المجهرية الغير نسبوية بين نقطتين كتليتين تحدث إما عند نقطة التلامس عندما تتلامس هاتين النقطتين معا (قوة المرونة، قوة الاحتكاك)، أو تكون موازية للخط الواصل بين هاتين النقطتين (قوة الكهروسكونية، قوة الجاذبية)، في كلا الحالتين، يمكننا كتابة $\vec{r_j} = \vec{r_i} + k\overrightarrow{F_{ji}}$؛ إذا ضربنا هذه المساواة بـ $\overrightarrow{F_{ij}}$، سنحصل على $\vec{r_i} \times \overrightarrow{F_{ij}} = \vec{r_j} \times \overrightarrow{F_{ij}} = -\vec{r_j} \times \overrightarrow{F_{ji}}$، بالتالي فإن العزوم الداخلية تلغي بعضها بعضا من الجمع؛ ما سيبقى هو محصلة العزم الخارجي $\vec{\mathrm{T}} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{\mathcal{F}_i}$:

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{L}} = \vec{\mathrm{T}}$$

هذا يمكن اعتباره تعميما لقانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية لنظام من الأجسام؛ إذا كانت محصلة العزوم الخارجية صفرا ($\vec{\mathrm{T}} = 0$) فإننا سننتهي بحفظ الزخم الزاوي، $\vec{\mathcal{L}} = const$.

لاحظ أنه في مجال الميكانيكا التحليلية، حفظ الزخم الزاوي يمكن اشتقاقه من التماثل الدوراني للطاقة الكاملة لنظام ميكانيكي (عندما نقوم بتدوير الإطار المرجعي بزاوية α حول محور خلال نقطة الأصل، تعبير الطاقة الكاملة يجب أن يظل ثابتا).

ملحق 3: قانون حفظ الطاقة

من أجل اشتقاق قانون حفظ الطاقة، لنعد باعتبار مشتقة الطاقة الحركية لنظام من الأجسام بالنسبة للزمن، المعرفة كالتالي $K = \frac{1}{2}\sum_j m_i\vec{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_j m_i\vec{v_i} \cdot \vec{v_i}$ (هنا عبرنا عن $\vec{v}_i^2$ كناتج الضرب القياسي بين $\vec{v_i}$ ونفسها). لمشتقة ضرب قياسي، تطبق القاعدة العادية لمشتقة مضروب: $(\vec{a} \cdot \vec{b})' = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}'$؛ بما أن الضرب القياسي إبدالي (أي $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$)، سنحصل على

$(\vec{a}\cdot\vec{a})' = 2\vec{a}\cdot\vec{a}'$. إذن،

$$\frac{d}{dt}K = \sum_j m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt}\cdot\vec{v_i} = \sum_j \vec{F_i}\cdot\vec{v_i}$$

التي يمكن إعادة كتابتها كتفاضل الطاقة الحركية كـ $dK = \sum_j \vec{F_i}\cdot\vec{v_i}\,dt$، حيث يمكننا التعبير عن القوة المؤثرة على الجسم الـ i كمجموع القوى الداخلية والخارجية، $\vec{F_i} = \sum_j \overrightarrow{F_{ij}} + \vec{\mathcal{F}_i}$ و $\vec{v_i}dt = \vec{r_i}$. فإن

$$dK = \sum_{i,j}\overrightarrow{F_{ij}}\cdot d\vec{r_i} + \sum_i \vec{\mathcal{F}_i}\cdot d\vec{r_i}$$

هنا، $\overrightarrow{F_{ij}}\cdot d\vec{r_i}$ تسمى بالشغل المبذول بواسطة القوة $\overrightarrow{F_{ij}}$. إذا كانت القوى $\overrightarrow{F_{ij}}$

أ) تعتمد فقط على الإحداثيات $\vec{r}_i$ ولا تعتمد على السرعات المتجهة $\vec{v}_i$ وعلى الزمن t؛

ب) يوجد دالة $\Pi \equiv \Pi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots\vec{r}_N)$ (ستسمى من الآن فصاعدا بطاقة الوضع) بحيث أنه تحت أي إزاحات لانهائية الصغر $d\vec{r}_i$ للأجسام، فإن مجموع الشغل المبذول بواسطة كل القوى الداخلية $\vec{F}_{ij}$ والقوى الخارجية $\vec{\mathcal{F}}_i$ سيساوي معكوس التفاضل الكامل لطاقة الوضع، أي

$$-d\Pi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots\vec{r}_N) = \sum_i (\vec{\mathcal{F}}_i + \sum_j \vec{F}_{ij})\cdot d\vec{r}_i$$

حينها فلأي إزاحة للنظام، $dK = -d\Pi$ وبالتالي، $d(K+\Pi) = 0$، أي أن الطاقة الكاملة $E = K + \Pi = const$؛ تلك القوى الداخلية $\vec{F}_{ij}$ والقوى الخارجية $\vec{\mathcal{F}}_i$ التي تحقق الشروط أعلاه يشار إليها *بالقوى المحافظة*.

لاحظ أن الشرط (ب) أعلاه مكافئ لقول إن الشغل المبذول بواسطة القوى يعتمد فقط على الحالتين النهائية والابتدائية للنظام (أي على مواقع الكتل النقطية)، وليس على المسارات التي تحركت عليها الكتل النقطية. رياضيا، هذا الشرط يمكن إعادة كتابته باستخدام التفاضل الجزئي،

$$-\frac{\partial\Pi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots\vec{r}_N)}{\partial x_i} = \sum_j F_{ijx} + \mathcal{F}_{ix}$$

الجانب الأيمن من هذا الشرط هو مركبة—x لمحصلة القوى المؤثرة على الكتلة النقطية الـi (x_i ترمز للإحداثي—x للجسيم i؛ شروط مشابهة يجب أن تكون صالحة للمركبتين—y و—z.

حالة مهمة تكون فيها القوى محفوظة هي حالة مجالات القوى المركزية: القوة الداخلية بين نقطتين كتليتين موازية للخط الواصل بين هذين النقطتين الكتليتين وتعتمد فقط على مقدار المسافة،

$$\vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)f_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

والقوة الخارجية المؤثرة على الكتلة النقطية الـi لها خاصية مماثلة بالنسبة لنقطة مرجعية عند $\vec{r}_{io}$،

$$\vec{\mathcal{F}}_i == (\vec{r}_i - \vec{r}_{io})f_i(|\vec{r}_i - \vec{r}_{io}|)$$

لاحظ أنه بسبب قانون نيوتن الثالث، $f_{ij}(r) = f_{ji}(r)$. إذن، فالقيم الموجبة لـf_{ij} و f_i تعني التنافر والقيم السالبة تعني التجاذب، طاقة الوضع تعطى بـ

$$\Pi = \textstyle\sum_{i<j\le N} g_{ij}\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\right) + \sum_{i\le N} g_i(\vec{r}_i - \vec{r}_{io}) \tag{12}$$

حيث

$$g_{ij}(r) = -\int^r f_{ij}(r')r'dr', \qquad g_i(r) = -\int^r f_i(r')r'dr' \tag{13}$$

(الحد السفلي لهذه التكاملات يمكن أن يكون اعتباطيا). ليس من الصعب جدا التأكد أنه مع طاقة وضع كهذه، المساواة (12) تتحقق، بالفعل، لجميع قيم i.

إذا كان هنالك قوى خارجية غير محافظة فحينها يمكننا فصل القوى المحافظة والغير محافظة، $\vec{\mathcal{F}}_i = \vec{\mathcal{F}}_i' + \vec{\mathcal{F}}_i''$، مما يقود إلى

$$d(K+\Pi) = \sum_i \vec{\mathcal{F}}_i'' d\vec{r}_i$$

حيث $\vec{\mathcal{F}}_i''$ ترمز لمجموع كل القوى الغير محافظة المؤثرة على الكتلة النقطية الـi.

ملحق 4: قوة الطرد المركزي وقوة كوريوليس

اعتبر نظاما مرجعيا يدور حول نقطة الأصل O بسرعة زاوية $\vec{\Omega}$ (المتجه يعرف محور الدوران رجوعا لقاعدة المفتاح). اعتبر نقطة P، بحيث تكون عديمة الحركة في النظام الدوار، ولنقم برمز $\vec{r} = \overline{OP}$. في مرجع نظام المختبر، النقطة P تتحرك بسرعة $v = r\Omega$، وعند دراسة اتجاه

السرعة المتجهة $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$، يستطيع المرء رؤية أن $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$. الآن، إذا كانت النقطة تتحرك في الإطار المرجعي الدوار بسرعة $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}$ (لنقم باستخدام τ لقياس الزمن في النظام الدوار)، فحينها هذه السرعة المتجهة الإضافية يجب أن تضاف لما كانت عليه النقطة عديمة الحركة:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

إذن، يمكننا استنتاج أن المشتقات بالنسبة للزمن لمتجهات في إطارات المختبر والدوران المرجعية تربطها علاقة

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} + \vec{\Omega} \times$$

هذه العلاقة مكتوبة بصيغة مؤثر، مما يعني أنه يمكننا كتابة أي متجه (مثلا $\vec{r}$ أو$\vec{v}$) على يمين كل الحدود الثلاثة. تطبيقيا، نستطيع أن نطبق هذه المعادلة للطرفين الأيمن والأيسر من المعادلة $\vec{v} = \vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d}{d\tau} + \vec{\Omega} \times\right)(\vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r})$$

$$= \frac{d\vec{u}}{d\tau} + \vec{\Omega} \times \vec{u} + \frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{d\tau} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

هنا يجب أن نضع بعين الاعتبار أنه عند أخذ تفاضل متجهات وضرب المتجهات، فإن كل القواعد المعروفة يمكن تطبيقها؛ على وجه الخصوص $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$ و $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$. نحتاج كذلك قاعدة للضرب الاتجاهي المضاعف، $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$؛ يمكنك تذكر هذه المساواة عن طريق تذكر أن الضرب المضاعف يعتبر توافقا خطيا للمتجهين داخل الأقواس، وأن الإشارة الموجبة تأتي مع المتجه في الوسط. بالتالي، مع أخذ في الاعتبار أن $\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau} = 0$ و $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{u}$، وبافتراض أن $\vec{r} \perp \vec{\Omega} \Longrightarrow \vec{r} \cdot \vec{\Omega} = 0$، سنحصل على

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} - \Omega^2 \vec{r}$$

لنتذكر أن $\frac{d\vec{v}}{dt}$ هو تسارع النقطة P كما يرى من إطار المختبر المرجعي، و $\frac{d\vec{u}}{d\tau}$ هو تسارع النقطة كما يرى في الإطار الدوراني المرجعي. الآن، إذا كانت P نقطة كتلية m، وكان هنالك قوة خارجية $\vec{F}$ تؤثر على P، فإن $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ وبالتالي

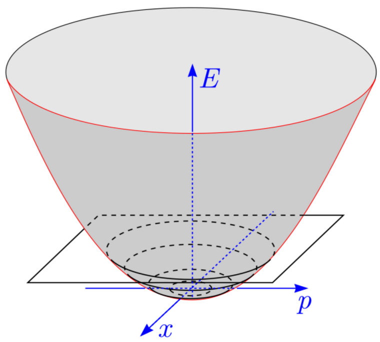
$$m\frac{d\vec{u}}{d\tau} = \vec{F} - 2\vec{\Omega} \times \vec{u}m - \Omega^2 \vec{r}m$$

بمعنى أنه في النظام المرجعي الدوار، الجسم يتصرف كما لو أنه كان هنالك قوى إضافية: قوة كوريوليس $-2\vec{\Omega} \times \vec{u}m$، وقوة الطرد المركزي $-\Omega^2 \vec{r}m$.

ملحق 5: الاتزان وقوانين الحفظ

من المعروف أن النظام يكون مستقر عند أدنى قيمة لطاقة وضعه. لكن لماذا؟ لما تختلف القيمة الدنيا عن القصوى؟ في حالة مبدأ فيرما، يوجد هنالك فرق واضح: لا يوجد هنالك أطول مسار ضوئي بين نقطتين—يستطيع الشعاع أن يتحرك بحركة عشوائية فحسب—، لكن بالطبع يوجد هنالك أقصر مسار!

السبب بسيط — عند حالة الاتزان، الطاقة الحركية دائما دنيا (مادامت الكتل موجبة). الذي نحتاجه فعليا لحالة الاستقرار هو **قيمة قصوى شرطية لكمية محفوظة ما (مثل الطاقة الكاملة)، تحت افتراض أن بقية الكميات المحفوظة أبقيت ثابتة** (لا بأس بقيمة قصوى غير شرطية). اعتبر حركة جسم على طول محور x—ولنقم بوصفه في مستوى الطور، بالإحداثيات x و p (الزخم). الطاقة الكاملة هي $E = U(x) + p^2/2m$. الآن، إذا قمنا برسم هذه الطاقة كسطح في فضاء ثلاثي الأبعاد، مع إحداثيات p, x و E، فإن النقطة التي تصف حالة النظام ستتحرك على طول خط التقاطع بين هذا السطح والمستوى الأفقي $E = const$. عند أدنى $U(x)$، مع $p = 0$، خط التقاطع هذا سيكون



مجرد نقطة واحدة، لأن هذه هي أدنى نقطة لهذا السطح. سنحصل على المسارات القريبة إذا رفعنا المستوى الأفقي قليلا، $E = E_{min} + \varepsilon$، بحيث أنه لا يلمس السطح فحسب، بل يقطع قطعا ناقصا صغيرا منه. كل النقاط على هذا المسار (القطع الناقص) تعتبر قريبة إلى نقطة الاتزان، إذن بالفعل، هذه الحالة مستقرة.

يظهر أنه يمكن لنظام أن يكون مستقرا بسبب قيمة عظمى شرطية لكامل الطاقة: في حين أن القيمة القصوى الغير شرطية للطاقة يمكن أن تكون دنيا، الأمور مختلفة بالنسبة للقيم القصوى الشرطية. ربما أبسط مثال هو دوران الجسم الصلد. لنعتبر طوبة مستطيلية بطول a، عرض b، وسمك c ($a > b > c$). لتكن I_c عزم القصور الذاتي للطوبة للمحور المار بمركز كتلتها وعمودي على المستوى—(a, b)؛ I_b و I_a يعرفان بطريقة مشابهة. لحالة عامة، عزم القصور الذاتي I سيعتمد على توجه محور الدوران، لكن من الواضح تماما أن $I_c > I > I_a$ (يمكن إثباته بسهوله حالما تتعلم كيفية استخدام حسابات الموترات). الآن، لنقم برمي الطوبة وهي تدور في الهواء ونقم بدراسة حركتها في إطار يتحرك مع مركز كتلتها (في هذا الإطار، سنقوم بإهمال الجاذبية). هنالك كميتان محفوظتان: الزخم الزاوي L، وطاقة الدوران $K = L^2/2I$. يمكننا أن نرى أنه لـ L ثابتة، سيكون للنظام طاقة دنيا عند $I = I_c$ (المحور الموازي لأقصر حافة للطوبة)، وطاقة عظمى لـ $I = I_a$ (المحور الموازي لأطول حافة للطوبة). يمكنك التحقق عمليا بسهولة أن كلا طريقتي الدوران مستقرتان بالفعل! في نفس الوقت، إذا كان المحور موازيا للحافة الثالثة، فإن الدوران غير مستقر. هذه الظاهرة مبينة في فيديو منتج بواسطة *NASA* في محطة الفضاء الدولية، *https://mix.msfc.nasa.gov/abstracts.php?p=3873*.

حسنا، في الحقيقة الدوران مع الطاقة الدنيا يظل مستقرا أكثر بقليل عن الدوران مع الطاقة العظمى؛ السبب يقع في التبدد. إذا حاولنا تمثيل حركة النظام في فضاء الطور (كما هو موصوف أعلاه)، سطح الطاقة ذو شكل الوعاء (مثل الذي في الشكل أعلاه) سيستبدل بواحد ذو شكل تلة؛ عند الاتزان، مسار الطور سيتركز في نقطة في أعلى "التلة" حيث تمس المستوى الأفقي $E = E_{max}$. بسبب التبدد، الطاقة ستقل، $E = E_{max} - \varepsilon$، وبهذا سيلف مسار الطور بشكل لولبي. إذن، بينما أنك على الأغلب اعتدت على معرفة أن التبدد يسحب النظام نحو الحالة المستقرة، هنا الحالة مقلوبة، التبدد يسحب النظام بعيدا عن الحالة المستقرة! هذا ما يعرف بـ عدم الاستقرار المتبدد.

ملحق 6: صيغة اللاجرانجي

في طريقتنا في الميكانيكا، قمنا بتسليم قوانين نيوتن؛ بناء على هذا، اشتقينا قانون حفظ الطاقة الصالح للقوى المحافظة، وباستخدام قانون حفظ الطاقة، وصلنا إلى طريقة الإحداثيات المعممة.

في الميكانيكا التحليلية، الترتيب معكوس. بداية، نحن نسلم أن أي نظام ميكانيكي له طاقة وضع محددة، وطاقة حركية محددة، وكلاهما جمعيان؛ نقوم كذلك بإنشاء معادلة للطاقة الحركية للكتل النقطية، ولطاقات الوضع لتفاعلات الكتلة النقطية بناء على نوعية التفاعل (يتم فعل هذا بشكل مشابه لكيفية إنشاء قواعد حساب القوى لأنواع تفاعلات مختلفة في القسم 2).

ثانيا، لنقم باعتبار نظام ميكانيكي له عدد n من درجات الحرية، أي أنه من أجل تحديد حالة النظام بشكل فريد، سنحتاج n معامل. سنسلم أنه إذا كان هذا النظام يتطور من حالة ما موصوفة بمجموعة إحداثيات q_i، $i \in [1, n]$ عند زمن $t = \tau$ [هذه الحالة ترتبط لنقطة في فضاء ذو $n + 1$ بُعد بإحداثيات $(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$] لحالة أخرى q_i' عند زمن $t = \tau'$ فإن تطور النظام في الزمن يأخذ مسارا معينا $q_i(t)$ (خط منحنى يصل بين الحالتين الابتدائية والنهائية في الفضاء) بحيث يجعل قيمة تكامل معين $\mathcal{S}$ أصغر ما يمكن. هذا التكامل، يشار إليه بـ *الفعل*، يعرف بواسطة طاقتي الحركة والوضع الكاملتين للنظام، يرمز إليهما بـ T و V على التوالي؛ V تعتمد على الإحداثيات، $V = \mathrm{V}(q_i)$، $i \in [1, n]$، و T تعتمد أيضا على معدلات التغير للإحداثيات $\dot{q}_i$:

$$\mathcal{S} = \int_{\tau}^{\tau'} \mathcal{L}[q_i(t), \dot{q}_i(t), t]dt \tag{14}$$

بحيث

$$\mathcal{L}[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] = T[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] - V[q_i(t), t] \tag{15}$$

يسمي *اللاجرانجي* للنظام، والمسلمة نفسها تعرف بمبدأ الفعل الأدنى.

باستخدام طرق التحليل المتغاير، يمكن للمرء إثبات أن التكامل $\mathcal{S}$ له قيمة قصوى إذا كان

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \tag{16}$$

هنا $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$ تعني أننا سنشتق اللاجرانجي $\mathcal{L}[q_i(t), \dot{q}_i(t), t]$ بالنسبة لمتغير واحد من متغيراتها الـ $2n + 1$، $\dot{q}_i$، بينما سنعتبر بقية المتغيرات لتكون ثابتة. $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$ معرفة بشكل مشابه. $\frac{d}{dt}$ ترمز لمشتقة الزمن الكاملة، أي أننا سنضع في عين الاعتبار اعتماد $\mathcal{L}$ على الزمن بشكل مباشر خلال متغيرها الأخير t وأيضا بشكل غير مباشر حيث أن الكميات q_i و $\dot{q}_i$ دوال في الزمن أيضا. لاحظ رجاء أن معادلة (16) صالحة لكل i، وبهذا سنمتلك نظاما مكونا من n معادلات. الانتقال من مبدأ الفعل الأدنى إلى معادلة (16) يتضمن خطوة رياضية واحدة، لذا نستطيع القول بأن الميكانيكا التحليلية تسلم المعادلة (16).

أي طريقة أفضل: الطريقة التاريخية بالتسليم بقوانين نيوتن، أو بتسليم معادلة 16؟ كلا الطريقتين لهما نقاط قوة وضعف. بينما أن الطريقة التقليدية مبنية خطوة بخطوة بناء على مشاهدات معملية، طريقة الميكانيكا التحليلية يأخذ مبدأ الفعل الأدنى من لا شيء. بنفس الوقت، معادلة (16) تعطينا أداة خارقة وكونية للتحليل النظري (استخدامها ليس مقصورا على الميكانيكا فحسب): وقتما يكون لدينا تعبير للاجرانجي، يمكننا كتابة معادلة

التطور التي تصف كيف سيتطور النظام. على كل حال، يجب أن نأخذ بعين الاعتبار أنه فقط في حالة الميكانيكا الكلاسيكية، $\mathcal{L} = T - V$، ويجب أن تبقى يقظا حتى في حالة الميكانيكا الكلاسيكية (أنظر أدناه).

في الواقع، يمكن تقديم مبدأ الفعل الأدنى بطريقة طبيعية أكثر (وليس من "اللاشيء") باستخدام ميكانيكا الكم. نعم، إذا اعتبرنا جسيما نقطيا كدالة احتمال ميكانيكية كمية فحينها باستخدام تقريب شبه كلاسيكي، يمكننا أن نعبر عن طور الموجه كالتالي

$$\varphi = \int\left(\vec{k} \cdot d\vec{r} - \omega dt\right) = \hbar^{-1} \int (\vec{p} \cdot d\vec{r} - E dt) \tag{17}$$

هنا $\vec{p}$ هو الزخم و E هي طاقة الجسيم. إذا أبقينا في ذهننا أن $d\vec{r} = \vec{v}dt$ و $\vec{v} \cdot \vec{p} = 2T$ فيمكننا القول أن $\varphi = \hbar^{-1} \int [2T - (T + V)]dt = \hbar^{-1}\mathcal{S}$. إذن، الفعل $\mathcal{S}$ يعطينا مباشرة طور الموجة. الموجات تتراكب بنائيا إذا وصلوا بنفس الطور، والعديد من الموجات القادمة عبر مسارات مختلفة تكون تقريبا بنفس الطور إذا كانت هذه المسارات قريبة لمسار الفعل الأدنى. يجب ملاحظة أن نفس الظاهرة تحدث بالضبط في حالة انتشار الضوء، ويمكن تلخيصها بمبدأ فيرما. يمكننا القول أنه طبقا لمبدأ هيغنز لانتشار الموجة، أن سعة موجة الاحتمال يمكن إيجادها كمجموع مساهمات مسارات الأشعة الممكنة؛ على كل حال، معظم هذه المساهمات تلغي بعضها بعضها بسبب الأطوار المتعاكسة، وتبقى فقط مساهمة "المسار الأمثل" (والمسارات المجاورة له مباشرة) سليمة؛ "الأمثل" يعني الارتباط بقيمة قصوى (والتي يظهر أنها دنيا) للفعل. إذن، يمكننا القول بأن الكتلة النقطية تتحرك على طول مسار الفعل الأدنى.

الآن، لنتأكد ما إذا كان مبدأ الفعل الأدنى يتوافق مع قوانين نيوتن. لهذه النهاية، لنعتبر نظاما من الكتل النقطية m_i، $i \in [1, n]$، ولنستخدم الإحداثيات الإقليدية المعتادة: لتكن $\vec{r}_i$ مشيرة إلى موقع الكتلة النقطية الـi. حينها سنعرف (سنسلم) باللاجرانجي كـ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_i \vec{v}_i^2 - \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$$

هنا رمزنا $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ وافترضنا أن كل قوى التفاعل محافظة: $\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$ تمثل طاقة الوضع الكاملة كدالة في إحداثيات كل الجسيمات. إذن، إذا طبقنا معادلة 16 لهذا اللاجرانجي، وأبقينا في أذهاننا أن $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ix}} = m v_{ix}$ (حيث الرمز x يرمز لإسقاط المتجه على محور—x—، سنحصل على

$$\frac{d}{dt} m v_{ix} = -\frac{\partial \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_N)}{\partial x_i}$$

طبقا لمعادلة 12، ما لدينا في الطرف الأيمن هو مركبة—x—للقوة المؤثرة على الجسيم الـi (وبوضوح سنحصل على تعبير مشابه لمركبتي—x و—y). إذن، نستنتج أن المعادلة (16) حينما تكون مكتوبة للإحداثيات الإقليدية ستكون مكافئة لقوانين نيوتن. في نفس الوقت، كون معادلة (16) محققة هو مكافئ لكون مبدأ الفعل الأدنى صالحا. الآن، لنلاحظ أن مبدأ الفعل الأدنى تمت صياغته بشكل مستقل عن نظام المحاور: إذا كان لدينا مسار معين $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ له فعل أدنى في الإحداثيات الإقليدية فإنه سيبقى الأدنى حتى إذا عبرنا عنه بواسطة إحداثيات معممة $q_i = q_i(t)$. بما أن المسار له فعل أقصى بدلالة الإحداثيات المعممة q_i فإن (طبقا لنتائج تحليل التغاير)، معادلة اللاجرانجي (16) يجب أن تكون صالحة عند استخدام الإحداثيات المعممة q_i. هذا يكمل إثباتنا أن قوانين نيوتن ومعادلة (16) متكافئتان.

على الرغم من أننا نوعا ما أكملنا البرهان، سنحتاج أن نضع بعض التعليقات على ما إذا نقص عدد درجات الحرية بسبب قيود مختلفة. كمثال، لنعتبر جسما صلدا مصنوعا من N جزيء؛ مجموعة الجزيئات هذه لها $3N$ درجة حرية. على كل حال، المسافة النسبية بين الجزيئات مثبت بواسطة القوى الجزيئية، بحيث أنه توجد فقط ست درجات حرية متبقية: بحيث تعبر ثلاثة أرقام عن موقع مركز الكتلة، وثلاثة أخرى تعبر عن التفاف واتجاه الجسم. قد أثبتنا سابقا أن مبدأ الفعل الأدنى صالح لمجموعة من الكتل النقطية (الجزيئات)، لذا فنحن نعلم أن نظامنا يتطور في فضاء تصوري ذو $3N + 1$ بُعْد على طوال مسار σ يصل بين نقطة البداية A ونقطة النهاية B بحيث يكون الفعل أقل ما يمكن. في هضا الفضاء التصوري، يجب على اللاجرانجي أن يأخذ بعين الاعتبار طاقات التفاعل البين جزيئية. بينما أن تعبير طاقات التفاعل البين جزيئية قد يكون بالغ التعقيد، فطالما أننا مهتمون فقط في الحركة الفوق مجهرية، سنحتاج فقط أن نثبت المسافات. المسافات يمكن أن تكون ثابتة مع لاجرانجي مبسط: سنقول أن طاقة التفاعل البين جزيئية صفر، في حالة كانت المسافة بين الجزيئين مساوية لما يفترض أن تكون، وستصبح عالية جدا في غير هذه الحالة. بسبب كون المسافات البين جزيئية ثابتة، حالة هذا النظام يمكن وصفها بشكل كامل باستخدام ستة إحداثيات معممة؛ هذا يعني أن كل المسارات في الفضاء التصوري الـ$3N + 1$ البعد مقيدة في سطح فائق سداسي الأبعاد $\mathcal{M}$ (النقطتان A و B يجب أن تقعا كذلك على هذا السطح الفائق). نحن نعلم أن المسار σ يجعل الفعل بين A و B الأدنى في الفضاء التصوري الـ$3N + 1$ بُعد؛ السطح الفائق $\mathcal{M}$ يكون جزءا من هذا الفضاء، لذا فبالتأكيد أن هذا المسار سيجعل الفعل بين A و B الأدنى على هذا السطح الفائق. بالتالي، معادلة (16) لابد أن تبقى صالحة عندما نستخدم الإحداثيات الست المعممة لوصف حالة جسم صلد. هذه المحاجة لا تعمل فقط للجسم الصلد، بل كذلك لأي قيود تثبت المواقع النسبية لأجزاء النظام (مما يختزل عدد درجات الحرية).

يمكننا أن نستنتج قاعدة مهمة من المناقشة في الفقرة السابقة: إذا كتبنا اللاجرانجي باستخدام الإحداثيات المعممة لنظام يحتوي قيودا جوهرية، فإن عدد الإحداثيات يجب أن يكون أقل ما يمكن. فمثلاً، إذا كان لدينا جسم صلد، سيتوجب علينا أن نستخدم ستة إحداثيات وليس سبعة، لأن قيمة الإحداثي السابع يمكن اشتقاقها من الستة الأولى (بوجود الإحداثي السابع، سنضطر أن نضيف حدا إضافيا إلى اللاجرانجي لتثبيت قيمة الإحداثي السابع).

إذن، الآن أصبح لدينا خياران: يمكننا أن نستخدم معادلة اللاجرانجي (16)، ويمكننا كذلك استخدام طريقة 6 حيث اشتقينا في هذه الحالة معادلة الحركة من قانون حفظ الطاقة. هاتان الطريقتان متشابهتان للغاية: في كلا الحالتين سنحتاج أن نعبر عن طاقتي الوضع والحركة بدلالة الإحداثيات

المعممة ومشتقاتها بالنسبة للزمن. على كل حال، يوجد كذلك فروقات معينة: في أحد الحالتين، نقوم باشتقاق معادلة الحركة مباشرة من قانون حفظ الطاقة؛ في الحالة الأخرى نقوم باعتبار الفرق بين هاتين الطاقتين ونطبق معادلة يمكننا اما اعتبارها كمسلمة، أو مشتقة من قوانين نيوتن بطريقة بالغة التعقيد.

أي طريقة أفضل؟ في البداية، يجب أن نؤكد أنه بينما معادلة (16) يمكن استخدامها دائما، طريقة 6 المبنية على حفظ الطاقة يمكن تطبيقها فقط في تلك الحالات التي يكون فيها درجة حرية واحدة، أي أن حالة النظام يمكن وصفها بواسطة إحداثي معمم واحد. بالفعل، بعد أخذ مشتقة قانون حفظ الطاقة بالنسبة للزمن، سنحصل على معادلة تفاضلية واحدة، لكننا سنحتاج عددا من المعادلات يساوي عدد الدوال المجهولة (درجات الحرية). على كل حال، لمعظم مسائل الأولمبياد، هذا الشرط يتحقق (أبق في ذهنك أن كل كمية محفوظة إضافية، مثل الزخم، ستختزل العدد الفعال لدرجات الحرية بواحد).

حسنا، لنقم بمقارنة هاتين الطريقتين عندما يكون لدينا إحداثي معمم واحد q، ولنفترض أن الطاقات لا تعتمد بشكل صريح على الزمن. في حالة الميكانيكا النيوتونية، الطاقة الحركية تتناسب مع مربع السرعة، لذا يمكننا افتراض أن $T=\frac{1}{2}\mathcal{M}(q)\dot{q}^2$. حينها، قانون حفظ الطاقة ينص أن $\frac{1}{2}\mathcal{M}(q)\dot{q}^2+V(q)=E$، بالتالي $\frac{1}{2}\mathcal{M}'(q)\dot{q}^3+\mathcal{M}(q)\dot{q}\ddot{q}+V'(q)\dot{q}=0$ فـ

$$\mathcal{M}(q)\ddot{q}=-\frac{1}{2}\mathcal{M}'(q)\dot{q}^2-V'(q)$$

في نفس الوقت، يتم التعبير عن اللاجرانجي كـ $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mathcal{M}(q)\dot{q}^2-\mathrm{V}(q)$؛ حينها، ومع $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}=\frac{d}{dt}\mathcal{M}(q)\dot{q}=\mathcal{M}'(q)\dot{q}^2+\mathcal{M}(q)\ddot{q}$، معادلة (16) ستكتب كـ

$$\mathcal{M}'(q)\dot{q}^2+\mathcal{M}(q)\ddot{q}=\frac{1}{2}\mathcal{M}'(q)\dot{q}^2-V'(q)$$

من السهل رؤية أننا تحصلنا على نفس المعادلة في كلا الحالتين، وأنه رياضيا، مستوى الصعوبة كان تقريبا متساويا. على كل حال، لقد احتجنا أن نتذكر معادلة (16)، مما يجعل الطريقة المبنية على قانون حفظ الطاقة أسهل بشكل طفيف.

قبل أن نضع أي استنتاج نهائي، لنقم باعتبار نظام مكون من كرتين كتلة كل منهما m، موصولتين ببعضهما البعض بواسطة زنبرك طوله a وجسوءه k، وتدوران بزخم زاوي $\vec{L}$ (الذي هو عمودي على الزنبرك) في الفضاء. هنا قد يبدو أن للنظام درجتي حرية (الزاوية وطول الزنبرك)، لكن قانون حفظ (غير الطاقة) إضافي (للزخم الزاوي) يختزل عدد درجات الحرية الفعالة للنظام إلى واحد. لنستخدم تشوه الزنبرك x كالإحداثي المعمم. حينها،

$$T=\frac{m\dot{x}^2}{4}+\frac{L^2}{m(a+x)^2},\qquad \Pi=\frac{1}{2}kx^2$$

الشيء الملحوظ هنا أن الطاقة الحركية لا تعتمد فقط على $\dot{x}$ فحسب، بل وكذلك على x؛ من ناحية التأثير، الحد الثاني في الطاقة الحركية يتصرف كطاقة وضع، ويمكن دمجه داخل طاقة وضع فعالة في تعبير الطاقة الكلية. باتباع طريقة 6، سنحصل على

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}\dot{x}-\frac{2L^2}{m(a+x)^3}\dot{x}+kx\dot{x}=0\quad\Rightarrow\quad\ddot{x}=\frac{4L^2}{m^2(a+x)^3}-2\frac{k}{m}x$$

لنحاول أيضا أن نحصل على نفس النتيجة باستخدام اللاجرانجي (لاحظ جيدا! هذا سيكون خاطئا!):

$$\mathcal{L}=\frac{m\dot{x}^2}{4}+\frac{L^2}{m(a+x)^2}-\frac{1}{2}kx^2$$

بالتالي

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}=-\frac{2L^2}{m(a+x)^3}-kx\quad\Rightarrow\quad\ddot{x}=-\frac{4L^2}{m^2(a+x)^3}-2\frac{k}{m}x$$

هذه ليست نفس النتيجة السابقة—الحد الأول في الطرف الأيمن لديه إشارة مختلفة! إذن، في ماذا أخطأنا؟ النتيجة الأولى صحيحة بوضوح بما أن الطاقة الكاملة محفوظة بوضوح. ما حصل أنه باستخدام قانون حفظ الزخم الزاوي لاختزال عدد الإحداثيات قد قمنا بتغيير نقطتي البداية والنهاية في الفضاء التصوري. كما برهنا أعلاه، مبدأ الفعل الأدنى [(وبالتالي معادلة (16)] صالح إذا لم نستخدم قوانين الحفظ لاختزال عدد درجات الحرية، وكانت كل قوانين الحفظ تعتبر نتيجة للمعادلة (16). في هذه الحالة، العدد الأصلي لدرجات الحرية كان اثنان: يمكننا استخدام التشوه x وزاوية دوران الزنبرك φ حتى نصف حالة النظام بشكل كامل. إذا قمنا باستخدام هذين الإحداثيين مع اللاجرانجي المرتبط حينها سيكون كل شيء صحيحا: الفعل

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m\dot{x}^2}{4}+\frac{m\dot{\varphi}^2(a+x)^2}{4}-\frac{1}{2}kx^2\right]dt$$

سيكون عند أقل قيمة للمسار الحقيقي إذا قمنا بمقارنة المسارات الواصلة بين الحالة الابتدائية x_1,φ_1 والحالة النهائية x_2,φ_2. لكن على كل حال، لقد قمنا الآن باستبعاد المتغير φ، وإذا قمنا برمي شرط الزاويتين الابتدائية والنهائية، فإن العديد من المسارات الإضافية ستصل بين الحالة الابتدائية x_1 والحالة النهائية x_2: المسار الحقيقي لن يحتاج أن يكون ذو الفعل الأقل. درس مهم تعلمناه من هذا

التحليل **لا تستخدم معادلة (16) إذا قمت باختزال عدد درجات الحرية عبر استخدام قيد (قانون حفظ) يتضمن مشتقات المتغيرات بالنسبة للزمن**، لأنه عبر تثبيت قيمة المشتقة بالنسبة للزمن فلن نقدر أن نثبت قيمة الإحداثي نفسه. إذا كان لديك قوانين حفظ واستطعت أن تجد قيودا كثيرة بحيث أنك ستجعل عدد درجات الحرية ينزل إلى واحد فقم بهذا، واستخدم طريقة 6؛ خلاف هذا أبقِ العدد الأصلي للإحداثيات وطبق معادلة (16).

نهايةً، لنقم بالتأكيد على أن اللاجرانجي يعطى بالفرق بين طاقتي الحركة والوضع فقط حالة الميكانيكا الكلاسيكية؛ في الحالات الأخرى، ستكون المهمة الأولى اكتشاف تعبير اللاجرانجي. كيف يمكننا القيام بهذا؟ مبدئيا يوجد خياران. بافتراض أننا نعرف من البداية معادلة الحركة في الإحداثيات الإقليدية x_i، يمكننا التجريب حتى نصل للاجرانجي $\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t)$ بحيث أن معادلة (16) تصبح مطابقة لمعادلة الحركة. لاحظ أن المعادلة الأصلية لا تحتاج أن يكون لها أصول فيزيائية. على كل حال، عبر إيجاد اللاجرانجي المرتبط بها، سيمكننا تأويلها فيزيائيا: فمثلا، إذا كان اللاجرانجي يخضع لتماثل انتقالي، سيمكننا استخدام نظرية نويثر لإيجاد كمية محفوظة ونسيمها الزخم. في الكهرومغناطيسية، سنستخدم هذه الطريقة لاشتقاق الزخم المعمم لجسيم مشحون في مجال مغناطيسي.

الخيار الثاني يعمل إذا درسنا نظاما يمكن اعتباره باستخدام ميكانيكا الكم؛ لنوضح هذا باعتبار كتلة نقطية نسبوية. نحن نعلم أن مبدأ الفعل الأدنى في الميكانيكا يرتبط بمبدأ هيغنز [انظر إلى معادلة (17)] وبالتالي، الفعل لابد أن يكون طور موجة الاحتمال الميكانيكية الكمية، مضروبا بـ$\hbar$ـ. في هذه الحالة سيكون الفعل الكلاسيكي النهاية صغيرة السرعة للفعل النسبوي. إذن، مع m رامزة للكتلة النسبوية و m_0 رامزة لكتلة السكون للجسيم،

$$\mathcal{S} = \int (\vec{p} \cdot \vec{v} - R)dt = \int (mv^2 - T - V)dt = \int [m(v^2 - c^2) - V]dt$$

بالتالي

$$\mathcal{L} = m(v^2 - c^2) - V = -m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V$$

من السهل التأكد من أنه إذا وضعنا هذا اللاجرانجي في معادلة (16)، ومع تذكر أن $V = V(x, y, z)$ و $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$، سنحصل على قانون نيوتن الثاني النسبوي. كما يمكننا أن نرى الآن، لا يوجد هنالك طاقة حركية متضمنة في اللاجرانجي.

6 التلميحات

1. اكتب معادلة اتزان العزوم لنقطة التلامس O بين الطوق والمحور. ماهي الزاوية المماسية للمحور عند النقطة O مع الأفقي (معطى أن السلك ينزلق على المحور)؟

2. اكتب معادلة العزوم لنظام الأسطوانة-الجسم بالنسبة لنقطة التلامس بين الأسطوانة والسطح المائل. ماهي الزاوية التي يصنعها المماس للأسطوانة عند موقع الجسم مع الأفق؟

3. رجوعا لفكرة 4، اعتبر النظام '' قضيب CD + قضيب m الكتلة '' كاملا؛ يوجد هنالك أربعة قوى مؤثرة عليه: $m\vec{g}, \vec{F}$، وقوى الشد من القضبان، $\overrightarrow{T_{AC}}, \overrightarrow{T_{BD}}$. قوى الشد هي القوى التي لا نعرفها ولا نريد أن نعرفها. رجوعا لفكرة 2، هذه القوى ستخرج من اتزان العزوم المؤثرة على القضيب CD بالنسبة لنقطة التقاطع بين AC و BD. بالفعل، بسبب حقيقة 20، قوة الشد في قضيب AC موازية لـ AC؛ نفس الشيء ينطبق على القضيب BD. الآن، ماذا يجب أن يكون عزم القوة F؟ لأي اتجاه لهذه القوة سنحصل على العزم المطلوب بأقل مقدار لها؟

4. الجمع المتجهي للقوى $\vec{F}$ و $m\vec{g}$ يجب أن يلغي جمع الاحتكاك والقوة العمودية $\vec{f} = \vec{N} + \vec{F_h}$، بمعنى أنه يجب أن يصنع زاوية $\arctan \mu$ مع العمودي على السطح. لنقم برسم مثلث القوى $m\vec{g} + \vec{f} + \vec{F} = 0$: المتجه $m\vec{g}$ يمكن رسمه مباشرة (اتجاهه ومقداره معلومان)، اتجاه $\vec{f}$ يمكن ملاحظته بواسطة خط مستقيم يعبر خلال نقطة النهاية لـ $m\vec{g}$. $\vec{F}$ يجب أن توصل هذا الخط المستقيم لنقطة البداية لـ $m\vec{g}$. لأي اتجاه ستكون قيمته أدنى ما يمكن؟

5. اذهب إلى الإطار المرجعي للسطح المائل (استغل الفكرتين 7 و8) واستخدم نفس الطريقة كالتي في مسألة 4 ($\vec{a} + \vec{g}$ تعمل كالجاذبية الفعالة $\overrightarrow{g_e}$).

6. استخدم إطارا مرجعيا دوارا مرتبطا بالأسطوانة (حيث يكون الجسم ساكنا، وقوة الطرد المركزي $\vec{f_t}$ ثابتة وتشير إلى الداخل) . (أ) نقطة النهاية لمحصلة قوتي الطرد المركزي والجاذبية تتحرك على دائرة ويجب أن تكون مساوية لمحصلة القوة العمودية وقوة الاحتكاك $\vec{f}$. ماهي الزاوية العظمى المسموحة بين المتجهين $\vec{f}$ و $\vec{f_t}$ بحيث لا يوجد انزلاق؟ لأي اتجاه لـ $m\vec{g}$ ستكون الزاوية بين المتجهين $\vec{f}$ و $\vec{f_t}$ عظمى؟ (ب) مازال يوجد ثلاث قوى فقط؛ طالما يوجد اتزان، هذه المتجهات الثلاث يجب أن تكون مثلثا وبالتالي، يجب أن تقع على نفس المستوى. طبقا للفكرة 11-K، سنرسم اتزان القوى في هذا المستوى، أي في المستوى المعرف بواسطة المتجهين $\vec{g}$ و $\overrightarrow{f_t}$. الطريقة المستخدمة في جزء (أ) يمكن استخدامها هنا، لكن نقطة النهاية لـ $\overrightarrow{f_t} + m\vec{g}$ سترسم فقط قوسا من دائرة كاملة. حدد الزاوية المركزية لهذا القوس. بناء على طول القوس، يمكن أن يحدث أن تكون الزاوية العظمى بين العمودي على السطح (= اتجاه $\overrightarrow{f_t}$) و $\vec{f}$ عند أحد نقطتي نهاية القوس.

7. لاحظ أنه أثناء التدحرج بسرعة ثابتة، مركز كتلة العربة كاملة يتحرك كذلك بسرعة ثابتة. أيضا، كل من الأسطوانتين تدوران بسرعة زاوية ثابتة، بالتالي لن يكون هنالك عزم يؤثر عليها، بالتالي قوة الاحتكاك يجب أن تكون صفرا. استخدم الإطار الدوار للعجلة؛ طبق الفكرتين 12 و11 لتعويض جسم غير متماثل (الأسطوانة مع حفرة) بجسمين متماثلين، أسطوانة بغير حفرة، وأسطوانة ذات كثافة سالبة؛ بعدها استخدم الفكرتين 9 و10 لرسم قوتي الجاذبية والطرد المركزي؛ خذ في الحسبان أن القضيب قد يعطي أي قوة أفقية، لكن لا يمكنه بذل أي قوة رأسية.

8. بناء على فكرة 14، على أي خط يتوجب على نقطة تقاطع قوى الاحتكاك أن تكون؟ ماذا يمكننا القول عن الزاويتين المصنوعتين بواسطة متجهي قوة الاحتكاك واتجاه الخيط معطًا الفكرة 1 (المحور متعامد مع الشد في الخيط)؟ الآن قم بدمج الاستنتاجين أعلاه. أين نقطة تقاطع متجهي قوة الاحتكاك؟ ما هو اتجاه متجهات سرعة الأسطوانة عند النقاط التي تقع فيها الأسطوانة على الشريط الخشن؟ أين هو مركز الدوران اللحظي للأسطوانة (حتى تعرف كيف تجده انظر إلى كتيب علم الحركة)؟ ما هو متجه السرعة لمركز الأسطوانة؟ (ب) هل شرط الاتزان أعلاه سيتعارض مع كون السطح خشنا بشكل منتظم؟

9. ارسم دائرة حيث يكون قطرها الخط المستقيم الذي يصل بين نقاط الدعامة. استخدم فكرة 22: أي منحنى يمكن للكرة أن تتحرك عليه؟ أين أدنى نقطة لهذا المنحنى؟

10. اعتبر العزوم المؤثرة على القضيب بالنسبة للمفصل. لأي زاوية α ستكون القوة المحصلة للقوة العمودية وقوة الاحتكاك تدفع القضيب أكثر على اللوح؟

11. كم ستنزل الكتلة إذا تمدد الخيط مسافة δ؟

12. لنفترض أن المركبة الأفقية للشد في الحبل هي T_x. ماهي المركبة الرأسية للشد قرب السقف؟ بقرب الوزن؟ اكتب شرط اتزان القوى المؤثرة على أ) الثقل وب) نظام الثقل والحبل (انظر إلى فكرة 4).

13. برؤية أن $H \ll L$، سيكون انحناء الحبل صغيرا، والزاوية المماسية بين الحبل والأفق ستظل صغيرة في كل مكان. من اتزان القوى الأفقي للحبل، عبر عن المركبة الأفقية لقوة الشد T_x كدالة في الطول l (لاحظ أنه بينما T_x تظل ثابتة على طول القطعة المعلقة من الحبل، سنحتاج قيمتها عند النقطة P الفاصلة بين القطعتين المعلقة والموضوعة). اكتب معادلة اتزان العزوم المؤثرة على الجزء المعلق من الحبل بالنسبة لليد الحاملة (بناء على ما تم ذكره أعلاه، ذراع قوة الجاذبية يمكن تقريبها لتكون $l/2$)). كنتيجة، يتوجب عليك أن تحصل على معادلة تربيعية للطول l.

14. استخدم فكرة 9: اذهب إلى الإطار المرجعي للمفصل الدوار. أ) باتباع فكرة 19، اكتب شرط اتزان العزم بالنسبة للمفصل (فكرة 2) لزاوية انحراف صغيرة φ. أيهما ينتج عزما أكبر، $m\vec{g}$ أو قوة الطرد المركزي؟ (لاحظ أنه بشكل مغاير، يمكن استخدام فكرة 21 لحل هذه المسألة). ب) باتباع فكرة 21، عبر عن طاقة الوضع الكاملة لزاويتي انحراف صغيرتين φ_1 وφ_2 باستخدام طاقتي قوة الطرد المركزي (التي تمثل قوة مرونية!) وقوة الجاذبية؛ طبقا لفكرة 20، أبقِ فقط الحدود التربيعية. يفترض أن تحصل على كثيرة حدود في متغيرين، φ_1 وφ_2. الاتزان $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ يكون مستقرا إذا كان يرتبط بطاقة وضع دنيا، أي أن كثيرة الحدود ستعطي قيما موجبة لأي ابتعاد عن نقطة الاتزان؛ هذا الشرط يؤدي إلى متباينتين. أولا، باعتبار $\varphi_2 = 0$ (مع $\varphi_1 \neq 0$) سنستنتج أن معامل φ_1^2 يجب أن يكون موجبا. ثانيا، لأي $\varphi_2 \neq 0$، كثيرة الحدود يجب أن تكون موجبة، أي أننا إذا ساوينا هذا التعبير بالصفر واعتبرناه كمعادلة تربيعية في φ_1، يجب ألا يكون هنالك أي حلول حقيقية، مما يعني أن المحددة يجب أن تكون سالبة.

15. طبق الفكرتين 19 و22 لموقع زاوي لا تتغير فيه قوة الطفو (أي بافتراض اتزان القوى الرأسية). من فكرة 2، خذ مركز الكتلة ليكون النقطة المحورية. أثناء حساب عزم قوة الطفو، استخدم الفكرتين 12،11: إذا لم يوجد ماء مزاح في منطقة معينة، فإن كثافة الماء المزاح صفر، لكن يمكن تمثيلها كتراكب كثافتين موجبة وسالبة: $\rho_w + (-\rho_w) = 0$. المقطع العرضي للجزء أسفل المياه من العمود يمكن تمثيله كتراكب مستطيل ومثلثين متماثلين نحيلين (أحدهما سالب الكتلة).

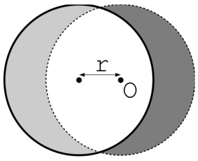
16. نظام الخزان والماء يتأثر بالجاذبية وبقوة التفاعل العمودية للسطح الأفقي للسائل. بما أننا نعرف ضغط السائل عند قاعدة الخزان، فيمكننا التعبير عن كتلة الخزان من شرط الاتزان الرأسي.

17. من أجل حساب التصحيح الأول باستخدام طريقة الاضطراب سنستخدم حقيقة 51 والنظام المرجعي للجسم المنزلق للأسفل بشكل منتظم: بمعرفة مقدار واتجاه قوة الاحتكاك سنستطيع أن نجد مركبتيها في اتجاهي $\vec{w}$ و$\vec{u}$. إشارة الأخيرة تنقلب بعد نصف دورة، لذا ستلغى بعد أخذ المتوسط.

18. لنقم باختيار نقطة الأصل لمحور—x الرأسي لتكون نقطة بعيدة جدا من راسب الحديد على سطح المحيط. للنقطة المرجعية الصفرية لجهد جاذبية الأرض سنختار $x = 0$ (أي أن $\varphi_{earth} = gx$)، وبالنسبة لراسب الحديد ستكون هذه النقطة عند اللانهاية. حينها، لتلك النقاط على سطح المحيط البعيدة جدا عن راسب الحديد، سيكون جهد الجاذبية صفرا. يتبقى بالنسبة لنا إيجاد تعبير للجهد فوق راسب الحديد كدالة في x (باستخدام مبدأ التراكب) ومساواته بالصفر.

19. لنقم بتوظيف الإطار المرجعي للمنصة. لنقام باعتبار اتزان العزوم بالنسبة لمحور القرص الصغير (حينها ستكون ذراع القوة المبذولة بواسطة المحور صفرا). ولنقم بتقسيم القرص إلى قطع صغيرة متساوية الحجم. قوى الاحتكاك المؤثرة على هذه القطع متساوية في المقدار وتتجه نحو السرعات المتجهة الخطية لنقاط القرص (في الإطار المرجعي المختار). بما أن حركة القرص يمكن التعبير عنها كدوران حول محور لحظي، فإن الدوائر المتشاركة في المركز لمتجهات قوى الاحتكاك ستكون (متركزة حول محور الدوران اللحظي). بوضوح، محصلة عزم هذه المتجهات بالنسبة لمحور القرص سيصغر كلما صغر انحناء الدوائر (أي كلما بَعُدَ محور الدوران اللحظي): العزم سيكون صفرا عندما يكون محور الدوران اللحظي عند اللانهاية فتصبح الدوائر ذات المركز الواحد خطوطا مستقيمة متوازية. محور دوران لحظي عند اللانهاية يعني أن الحركة انتقالية، $\omega_3 = 0$ (بما أن السرعة الخطية $v = \omega_3 r$ لنقطة ما نهائية، لكن $r = \infty$).

20. محور الدوران اللحظي على بعد $r = v/\omega$ من محور القرص. لنستخدم نفس التجزئة التخيلية كما في المسألة السابقة. قم الآن بحساب مركبة محصلة القوة في اتجاه الحركة. لاحظ أن قوى الاحتكاك على النقاط المتماثلة بالنسبة لمحور الدوران اللحظي تعادل بعضها بعضا عبر منطقة دائرية نصف قطرها $R - r$. المنطقة اللامتعادلة يجب حسابها للأسفل. لنتخيل توسيع المنطقة "المتعادلة" إلى نصف قطر R (الدائرة المقطعة في الشكل). الجزء الذي لا يكون فيه قرص دوار فعلي من هذه المنطقة الموسعة (الهلال الرمادي الغامق في الشكل)، يمكن تمثيله بتراكب قرصين، أحدهما يدور مع عقارب الساعة، وأحدهما عكس عقارب الساعة. في هذه الحالة المركبة التي مع عقارب الساعة ستشترك في التعادل، بينما المركبة التي عكس عقارب الساعة ستظل غير معادلة. كملخص، ستظل منطقتان ذات شكل هلالي غير متعادلتين (غير متزنتين): أحدهما يرتبط بالقرص الحقيقي (الرمادي الفاتح في الشكل)، والآخر يرتبط بقرص يدور عكس عقارب الساعة (الرمادي الغامق)؛ بشكل معامد لـ$\vec{v}$، سمك هذه المناطق يساوي r في كل مكان. أسهل طريقة لإيجاد القوة المحصلة هو أخذ التكامل لكامل المنطقتين هلاليتين الشكل باستخدام الإحداثي القطبي φ: $|\vec{F}| = A \cdot dS$، حيث dS هي مساحة عنصر السطح؛ $dF_x = A\cos\varphi dS = B\cos^2\varphi d\varphi$، $F_x = \int dF_x = B\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi$. ماهي قيم الثوابت A وB؟



21. اعتبر متجه الوحدة $\vec{\tau}$ المتجه المشير إلى الإزاحة المتناهية الصغر لمركز الكتلة عند اللحظة التي يبدأ فيها قلم الرصاص بالحركة. لنعبر عن إحداثياته في المحاور الديكارتية (x, y, z)، حيث x موازية للقلم، والسطح (x, y)—موازي للسطح المائل. باستخدام علاقات الدوران المكاني سنمثله في الإحداثيات الجديدة (x', y', z')، التي بدورها دوران بالنسبة لـ(x, y, z) حول المحور—z بزاوية φ (بحيث يكون المحور x' أفقيا). باستخدام علاقات الدوران المكاني سنعبر عن مركبة المتجه $\vec{\tau}$ الرأسية z' في المحاور الإحداثية (x', y', z')، التي يُحصل عليها من المحاور (x', y', z') عبر تدويره حول x' بزاوية α.

22. يقوم الخيط بتوصيل النقطتين خلال المسافة الأقصر على جانب الأسطوانة؛ عندما نفرد الأسطوانة ستصبح مستطيلا. اعتبر المستوى الرأسي الملامس لسطح الأسطوانة الذي يتضمن الجزء المتعلق من الخيط. هذا المستوى والأسطوانة يلمسان بعضهما في خط مستقيم s. إذا تخيلت فرد الأسطوانة، فسترى أن الزاوية بين الخيط والخط المستقيم s ستساوي زاوية ميلان الأسطوانة α. مع هذا سيكون من السهل إيجاد l. عندما تتذبذب الكتلة، فإن أثر الخيط سيبقى مستقيما على الأسطوانة المفرودة. بالتالي فطول الخيط المتعلق (وبالتالي طاقة الوضع للكتلة) لن يعتمد على أي حالة تذبذية أو على ما إذا كان السطح أسطوانيا بالفعل أو كان مفرودا بشكل سطح رأسي (ما دام التوجه المكاني لمحور s محافظا عليه).

23. اكتب معادلتين لوصف اتزان القوة والعزوم، وأخرى تصف العلاقة الخطية بين استطالات الخيوط: $T_1 - T_2 = T_2 - T_3$.

24. بداية فقط القوى الرأسية تؤثر في الجسم المعلق، بالتالي فإن متجه الإزاحة الابتدائي سيكون رأسيا أيضا. إذا كان تسارع الكتلة الكبيرة a_1 ، ولتلك الكتلة فوقها a_2 وللجسم المعلق a_3، فإن $a_1 + a_2 = a_3$. الآن يمكننا كتابة قانون نيوتن الثاني لكل جسم. المجهول الرابع والأخير هو الشد في الخيط.

25. اذهب إلى الإطار المرجعي للإسفين. محصلة قوى القصور والجاذبية على الكرة m عمودية على الميل الأيسر (حتى تظل الكرة في سكون هناك) اعتبر محصلة القوى المؤثرة على الكرات. مركباتها العمودية هي $\overrightarrow{F_{\perp 1}}$ و$\overrightarrow{F_{\perp 2}}$. هذه المركبات مساوية للقوى العمودية $\overrightarrow{N_1}$ و$\overrightarrow{N_2}$ المؤثرة على الكرات وبالتالي لهما نفس القيمة $(F_{\perp 1} = F_{\perp 2})$ لضمان أن اتزان القوى سيتحقق أفقيا للإسفين.

26. لنأخذ الإزاحة ξ للإسفين كإحداثي يصف موقع النظام. إذا تحرك النظام بـξ ، فإن الجسم سيتحرك بنفس المقدار بالنسبة للإسفين، لأن الحبل غير قابل للتمدد، كما تتغير الطاقة الحركية بـ $\Pi = mg\xi sin\alpha$. سرعة الإسفين هي $\dot{\xi}$ وتلك للجسم $2\dot{\xi}sin\frac{\alpha}{2}$ (ستحصل عليها بجمع السرعتين، حيث أن المتجهين $\dot{\xi}$ بينهما زاوية α)، وبالتالي ستكون الطاقة الحركية الكاملة $K = \frac{1}{2}\dot{\xi}^2(M + 4msin^2\frac{\alpha}{2})$. حينها سنجد $\Pi'(\xi) = mgsin\alpha$ و$\mathcal{M} = M + 4msin^2\frac{\alpha}{2}$؛ جمعهما سيعطي الجواب.

27. مرة أخرى، لنأخذ إزاحة الأسفين لتكون الإحداثي ξ؛ إذا كانت إزاحة الجسم على طول سطح الإسفين η، فإن كون مركز الكتلة ساكنا سيعطي $\eta(m_1cos\alpha_1 + m_2cos\alpha_2) = (M + m_1 + m_2)\xi$. من هنا يستطيع المرء الحصول على η كدالة في ξ، لكن من أجل جعل المعادلة مختصرة سيكون من الأفضل عدم تعويض هذا التعبير في كل مكان. الطاقات الحركية للأجسام يمكن الحصول عليها بمجموع الطاقات الأفقية $\left[\frac{1}{2}m_i(\dot{\xi} - \dot{\eta}cos\alpha_i)^2\right]$ والطاقات الرأسية $\left[\frac{1}{2}m_i(\dot{\eta}sin\alpha_i)^2\right]$.

28. عند كتابة قانون حفظ الطاقة، لاحظ أن سرعة الجسم ضعف سرعة الأسطوانة الأفقية وأن الأخيرة تساوي سرعة الأسطوانة الرأسية أيضا (لماذا؟). أسقط قانون نيوتن الثاني على المحور المار بالحافة العلوية للدرجة ومركز الأسطوانة: هذا المحور معامد على كل من القوة العمودية بين الأسطوانة والجسم وكذلك للتسارع المماسي للأسطوانة. السؤال الثاني: النسبية بين القوتين العموديتين ثابتة (لماذا؟ ماذا تساوي؟ تلميح: قارن بين التسارعات الأفقية للأسطوانة والجسم وتذكر قانون نيوتن الثاني)، بالتالي سيصبحان صفرا في نفس اللحظة.

29. عبر إسقاط قانون نيوتن الثاني على المحور في اتجاه القوة العمودية سنرى أن القوة العمودية تكون الأصغر عند أدنى نقطة من جزء المسار المقوس. (حينها، يكون التسارع المركزي أكبر من يمكن، وتكون قوة الجاذبية على طول المحور أصغر ما يمكن).

30. طاقة نظام "الكرية&الجسم" دائما محفوظة؛ الزخم سيبدأ كونه محفوظا وقتما تمر الكرية عبر النقطة السفلى. عندما تصل هناك للمرة الثانية، ستكون سرعة الجسم العظمى (لماذا؟).

31. لنطبق فكرة 46 لـ$\vec{P}$: زخم النظام الكلي هو $P = \omega lm + 2\omega lM$، محصلة القوة $F = (m + M)g - T$. ونفس الشيء باعتبارات دورانية: بالنسبة لموقع الكرة اليسرى الأولي، فإن الزخم الزاوي هو $l(2\omega l)M$ (السرعة هي $2\omega l$، ذراع المقبض—l)؛ محصلة العزم هي $(T + Mg)l$. الآن، للمعادلة المعطاة في فكرة 46 سنحتاج التسارع الزاوي $\dot{\omega} = \varepsilon$. لنجده باستخدام طريقة 6: $\Pi = l\varphi(m + 2M)$، $K = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2l^2(m + 4M)$. مسار حل آخر: النسبة بين التسارعين هي $2:1$؛ يوجد لدينا أربعة مجاهيل (قوتان عموديات، التسارع وشد الخيط)؛ المعادلات: ثلاثة معادلات اتزان (لأي من الكرتين والقضيب) ومعادلة اتزان عزم (بالنسبة للنهاية اليسرى للقضيب).

32. الطريقة رقم 6: لإحداثي معمم ξ يمكننا استخدام إزاحة نقطة نهاية الخيط. الفكرتان 12، 34: التغير في إحداثي—y لمركز الكتلة هو $\xi\rho h/M$ (h هو الاختلاف في ارتفاعي نقطتي نهاية الخيط، M هي الكتلة الكلية للنظام؛ افترض أن $h \gg \xi$). للإحداثي—x سيكون $2\xi\rho R/M$.

33. $\langle T(1 + cos\alpha)\rangle = 2mg$، $T = \langle T\rangle + \tilde{T}$، حيث $T \gg \left|\tilde{T}\right|$. بناء على فكرة 20 سنهمل الحد الأصغر $\langle\tilde{T}\alpha^2\rangle$ ونلاحظ أن $\langle\alpha^2\rangle > 0$.

34. سيتوجب علينا اعتبار حالتين: إما أن تتحرك كل الأجسام معا، أو أن الجسم الكبير الأيمن سيتحرك بشكل منفصل. لماذا لا يمكن للحالات أن تحصل حيث (أ) كل المكونات الثلاثة تتحرك بشكل منفصل، أو (ب) الجسم الكبير الأيسر يتحرك بشكل منفصل؟

35. بعد التصادم ستكون مسارات الكرات خطوطا مستقيمة متعامدة؛ الزاوية بالنسبة للمسار الابتدائي ستتحدد بكم كان التصادم منحرفا عن المركز.

36. لحركة غير مركزية بالكاد: ماذا سيكون اتجاه زخم الكرة التي صدمت أولا؟ الآن طبق فكرة 52 مجددا. الحركة المركزية: عبر عن السرعات المتجهة بعد التصادم بواسطة المركبة الأفقية للزخم p_x التي تم نقلها لأحد الكرات. ماهي المركبة الرأسية المنتقلة p_y؟ حفظ الطاقة يوفر لنا معادلة لإيجاد p_y (من الملائم التعبير عن الطاقة كـ $p^2/2m$).

37. الرسم البياني سيبدو كـ n خط مستقيم متقاطع؛ نقطة التقاطع لزوج من الخطوط المستقيمة يشير إلى تصادم بين الكرتين (الرسم لكلا حركتي الكرتين سيكون خطا مسننا؛ عند نقطة التصادم ستتلامس زوايا الخطوط المسننة بحيث يبدو كما لو تقاطع الخطان المستقيمان).

38. السرعات الابتدائية في مركز الكتلة: $\frac{mv}{m+M}, \frac{Mv}{m+M}$، السرعات النهائية صفر؛ الاحتكاك يصنع شغلا: μmgL.

39. بناء عن الشكل سنحصل مباشرة على مقادير واتجاهات الزخوم، لكن ليس أي زخم لأي كرة. من الضروري معرفة أين ستتجه الكرة المرموزة بالسهم ستتجه بعد التصادم. فكرة 27 ستساعد في الاختيار من الاختيارات الثلاث.

40. الطاقة: في وقت dt توزع المائع سيتغير: سيظل هناك بعض الماء في المركز، لكن جزءا معينا من الكتلة dm تم نقله من الأعلى إلى مستوى الصنبور (وبعدها خلال الصنبور)، لذا فإن التغير في طاقة وضع النظام هو $gH \cdot dm$. الزخم: الماء في البرميل سيحصل على زخم كلي $\rho GHSdt$ من الجدران. هذا الزخم سينتقل إلى تيار الماء الذي كتلته $\rho Sv \cdot dt$.

41. الطاقة ليست محفوظة: حبيبات الرمل تنزلق وتتأثر بالاحتكاك. في زمن dt سيحصل الرمل الساقط على الحزام الناقل زخما $dp = vdm = v\mu dt$ من الحزام: القوة بين الرمل حديث السقوط والحزام هي $F_1 = dp/dt$. الرمل على الحزام سيشعر بقوة الجاذبية mg الذي تعاكس بواسطة مركبة الاحتكاك الموازية للحزام، $F_2 = mgcos\alpha$، حيث $m = \sigma L$ هي كتلة الرمل على الحزام و$\sigma v = \mu$. القيمة الدنيا ستؤخذ بالنسبة لـ v.

42. أثناء التصادم $\Delta p_\perp = \sqrt{2gh}$.

43. اعتبر مقطعا صغيرا من المسار على طول التلة بطول dl. بالإضافة لتغير طاقة الوضع سيكون هنالك شغل مبذول لمقاومة الاحتكاك، $dA_h = \mu mgtan\alpha \cdot dl$. نجد أن $dA_h = C \cdot dx$، حيث C ثابت. بأخذ المجموع لكل المسارات الصغيرة dl سنجد $A_h = C\Delta x$.

44. الطاقة الحركية $K = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + M\dot{x}^2$، حيث x هي الإزاحة على طول السطح المائل؛ $\Pi = (\mathrm{M+m})\mathrm{x}\sin\alpha$. وبإيجادنا للتسارع a سنذهب إلى إطار (الأسطوانة) يتحرك بتسارع a (الفكرتان 7و8)، حيث سيزاح الجسم بواسطة الجاذبية الفعالة إلى أدنى نقطة ممكنة.

45. طبقا للفكرتين 61 و62، الزخم الزاوي للقضيب قبل التصادم سيكون $L_0 = Mlv - \frac{1}{3}Ml^2\omega$؛ بعد التصادم $L_1 = Mlv' - \frac{1}{3}Ml^2\omega'$؛ $L_0 = L_1$. الظرف النهائي هو: $v' + l\omega' = 0$ (سنعتبر ω موجبة إذا كان الدوران في اتجاه الموضح في الشكل).

46. الزخم الزاوي بالنسبة لنقطة التأثير قبل التصادم: $mv\left(x - \frac{l}{2}\right) - I_0\omega$، حيث $v = \omega\frac{l}{2}$ و $I_o = \frac{1}{12}ml^2$.

47. محور الدوران اللحظي يمر بنقطة التلامس بين الأسطوانة والأرضية؛ مسافته عن مركز الكتلة لا يتغير، حينها يمكننا استخدام فكرة 65؛ $I = \frac{3}{2}mR^2$.

48. لنوجه محور z إلى أعلى (هذا سيثبت إشارات الزخوم الزاوية). الزخم الزاوي النهائي بالنسبة لمحور— x هو $\frac{7}{5}mv_yR - muR$ وبالنسبة لمحور— y سيكون $\frac{7}{5}mv_xR$.

49. مباشرة بعد التصادم الأول سيكون مركزا كتلة الدمبلين ساكنين، سرعات الكرات المتصادمة ستنعكس بالاتجاه، سرعة الكرات التي لم تتصادم لن تتغير. كلا الدمبلين سيتصرفان مثل البندول ويكملان نصف دورة تذبذبيه، ثم سيحصل التصادم الثاني مثلما حدث الأول.

50. حبيبات الرمل ستؤدي تذبذبا توافقيا في المستوى المتعامد مع محور الأسطوانة—مثل بندول رياضي طوله $l = R$ في مجال جاذبية $gcos\alpha$؛ يوجد تسارع ثابت على طول المحور ($a = gsin\alpha$). التركز سيحصل إذا كان الزمن اللازم لعبور الحوض على طول محوره مضاعفا صحيحا لنصف الزمن الدوري.

51. بمراقبة موقع الاتزان سنستنتج أن مركز الكتلة يقع في محور تماثل المعلاق. نقاط التعليق الثلاث لا بد أن تكون واقعة على الدائرتين المتشاركتين في المركز المذكورتين في فكرة 69. بالتالي أحد هاتين الدائرتين لابد أن تضم على الأقل نقطتين منها، بينما مركز الدوائر (مركز كتلة المعلاق) يجب أن يقع داخل المنطقة المحاطة بأسلاك المعلاق على محور تماثله. بحساب نصفي القطرين l_1 و l_2 للدائرتين باستخدام حساب المثلثات سنحدد الطول المختزل للبندول $l_1 + l_2$ وباستخدام هذا سنحصل على الزمن الدوري.

52. الكتلة الفعالة للماء المتحرك يمكن إيجادها باستخدام تسارع الكرة الساقطة. للفقاعة المتصاعدة ستكون الكتلة الفعالة مثلها بالضبط، كتلة الغاز مقارنة بهذا ستكون مهملة.

53. تيار الماء يمكن تقسيمه عقليا إلى قسمين: التيار الأيسر سيتجه لليسار، والأيمن سيتجه لليمين. بالتالي، أنبوبا مياه وهميين سيتكونان. في كلا الأنبوبين سيساوي الضغط الإستاتيكي الضغط الخارجي: طبقا لقانون بيرنولي، سرعة السائل لا يمكن أن تتغير. بناء على حفظ الزخم الأفقي، فإن زخم التدفق لليسار وزخم التدفق لليمين يجب أن يجمعا ليصبحا زخم التدفق الأساسي الأفقي. لاحظ أنه بسبب الاستمرارية، $\mu = \mu_v + \mu_p$.

54. بسبب الاستمرارية $(u+v)(H+h) = Hu = const$، حيث $h = h(x)$ هو ارتفاع الماء عند نقطة x و$v = v(x)$ هي السرعة. يمكننا كتابة قانون بيرنولي لأنبوب تخيلي قرب السطح (المنطقة بين السطح الحر وخطوط الانسياب التي ليست بعيدة عن السطح):

$\frac{1}{2}\rho(u+v)^2 + \rho g(H+h) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho gH = Const$. يمكننا اهمال الحدود ذات الدرجة الثانية الصغيرة (التي تتضمن معاملات v^2 أو vh.

55. مسار الطور عبارة عن مستطيل أفقي بأطوال L و$2mv$، حيث L هي المسافة بين الجسم والجدار؛ الثابت الأدياباتي سيكون إذن $4Lmv$.

56. اعتبر اتزان العزوم. لمحصلة متجهات القوة العمودية والاحتكاك، عندما تقوم بتمديدهم، سيتوجب أن تكون نقطة تقاطعهم فوق مركز الكتلة.

57. لنكتب قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية بالنسبة لنقطة تقاطع القوى العمودية: الزخم الزاوي للحشرة هو $L = mvlsin\alpha cos\alpha$، معدل تغير هذا الزخم الزاوي سيكون العزم الناتج عن الجاذبية المؤثرة على الحشرة (أذرع قوة بقية القوى صفر). عند حساب الزمن، لاحظ أن التسارع سالب ويتناسب مع المسافة من النهاية السفلى، أي أننا نتعامل مع تذبذبات توافقية.

58. الحجب يحصل عندما تسحب محصلة القوة العمودية والاحتكاك القضيب للأسفل.

59. عندما يحدث الحجب يمكننا إهمال كل القوى ما عدا القوى العمودية والاحتكاك. افترض أنه سيحصل. فحينها محصلة القوة العمودية والاحتكاك من اليسار واليمين يجب أن تعادلا بعضهما البعض كقوى وعزوم، أي يجب أن تقع على نفس الخط ولهم نفس المقدار. وبهذا سنحصل على الزاوية بين العمودي على السطح ومحصلة القوة العمودية والاحتكاك.

60. اعتبر اتجاه العزم المؤثر على اللوح بالنسبة لنقطة التواصل، عندما يلتف اللوح بزاوية φ: ستزاح نقطة التلامس بـ$R\varphi$، الإحداثي الأفقي لمركز الكتلة سيزاح بمسافة $\frac{h}{2}\varphi$ من الموقع الأولي لنقطة التلامس.

61. القوة الوحيدة من السطح على نظام الوعاء والماء تأتي من الضغط الهايدروستاتيكي $\rho gh\pi R^2$؛ وهي توازن قوة الجاذبية $(m + \rho V)g$. لاحظ أن $H = R - h$.

62. طاقة وضع الجاذبية لقوة الطرد المركزي هي $\frac{1}{2}\omega^2 r^2$، حيث r هي المسافة من محور الدوران.

63. افترض أن الإطار المرجعي للجسم الكبير (الذي يتحرك بتسارع a). أين ستتوجه الجاذبية الفعالة (محصلة قوتي الجاذبية والقصور الذاتي)؟ ماهي a؟ بأي تسارع ستسقط به الكتلة الصغيرة في هذا الإطار المرجعي؟ ما هو الشد T في الخيط؟ بإجابة هذه الأسئلة سيمكننا كتابة ظرف الاتزان للكتلة الكبيرة $ma = T(1 - sin\alpha)$.

64. لنستخدم إزاحة الكرة (نزولا في السطح المائل) لتكون الإحداثي المعمم ξ. ما هي إزاحة الكرة (ارتفاعا في السطح المائل الآخر)؟ بوضوح $\Pi = (m - M)g\xi sin\alpha$. القوة العمودية بين الجسمين يمكن إيجاده عبر إسقاط قانون نيوتن الثاني على اتجاه السطح المائل.

65. لتكن إزاحة الأسطوانة الكبيرة ξ، والإزاxxحة الأفقية للأسطوانتين الوسطى واليسرى x وy على التوالي. ماهي العلاقة بينهم بمعرفة أن مركز الكتلة ساكن؟ ماهي العلاقة بينهم باعتبار أن طول القضبان لا تتغير؟ من المعادلتين التي حصلنا عليها سيمكننا التعبير عن x وy بدلالة ξ. إذا افترضنا أن الإزاحة صغيرة، ماذا ستكون العلاقة بين الإزاحة الرأسية z للأسطوانة الوسطى وطول القضيب الأفقي، $x - \xi$؟ بمعرفة هذه النتائج، تطبيق طريقة 6 سيكون مباشرا.

66. ماهو اتجاه الإزاحة الصغيرة ξ للكرة (أنظر إلى فكرة 31)؟ ماهي إزاحة الخاتم بدلالة ξ؟ استخدم طريقة 6.

67. استخدم فكرة 40 مع حفظ الطاقة عبر إسقاط القوة والتسارع في قانون نيوتن الثاني قطريا.

68. لنقم باستخدام بعض الأفكار من علم الحركة لإيجاد تسارع الكرة (*K29*، *K1* و*K2*): عبر الانتقال إلى إطار مرجعي يتحرك بسرعة v سنجد مركبة تسارع الكرة في اتجاه القضيب وعبر ملاحظة أن التسارع الأفقي للكرة صفر، سنجد باستخدام هندسة المثلثات مقدار التسارع). الآن استخدم قانون نيوتن الثاني.

69. باستخدام سرعة v للكرة يمكننا التعبير عن سرعة الجسم عند اللحظة التي نتفحصها (مع التركيز أن سرعاتهما الأفقية متساوية). باستخدام فكرة 40 سنجد التسارع الأفقي للجسم (وبالتالي للكرة) صفر؛ باستخدام قانون نيوتن الثاني للكرة والاتجاه الأفقي سنستنتج أن الشد في القضيب صفر. من قانون حفظ الكتلة سنعبر عن v^2 ومن قانون نيوتن الثاني للكرة والمحور المتجه باتجاه القضيب سنحصل على معادلة يكمن فيها الحل.

70. باستخدام قانون نيوتن الثاني لتقصي ما إذا كان مركز الكتلة سيتحرك لليسار أو اليمين (إذا لم يتحرك مركز الكتلة، فحينها كل الحدثين سيحصلان في نفس الوقت).

71. للإجابة عن الجزء الأول: أظهر أن القوة العمودية للسرعة صفر (استخدم طريقة 3 وفكرة رقم 27). من أجل الإجابة عن الجزء الثاني استخدم طريقة 3 وفكرة 56.

72. بسبب طول الخيط لن يكون هنالك قوى أفقية، أي أن المركبة الأفقية للزخم محفوظة، وكذلك الطاقة. من المعادلتين هاتين سنحصل على السرعة الحدية $v = v_0$، التي سترتفع بها الكرة السفلية إلى ارتفاع العلوية. لاحظ أنه عند هذه اللحظة ستكون سرعتها الرأسية صفرا أنظر إلى فكرة 44.

73. استخدم فكرة 51. الخيارات: كل الأجسام ستبقى معا؛ كل شيء سينزلق؛ العلوية ستنزلق والسفليتان ستبقيان معا (لماذا ليس من الممكن أن تبقى الاثنتان العلويتان معا وتنزلق السفلية؟).

74. أي قانون حفظ سيعمل عندما يتصادم الصبيان (أثناء مدة محصورة من الاصطدام) —هل سنعتبر الاصطدام مرونيا تاما أم لا مرونيا (هل يمكن أن يفقد الزخم وأين؟ إذا كان لا مرونيا، أين ستذهب الطاقة؟) انظر إلى فكرة 58. بعد التصادم: التسارع المشترك بين الصبيين ثابت، بمعرفة السرعتين الابتدائية والنهائية سيصبح إيجاد المسافة مسألة علم حركة بسيطة.

75. أثبت أنه لخيط رأسي ستكون السرعة v عظمى (عبر تطبيق فكرة 44 لزاوية دوران القضيب وبرهن أن سرعته الزاوية ستكون صفرا في هذا الموقع؛ استخدم فكرة 61). حينها سيبقى فقط تطبيق حفظ الطاقة (تذكر أن $\omega = 0$). للتسارع a، لنقم باستخدام فكرة 44 ولنلاحظ أن التسارع الأفقي لمركز الكتلة يجب أن يكون صفرا (لا توجد هنالك أية قوى أفقية في هذه اللحظة). لاحظ أيضا أن الإحداثي الرأسي لمركز الكتلة هو المتوسط الحسابي لإحداثي نقطتي النهاية، $x_O = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$؛ وعبر أخذ المشتقة بالنسبة للزمن سنحصل على $\dot{x}_O = \frac{\dot{x}_A}{2}$ و$\ddot{x}_O \equiv a = \frac{\ddot{x}_A}{2}$ (لا تنس أن x_B ثابت). بالتالي، تسارع O يمكن إيجاده كنصف التسارع الرأسي لنهاية القضيب العلوية A؛ وهذه هي المركبة القطرية (أي المركزية) لتسارع نقطة A في حركتها الدائرية حول نقطة التعليق. ختاما، لقوة الشد T لدينا معادلة واحدة $\mathrm{T + N - mg = ma}$، لكننا نحتاج معادلة أخرى. للحصول عليها، سنحتاج أن نعتبر الحركة الزاوية للقضيب في إطار O. في تلك اللحظة، إطارنا الجديد يتحرك انتقاليا لليمين بسرعة v، وبتسارع للأعلى a. العزم بالنسبة لمركز الكتلة يأتي من T وN (قوتا الجاذبية والقصور ذراعهما صفر). إذن يمكننا ربط $T - N$ بالتسارع الزاوي للقضيب عبر قانون نيوتن الثاني للحركة الزاوية. للعثور على التسارع الزاوي، لنلاحظ أنه في إطار المختبر، سرعتا A وO متساويتان؛ بالفعل، كلا السرعتين أفقيتان (السرعة الرأسية

لـA صفر لأنها في أدنى نقطة في مسارها، و$\dot{x}_O = \frac{\dot{x}_A}{2}$)، وباستخدام فكرة *K-35* (إسقاطات السرعات في اتجاه القضيب يجب أن تكون متساوية) سنستنتج إن السرعات يجب أن تكون ثابتة. بالتالي، في الإطار المتحرك، سرعة النقطة A يجب أن تكون صفرا كما هو الحال مع تسارعها المركزي. وبالتالي، التسارع يجب أن يكون عموديا على القضيب، نحن نعرف المركبة الرأسية للتسارع 2a وباستخدام علم المثلثات يمكننا الحصول على مقداره. مع هذا التسارع، يمكننا إيجاد التسارع الزاوي للقضيب.

76. أوجد محور الدوران اللحظي (تأكد أن بعده عن مركز الكتلة هو $\frac{1}{2}$). أثبت أن مركز الكتلة يتحرك عبر دائرة متركزة حول حافة الجدار والأرضية، بينما أن الإحداثي القطبي لمركز الكتلة على هذه الدائرة هو نفس الزاوية φ بين الجدار والعصا. عبر عن الطاقة الحركية كدالة في المشتقة $\dot{\varphi}$ للمحور المعمم φ باستخدام نظرية المحاور المتوازية (ستينر) وعبر عن حفظ الطاقة كـ $\omega^2 = f(\varphi)$؛ باستخدام طريقة 6 سنحصل على $\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{1}{2}f'(\varphi)$ عندما تصل القوة العمودية من الجدار الصفر، سيكون تسارع مركز الكتلة رأسيا: عبر عن هذا الظرف باستخدام التسارعين المماسي والقطري لمركز الكتلة على مساره الدائري ($\frac{l}{2}\varepsilon$ و$\frac{l}{2}\omega^2$) واستخدمه كمعادلة لإيجاد φ.

77. بناء على فكرة 64 سنجد أن $\omega = 6v/l$. باستخدام باستخدام حفظ الطاقة والزخم سنتخلص من سرعة القرص بعد الاصطدام وسيمكننا التعبير عن نسبة الكتل.

78. القوى المتجه باتجاه العمودي على السطح هي قوى مرونية، ولهذا الطاقة في الاتجاه الرأسي محفوظة أثناء التصادم: بعد التصادم ستكون مركبة السرعة هي نفسها كالسابق. لإيجاد المجهولين الآخرين، السرعتان الأفقية والزاوية، سيمكننا الحصول على معادلة واحدة من فكرة 64. المعادلة الثانية ستظهر من (أ) شرط أن سرعة سطح الكرة صفر عند نقطة التلامس (لا انزلاق)؛ (ب) المعادلة الظاهرة من فكرة 60.

79. باستخدام فكرة 51 سنستكشف فترات الانزلاق والتدحرج. في الحالة الأخيرة ستكون أسرع طريقة لإيجاد الجواب هي استخدام طريقة 65.

80. السرعة يمكن إيجادها من قانوني حفظ الطاقة والزخم (لاحظ أن الطوق يتحرك انتقاليا). لإيجاد التسارع من المناسب استخدام الإطار مرجعي اللا قصوري للطوق، بحيث يكون من السهل إيجاد تسارع الطرد المركزي للجسم. شرط الاتزان القطري يعطي القوة العمودية بين الجسم والطوق (لا تنسى القوة القصورية!)؛ شرط الاتزان الأفقي للطوق يعطي معادلة لإيجاد التسارع.

81. لنفترض أن سرعة الجسم ثابتة تقريبا. لزمن ما t_l ستنزلق القاعدة لليسار بالنسبة للجسم كما أن الزخم المنقول بواسطة الاحتكاك في هذا الزمن سيكون باتجاه اليسار أيضا. أثناء الزمن المتبقي t_r ستنزلق القاعدة لليمين بالنسبة للجسم كما أن الزخم المنقول سيكون باتجاه اليمين أيضا. شرط الاتزان سيكون أن هذين الزخمين لهما نفس المقدار؛ بالتالي سنبحث عن قيمة الاتزان لـ t_l/t_r. من الرسم البياني سنجد السرعة التي تكون فيها النسبة عند القيمة المناسبة.

82.

83. في الإطار المرجعي للوح ستكون المسألة مكافئة لمسألة رقم 52.

84. اذهب إلى الإطار المرجعي المتسارع للعربة، حيث تكون الجاذبية الفعالة $\sqrt{a^2+g^2}$ بزاوية صغيرة مع الرأسي. الحمل سيتذبذب لكن سيسكن في النهاية إذا كان السلك رأسيا عند لحظة الوقوف وكانت سرعة الحمل صفرا. هذا من الممكن عندما يكون الموقع المرتبط عند الانحراف الأعظم أثناء التذبذب. بالتالي سعة التذبذب يجب أن تكون نفسها أثناء التسارع والتباطؤ، بحيث أنه حتى عندما يبدأ التباطؤ سيتوجب أن يكون السلك رأسيا. في هذه الحالة، كيف سيرتبط الزمن الدوري مع مدة التسارع؟

7 الأجوبة

.1 $arcsin\frac{R\mu}{(R+l)\sqrt{\mu^2+1}}$

.2 $\arcsin\frac{m}{m+M}\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$

.3 $mg/2$

.4 أ) $\frac{\mu mg}{\sqrt{\mu^2+1}}$؛ ب) $mgsin(arctan\mu-\alpha)$.

.5 $\mu \geq \frac{|gsin\alpha - acos\alpha|}{gcos\alpha+asin\alpha}$ إذا كان $g + a\,tan\alpha > 0$.

.6 أ) $\omega^2 R > g\sqrt{1+\mu^{-2}}$؛
ب) $\omega^2 R \geq g\sqrt{1+\mu^{-2}}$ إذا كان $\mu < cot\alpha$ و $\omega^2 R \geq g(cos\alpha + \mu^{-1}sin\alpha)$ إذا كان $\mu > cot\alpha$

.7 $v = 3\sqrt{gR}$

.8 $v/2$

.9 $tan2\alpha = h/a$

.10 $\mu_1 \geq \sqrt{l^2-h^2}/h$

.11 $3mg$

.12 $2arctan\left[\left(1+\frac{m}{M}\right)cot\alpha\right]$

.13 $\sqrt{2HL\mu+\mu^2H^2}-\mu H \approx \sqrt{2HL\mu}-\mu H \approx 7.2m$

.14 أ) $\omega^2 < g/l$؛ ب) $\omega^2 < (2-\sqrt{2})g/l$

.15 $\frac{1}{2}(1-3^{-\frac{1}{2}})\rho_v \approx 211kg/m^3$

.16 $\frac{\pi}{3}\rho R^3$

.17 $v/\sqrt{\mu^2cot^2\alpha-1}$

.18 $\frac{4}{3}\pi Gr^3\Delta\rho/g(r+h) \approx 0.95cm$

.19 $-\omega$

.20 $\mu mgv/\omega R$

.21 $cos\varphi tan\alpha < tan30^o$

.22 $L-\pi R/2cos\alpha$؛ $2\pi\sqrt{L/g}$

.23 $\frac{1}{12}mg, \frac{1}{3}mg, \frac{7}{12}mg$

.24 $mg/(2M+m)$

.25 $m < M\,cos2\alpha$

.26 $\frac{mgsin\alpha}{[M+2m(1-cos\alpha)]} = mgsin\alpha/[M+4msin^2\frac{\alpha}{2}]$

.27 $g\frac{(m_1sin\alpha_1-m_2sin\alpha_2)(m_1cos\alpha_1+m_2cos\alpha_2)}{(m_1+m_2+M)(m_1+m_2)-(m_1cos\alpha_1+m_2cos\alpha_2)}$

.28 $mg(5\sqrt{2}-4)/6$؛ في نفس الوقت.

29. $\cos\alpha \ge \frac{1}{3}(2 + v^2/gR)$
30. $2\frac{m}{M+m}\sqrt{2gR}$
31. $mMg/(m + 4M)$
32. $F_x = 2Ra\rho, F_y = (m + \rho L)g - \rho(L - \pi R - 2l)a$، حيث $a = \rho g(L - \pi R - 2l)/(m + \rho L)$.
33. الذي لم يتم دفعه.
34. إذا كان $F \le 2\mu mg\frac{m+M}{2m+M}$: $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}\frac{F}{M+m}$؛ خلاف هذا، ستكون $a_1 = \frac{F}{M} - \mu g\frac{m}{M}$، $a_2 = \mu g\frac{m}{2m+M}$.
35. على نصف دائرة.
36. (أ) $v/5$؛ (ب) $v/4$.
37. $n(n-1)/2$
38. $\sqrt{2\mu gL(1 + \frac{m}{M})}$
39. 3.5، كان قادما من أسفل اليمين.
40. $A: \sqrt{2gH}$، $B: \sqrt{gH}$.
41. $2R\mu\sqrt{gl\sin\alpha}$، $\sqrt{gl\sin\alpha}$.
42. $u - \mu\sqrt{2gh}$
43. $mg(h + \mu a)$
44. $\arctan\frac{2}{5} \approx 21.48^o$
45. (أ) $(3v - \omega l)/4$؛ (ب) $(v - \omega l)/2$
46. على بعد $2l/3$ من اليد الحاملة، حيث l هي طول المضرب.
47. $\frac{2}{3}\frac{F}{M}\frac{a}{R}$
48. $(v_{x0}, v_{y0} - \frac{5}{7}u)$
49. $L/v_o + \pi\sqrt{m/2k}$
50. $\frac{1}{2}\pi^2(n + \frac{1}{2})^2R\tan\alpha$
51. $1.03s$
52. $2.0g$
53. $v_1 = v_2 = v$؛ $\cot^2\frac{\alpha}{2}$
54. $\sqrt{gH}$
55. $5m/s$
56. (أ) $\tan\alpha \le 2\mu$؛ (ب) مستحيل
57. $g(1 - \frac{x}{l})\sin^{-1}\alpha$؛ $\frac{\pi}{2}\sqrt{l\sin\alpha/g}$
58. $\mu < \cot\alpha$
59. $\mu_1 < \tan\frac{\alpha}{2}$ و $\mu_2 < \tan\frac{\alpha}{2}$
60. $R > h/2$
61. $\sqrt[3]{3m/\pi\rho}$
62. $\omega^2R^2/2g$
63. $M/m = \frac{(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}$
64. $\frac{2mM}{M+m}g\tan\alpha$
65. $g/9$
66. $g\frac{m+M}{m+M\sin^2\alpha}\sin^2\alpha$
67. $2/3R$
68. $m[g - v^2(2l - x)/\sqrt{2}l^2]$
69. $\frac{M}{m} = 4, u = \sqrt{gl/8}$
70. الأولى تصل أولا.
71. خط مستقيم؛ إذا كانت $\omega \neq 0$.
72. $\sqrt{2gl(1 + m/M)}$
73. $\frac{F}{3m}$، إذا $\frac{F}{m\mu g} < 6$؛ $\frac{F}{4m} + \frac{1}{2}\mu g$، إذا $6 < \frac{F}{mg} < 10$؛ $3\mu g$، إذا $\frac{F}{m\mu g} > 10$
74. $m^2v^2/2(M^2 - m^2)\mu g$
75. $v = \sqrt{\left(l - \frac{H}{2}\right)g}$، $a = \frac{g}{2}(1 - \frac{H}{2l})$، $T = \frac{mg}{4}(3 - \frac{H}{2l} + \frac{l}{6H})$
76. $\arccos\frac{2}{3} \approx 48.12^o$
77. $M/m = 4$
78. (أ) $\omega = 5v_0/7R$، $v_x = 5v_0/7$، $v_y = \sqrt{2gh}$؛ (ب) $v_y = \sqrt{2gh}$، $v_x = v_0 - 2\mu v_y$.
79. $\frac{5}{7}g\sin\alpha$، إذا $\mu > \tan\alpha$، خلاف هذا $g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$
80. $\sqrt{\frac{2gr}{m+m}\frac{1+\cos\varphi}{m\sin^2\alpha+M}}m\cos\varphi$؛ $\frac{gm\sin2\varphi}{m\sin^2\varphi+M}\left[\frac{1}{2} + \frac{m^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)}{(m\sin^2\varphi+M)(m+M)}\right]$
81. $0.6m/s$
82. $\frac{4}{27}\mu v^2$
83. $v/\cos\alpha$
84. $n^{-2}Lg/4\pi^2l$، $n = 1,2,...$
85. (أ)؛(ب) $(p_1 - p_0)V/mc_s$
86. $\frac{1}{2}v_0$؛ كلا، جزء يذهب للتذبذبات الطولية للقضيب ثم (كما تموت الذبذبة) إلى حرارة