

Soojusmasinad, adiabaatilised protsessid ja adiabaatiline invariant

<u>SISSEJUHATUS</u>	2
<u>TERMODÜNAAMIKA I SEADUS</u>	2
<u>TERMODÜNAAMIKA II SEADUS</u>	2
<u>GAASI TÖÖ</u>	2
<u>PÖÖRATAVA PROTSessi DEFINITSIOON JA OMADUSED</u>	3
<u>RINGPROTSessi (EHK TSÜKLI) DEFINITSIOON JA OMADUSED</u>	3
<u>ERINEVATE SOOJUSMAHTUVUSTE SELGITUSED NING OMAVAHELINE SEOS</u>	3
<u>GAMMA TÄHENDUS</u>	5
<u>SOOJUSMASINAD</u>	5
<u>SOOJUSMASINA DEFINITSIOON</u>	5
<u>SOOJUSMASINA KASUTEGUR</u>	6
<u>SOOJUSMASINA PÖÖRATUD TSÜKKEL NING SELLE KASUTEGUR</u>	6
<u>ADIABAATILISED PROTSessID</u>	7
<u>ADIABAATILISE PROTSessi DEFINITSIOON</u>	7
<u>ADIABAATILINE INVARIANT</u>	7
<u>CARNOT` TSÜKKEL</u>	8

Sissejuhatus

Termodünaamika I seadus

Süsteemile antud soojushulga ning süsteemi poolt tehtav töö on võrdne antud süsteemi siseenergia muuduga.

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta A \quad \text{diferentsiaalide kujul } dU = dQ + dA$$

ΔU – süsteemi siseenergia muut

ΔQ – süsteemile antud soojushulk

ΔA – süsteemi poolt tehtav töö

Termodünaamika II seadus

Formuleeritakse mitmel erineval viisil:

- 1) Pole võimalik niisugune protsess, mille ainus lõpptulemus oleks soojuse üleminek külmemalt kehalt soojemale.
- 2) On võimatu niisugune protsess, mille ainus lõpptulemus oleks soojuse võtmine mingilt kehalt ning selle täielik muundamine tööks.
Esmapilgul võib näida, et ideaalse gaasi isotermline paisumine on antud sõnastusega vastuolus. Tõepoolest, kogu soojus, mis ideaalsele gaasile antakse, muundub selles protsessis tööks. Kuid soojuse saamine ja selle tööks muundamine ei ole protsessi ainus tulemus, sest protsessi vältel muutub ka gaasi ruumala. Ehk siis osa võetud soojusest läheb gaasi ruumala muutmiseks, kogu saadud soojus ei muundu kasulikuks tööks.
- 3) on võimatu ehitada teist liiki perpetuum mobile't s.o. niisugust perioodiliselt töötavat mootorit, mis muundaks mingist reservuaarist võetava soojuse täielikult tööks.

Gaasi töö

Leiame gaasi poolt paisumisel tehtava töö suuruse lihtsa juhu jaoks, kui ideaalse gaasi poolt hõivatava ruumiosa muutumine toimub vaid ühes suunas (antud juhul võetud selleks suunaks x , ülejäänud kaks suunda on antud juhul muutmatud):

$$dA = F_x \cdot dx = p \cdot S \cdot dx = p \cdot dV \Rightarrow A = \int p \cdot dV$$

Sarnase valemi saab koostada ka ülejäänud kahe suuna jaoks, mis kõik kokku annavad üldise valemi ideaalse gaasi poolt paisumisel tehtava töö jaoks.

$$A = \int p \cdot dV$$

Pööratava protsessi definitsioon ja omadused

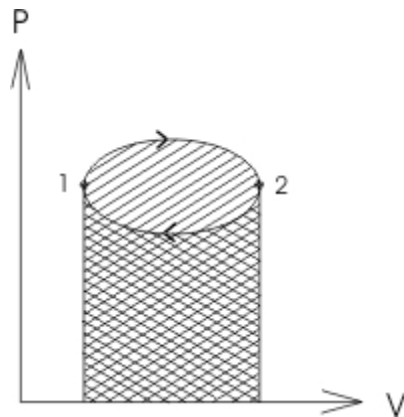
Pööratavaks protsessiks nimetatakse niisugust protsessi, mida saab teostada vastupidises suunas, nii et süsteem läbib kõik samad olekud mis pärisuunas, ainult vastupidises järjekorras. Pööratav saab olla ainult tasakaaluline protsess.

Pöörataval protsessil on ilmne järgmine omadus: kui pärispidise protsessi korral saab süsteem mingil elementaarlõigul dQ soojust ja sooritab töö dA , siis vastupidise protsessi käigus peab süsteem ära andma soojust $dQ' = dQ$ ning teda mõjutavad välisjõud peavad tegema tööd $dA' = dA$. Nii ei tohi pööratava protsessi järel jääda mingeid jälgi süsteemi ümbritsevatesse kehasse.

Ringprotsessi (ehk tsükli) definitsioon ja omadused

Ringprotsessiks ehk tsüklikuks nimetatakse protsessi, mille puhul süsteem pöördub pärast muutusi tagasi oma lähteolekusse.

Graafikul kujutab tsükli kinnine kõver.



Ringprotsessis sooritatud töö on arvuliselt võrdne kinnise kõvera poolt piiratud pindalaga. Lõigul 1 – 2 tehtud töö on positiivne ning arvuliselt võrdne paremale kallutatud viirutusega märgitud pindalaga (vaadeldakse kellaosuti suunas toimuvat tsükli). Lõigul 2 – 1 tehtud töö on negatiivne ning arvuliselt võrdne pindalaga, mida märgib vasakule kallutatud viirutus. Järelikult on tsükli töö arvuliselt võrdne kõvera piiratud pindalaga ning positiivne pärispidise, s.o. kellaosuti suunas toimuva tsükli puhul ja negatiivne vastupidise tsükli korral.

Pärast tsükli pöördub süsteem tagasi algolekusse, seepärast on iga olekufunktsiooni, sealhulgas ka siseenergia väärtused tsükli alguses ja lõpus ühesugused.

Erinevate soojusmahtuvuste selgitused ning omavaheline seos

Soojusmahtuvus näitab, palju energiat tuleb gaasile anda, et tema temperatuuri ühe kraadi võrra tõsta. Mitte ajada segi erisoojusega c , mis näitab, palju energiat on vaja, et **1mooli** antud aine/materjali/keha temperatuuri tõsta ühe kraadi võrra. Soojusmahtuvus sõltub vaadeldava aine kogusest.

C_p - aine soojusmahtuvus konstantsel rõhul

C_v - aine soojusmahtuvus konstantsel ruumalal

Vedelike ja tahkiste puhul on soojenemisel ruumala muutumine väga väike, mistõttu nende jaoks $C_p \approx C_v$

Kuid gaasi soojenemisel konstantsel ruumalal muutub ruumala tuntavalt, mistõttu tehakse gaasi paisumisel märgatav hulk tööd.

Tuletame seose C_p ja C_v vahel.

Q_v - süsteemile antud soojushulk, kui gaas on konstantsel ruumalal

Q_p - süsteemile antud soojushulk, kui gaas on konstantsel rõhul

ΔU – süsteemi siseenergia muut

ΔT – gaasi temperatuuri muut

Kui soojus lisatakse gaasile konstantsel ruumalal, siis paisumistööd ei teha.

Seetõttu võrdub lisatava soojuse hulk gaasi siseenergia muuduga (termodünaamika esimesest seadusest). Seega

$$\Delta U = Q_v$$

Soojusmahtuvuse definitsioonist.

$$Q_v = C_v \cdot \Delta T$$

Järelikult

$$\Delta U = C_v \cdot \Delta T$$

Kui ΔT läheneb nullile, siis

$$dU = C_v \cdot dT \Rightarrow C_v = \frac{dU}{dT} \quad (1)$$

mis tähendab, et soojusmahtuvus konstantsel ruumalal on võrdne siseenergia muutumiskiirusega temperatuuri muutmisel (tuletis temperatuuri järgi).

Nüüd leiame $C_p - C_v$ ideaalse gaasi jaoks

Soojusmahtuvuse definitsioonist

$$Q_p = C_p \cdot \Delta T$$

Termodünaamika esimesest seadusest

$$\Delta U = Q_p + \Delta A = Q_p - p \cdot \Delta V$$

$$(A = \int p \cdot dV = p \cdot V, \text{ sest } p \text{ ei sõltu } V\text{-st, } p \text{ on konstantne})$$

Seega

$$\Delta U = C_p \cdot \Delta T - p \cdot \Delta V$$

Kasutades seost (1) ning viies ΔT lõpmata väikseks, saame

$$C_v \cdot dT = C_p \cdot dT - p \cdot dV \quad (2)$$

Rõhk, ruumala ning temperatuur on ideaalse gaasi puhul seotud valemiga

$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, kus n on moolide arv ning R on universaalne gaasikonstant. $R = 8,31 \frac{J}{K \cdot mol}$

Diferentseerides antud võrrandit, saame

$$p \cdot dV + V \cdot dp = n \cdot R \cdot dT$$

Kuna antud juhul on rõhk konstantne, siis on dp võrdne nulliga, järelikult

$$p \cdot dV = n \cdot R \cdot dT$$

Kasutades antud seost, saame valmist (2)

$$C_v \cdot dT = C_p \cdot dT - n \cdot R \cdot dT = (C_p - n \cdot R) \cdot dT \Rightarrow C_v = C_p - n \cdot R$$

Järelikult on C_p ja C_v omavahel seotud valemiga

$$C_p = C_v + n \cdot R \quad (3)$$

antud valemist on ka näha, et soojusmahtuvus on alati konstantsel rõhul suurem, kui konstantsel ruumalal.

Gamma tähendus

Termodünaamika valemities esineb tihtipeale suhe $\frac{C_p}{C_v}$, mistõttu on seda hakatud tähistama lühidalt γ (gamma) tähega.

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

Antud suhe avaldub ka süsteemi vabadusastmete kaudu

Vabadusaste on muutuja, mis kirjeldab vaadeldava keha liikumist(kineetilist energiat) või sõltumatu muutuja, nagu rõhk, temperatuur või koostis, mis kirjeldab antud süsteemi.

Näide: süsteemil, mis koosneb ruumis liikuvast punktist, on kolm vabadusastet, sest on vaja kolme koordinaati, et määrata punkti asukoht.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} \quad (4)$$

kus i on süsteemi vabadusastmete arv

Soojusmasinad

Soojusmasina definitsioon

Perioodiliselt tegutsevat mootorit, mis teeb tööd väljastpoolt saadava soojuse arvelt, nimetatakse soojusmasinaks.

Soojusmasinas olev aine(vesi, õhk jne) saab soojust kõrgema temperatuuriga reservuaarist, teeb kasulikku tööd ning annab tagasi algolekusse minnes soojust välja.

Näide:

Aurumasin:

Tänapäeval elektri jaamades kasutatavates aurumasinates soojendatakse vedelas olekus vesi mitmesaja atmosfääri suuruse rõhu all, kuni see umbes 500°C juures aurustub. Paisumisel surub veeaur vastu turbiini labasid, tehes tööd ning väljub siis palju madalamal temperatuuril. Seejärel jahutatakse veeauru veelgi (võetakse soojust ära), millega viiakse ta tagasi algolekusse. Kondenseerunud vesi pumbatakse tagasi boilerisse ning tsükkel algab jälle otsast peale.

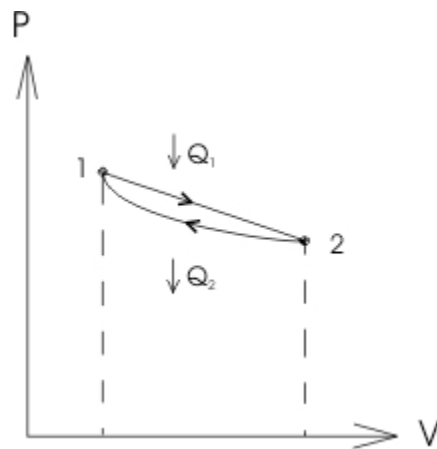
Soojusmasina kasutegur

Soojusmasina kasutegur η on defineeritud kui tsüklis tehtud töö A ja tsüklis saadud soojushulga Q_1 suhe

$$\eta = \frac{A}{Q_1}$$

Kasuteguri definitsioonist on selge, et tema väärtus ei saa olla üle ühe.

Analoogne graafik ringprotsessi graafikuga:



Graafikult:

Kuna tegu ringprotsessiga, siis: sooritatud töö on arvuliselt võrdne kinnise kõvera poolt piiratud pindalaga.

$A = Q_1 - Q_2$, kus Q_1 on saadud soojushulk ning Q_2 on ruumala vähenemisel gaasilt võetud soojus.

Seega või kasuteguri avaldise kirjutada kujul

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Soojusmasina pööratud tsükkel ning selle kasutegur

Kui pöörata antud graafikul kujutatud tsükkel ümber, saame külmutusmasina tsükli. Niisugune masin võtab tsükli kestel kehalt temperatuuriga T_2 soojushulga Q_2 ning annab kehale temperatuuriga $T_1 > T_2$ soojushulga Q_1 . Ehk siis soojushulk võetakse külmemalt

kehalt ning antakse soojemale kehale ning külmemalt kehalt võetav soojushulk on väiksem, kui soojemale kehale antav soojushulk. Soojushulkade vahe on võrdne masina poolt tehtud tööga, mis antud juhul seega negatiivne. Seetõttu on tsükli kestel vaja teha tööd A (väljastpoolt, sest masina enda töö negatiivne, kompenseerimaks seda negatiivsust), et masin töötaks. Külmutusmasina efektiivsust iseloomustatakse kasuteguriga, mis on defineeritud kui jahutavalt kehalt võetud soojushulga Q_2 ja masina käivitamiseks tehtava töö A suhe (ehk siis kasuliku osa suhe tõesse, mis vaja väljastpoolt teha, et masin tööle saada):

$$\text{kasutegur} = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

Adiabaatilised protsessid

Adiabaatilise protsessi definitsioon

Adiabaatiliseks nimetatakse protsessi, mille puhul ei toimu soojusvahetust ümbritseva keskkonnaga.

Adiabaatiline invariant

Leiame võrrandi, mis seob ideaalse gaasi parameetreid adiabaatilises protsessis. Asendame termodünaamika esimese printsiibi võrrandis ($dU = dQ + dA$) dQ avaldisega ideaalse gaasi jaoks.

$$\begin{aligned} dQ &= n \cdot C_v \cdot dT \\ \Rightarrow dU &= n \cdot C_v \cdot dT + p \cdot dV \end{aligned}$$

Kuna adiabaatilise protsessi puhul energiavahetust väliskeskkonnaga ei ole, siis on siseenergia muut võrdne nulliga (kogu temperatuuri muutusest tulenev energia võrdub kogu tööga tehtud ruumala muutumisel) ehk siis $dU = 0$

Järelikult

$$n \cdot C_v \cdot dT + p \cdot dV = 0$$

Nüüd avaldame rõhu p ideaalse gaasi olekuvõrrandist ruumala V ja temperatuuri T kaudu:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

ning teeme asenduse eelmisesse valemisse

$$C_v \cdot dT + \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV = 0$$

teisendame avaldise kujule:

$$\frac{dT}{T} + \frac{n \cdot R}{C_v} \cdot \frac{dV}{V} = 0$$

kuna kehtib seos $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$ (tuletis naturaallogaritmist, tuletis liitfunktsioonist), võib antud võrrandi kirjutada nii:

$$d(\ln T) + d\left(\frac{n \cdot R}{C_V} \cdot \ln V\right) = 0 \Rightarrow d\left(\ln T + \frac{n \cdot R}{C_V} \cdot \ln V\right) = 0$$

Kuna tuletis on null vaid siis, kui tuletist võetav on konstant, siis

$$\ln T + \frac{n \cdot R}{C_V} \cdot \ln V = \text{const.} \quad (5)$$

Ideaalse gaasi puhul $C_p = C_v + n \cdot R$ ning $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$

Millest avaldades suhte $\frac{n \cdot R}{C_V}$, saame $\frac{n \cdot R}{C_V} = \gamma - 1$

Teinud võrrandisse (5) asenduse ning võtnud antilogaritmi, saame võrrandi:

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const.}$$

Saadud avaldis kujutab endast ideaalse gaasi adiabaadi võrrandit parameetrite T ja V kaudu. Antud võrrandilt on võimalik üle minna parameetritele p ja V, asendades temperatuuri T ideaalse gaasi olekuvõrrandist rõhu p ja ruumala V kaudu:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R}$$

tehes asenduse ning arvestades, et n ja R on konstandid, saame

$$p \cdot V^\gamma = \text{const.}$$

Kõikide arutluste puhul eeldasime, et gaasi olekut igal ajahetkel iseloomustavad parameetrite p ja T kindlad väärtused, teiste sõnadega, vaadeldav adiabaatiline protsess on tasakaaluline. Nagu teame, saab tasakaaluline olla ainult niisugune protsess, mis kulgeb lõpmata aeglaselt. Kuna soojust absoluutselt mittejuhtivaid aineid looduses ei leidu, siis on soojushulk, mida süsteem vahetab ümbruskonnaga, seda väiksem, mida kiiremini kulgeb protsess. Seega saavad adiabaatilistele lähedased olla ainult kiiresti kulgevad protsessid. Niisuguse protsessi näiteks võiks tuua kokkusurumise ja paisumise, mis toimub gaasi igas punktis helilaine levimisel. Vaatamata sellele, et suure ruumala ulatuses pole gaasi olek sel juhul üldsegi tasakaaluline (p ja T on eri punktides erinevad), kirjeldab adiabaadi võrrand gaasi käitumist küllalt väikeses ruumiosas täiesti rahuldavalt.

Carnot` tsükkel

Carnot` tsükkel on üks olulisemaid adiabaatiliste protsesside rakendusi.

Termodünaamika teise seaduse järgi on võimatu, et soojusmasin, mis töötab kahe soojusreservuaari vahel, oleks 100% efektiivne. Kuid mis on siis maksimaalseks soojusmasina efektiivsuseks? Vastuse sellele küsimusele leidis Prantsuse insener Sadi Carnot (veel enne, kui termodünaamika I ja II seadus formuleeriti): kõige efektiivsem soojusmasin, mis töötab **kahe** reservuaari vahel, on pööratav soojusmasin (soojusmasin pööratava tsükliga). Antud soojusmasin töötsükli hakati nimetama Carnot` tsükliks (tsükkel, mille sooritab pööratava tsükliga soojusmasin, mis töötab kahe reservuaari vahel).

Protsess on pööratav, kui:

- 1) mehaaniline energia ei muundu soojusenergiaks (hõõrdumise, viskoossuse vms tõttu)
- 2) soojusvahetus saab toimuda vaid sama temperatuuriga kehade vahel (rangemalt võttes peab soojust saava keha temperatuur olema lõpmata väikese suuruse võrra madalam reservuaari temperatuurist, vastasel juhul ei läheks soojus üle reservuaarilt kehale. Soojuse reservuaarile andmisel peab aga keha temperatuur olema lõpmata väikese suuruse võrra kõrgem reservuaari temperatuurist) kui temperatuurid oleksid erinevad, oleks soojuse ülekanne võimalik vaid ühte pidi (soojemalt külmemale) ning protsess poleks pööratav. Järelikult on soojusvahetus keha ja reservuaari vahel isotermiline protsess.
- 3) Protsess on tasakaaluline. Kui protsess poleks tasakaaluline, liiguks see alati vaid stabiilsema seisuga poole ning mitte kunagi ebastabiilsema poole ehk protsess oleks pööratu.

Kuna hõõrdejõudu ning muid sarnaseid jõude ei saa kunagi täielikult vältida, siis on pööratav saavutatav vaid teoreetiliselt. Kuid praktika näitab, et pööratavat protsessi on siiski võimalik ligilähedaselt saavutada (kaod väga väikesed).

Uurime kahe reservuaari vahel toimuvat Carnot` tsükli

Kuna kogu soojusülekanne peab olema isotermiline, et protsess oleks pöörduv, siis soojuse ülekande soojemast reservuaarist peab toimuma isotermiliselt.

Järgmine samm on adiabaatiline paisumine madalama temperatuuriga reservuaari temperatuurini (kogu temperatuuri vähenemisest tulenev energia läheb paisumistööks ehk väliskeskkonnaga soojusvahetust pole – adiabaatiline protsess). Järgmiseks on isotermiline soojusülekanne külmemale reservuaarile. Viimase sammuna on adiabaatiline kokkusurumine kõrgema temperatuuriga reservuaari temperatuurini.

Seega koosneb Carnot` tsükkel järgnevatest tasakaalulistest sammudest:

- 1) isotermiline soojusülekanne soojemast reservuaarist
- 2) adiabaatiline paisumine madalama temperatuuriga reservuaari temperatuurini
- 3) isotermiline soojusülekanne külmemale reservuaarile
- 4) adiabaatiline kokkusurumine madalama temperatuuriga reservuaari temperatuurini

Kuna Carnot` tsükliga soojusmasin on kõige kõrgema efektiivsusega antud kahe reservuaari vahel töötavatest soojusmasinatest, siis järelikult on kõik Carnot` tsükliga soojusmasinad, mis antud kahe reservuaari vahel töötavad, täpselt sama efektiivsusega (sama maksimaalne efektiivsus).

Carnot` tsükli kasutegur leitakse samamoodi, kui teistegi soojusmasinate kasutegur:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \text{kus } Q_1 \text{ on soojemalt reservuaarilt võetud soojus ning } Q_2 \text{ on külmemale reservuaarile antud soojus.}$$

Carnot` tsükli kasutegurit on võimalik ideaalse gaasi puhul avaldada ka reservuaaride temperatuuride kaudu

Kujutame Carnot' tsükli T-S teljestikus, kus T on gaasi temperatuur ning S tema entroopia.

Entroopia on suurus, mis näitab süsteemi korrapäratust.

Süsteemi entroopia muutus dS , minnes ühest seisundist teise, on defineeritud järgnevalt:

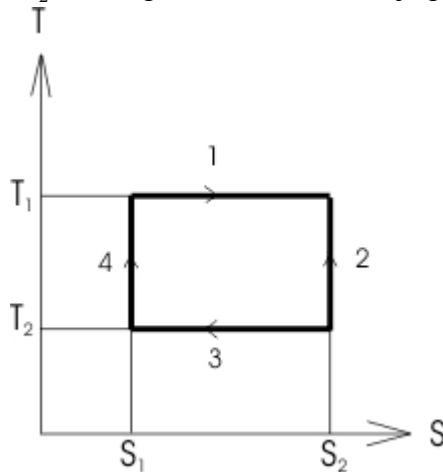
$$dS = \frac{dQ}{T}$$

järelikult

$$dQ = T \cdot dS \Rightarrow Q = \int T \cdot dS$$

ehk siis T-S teljestikus on Q graafiku alla jääva pindalaga võrdne definitsioonist järeldub ka seos, et kui $dQ=0$, siis ka $dS=0$

Olgu soojema reservuaari temperatuur T_1 ning jahedama reservuaari temperatuur T_2 ning S_1 ja S_2 entroopiad vastavalt enne ja peale gaasi ruumala suurenemist.



Graafikult:

$$Q_1 = (S_2 - S_1) \cdot T_1$$

$$Q_2 = (S_2 - S_1) \cdot T_2$$

Järelikult:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{(S_2 - S_1) \cdot T_1 - (S_2 - S_1) \cdot T_2}{(S_2 - S_1) \cdot T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Seega Carnot' tsükli kasutegur avaldub

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Järelikult sõltub Carnot' tsükli kasutegur ideaalse gaasi puhul ainult reservuaaride temperatuuridest. Kuna samade reservuaaride puhul kõik Carnot' tsükliga soojusmasinad sama efektiivsusega, määrab antud avaldis nende kahe reservuaari jaoks iga pööratava masina kasuteguri (kõigil sama maksimaalne kasutegur).