

PROBLEMAS DE TERMODINÁMICA

Jaán Kalda

Traducción al español de la versión 0.87 por Roberto Marín
Versión: 14 de noviembre de 2019

1. INTRODUCCIÓN

Esta guía sigue la estructura de la guía de estudio “Mecánica”. Algunos conceptos termodinámicos son intrínsecamente bastante complejos, sin embargo, comprender todos los detalles de esa complejidad no es necesario para una resolución satisfactoria de los problemas de la Olimpiada. Debido a eso, esta guía se divide en dos categorías: (a) temas básicos, cuyo aprendizaje es suficiente para resolver la mayoría de los problemas de la Olimpiada y (b) un material avanzado, cuyo objetivo principal es profundizar la comprensión de orígenes de la termodinámica y se da en un párrafo de letra pequeña o se traslada a los apéndices.

La termodinámica difiere de las otras ramas de la física en que sus leyes son estadísticas y, por lo tanto, no son absolutamente estrictas: son válidas solo con una cierta precisión y cierta probabilidad. Para los sistemas macroscópicos, estas leyes estadísticas se basan en el promedio de muchos átomos y moléculas; debido a eso, las fluctuaciones estadísticas relativas de las cantidades promedio son muy pequeñas, por lo que la precisión de las leyes estadísticas es muy alta.

Esta declaración también se puede establecer matemáticamente. La estadística nos enseña que, si el valor de una determinada cantidad aleatoria se obtiene de forma independiente N veces, la desviación estándar del valor promedio respectivo (promediado sobre estas N repeticiones) es \sqrt{N} veces menor que la desviación estándar de una sola medición. Por ejemplo, la raíz media cuadrática (rms) de las velocidades de N moléculas (v_{rms}) tiene una desviación estándar δv_{rms} que es \sqrt{N} veces más pequeña que el de una sola molécula, δv . Esta última tiene el mismo orden de magnitud de la velocidad rms, $\delta v \sim v_{\text{rms}}$. Por lo tanto, la magnitud relativa de las fluctuaciones de la velocidad eficaz de N moléculas puede estimarse como $\delta v_{\text{rms}}/v_{\text{rms}} \sim 1/\sqrt{N}$. Para tener una idea sobre los valores numéricos típicos, consideremos un gas dentro de un volumen de un centímetro cúbico. En condiciones normales, un lunar ocupa un volumen de 22,4 litros y un centímetro cúbico contiene $N \approx 6 \times 10^{23} \frac{1}{22400} \approx 3 \times 10^{19}$ moléculas, por lo tanto, las fluctuaciones estadísticas relativas de las cantidades termodinámicas son del orden de $1/\sqrt{N} \approx 5 \times 10^{-9}$, es decir, realmente insignificante.

En el marco de la física de secundaria y para la mayoría de los problemas de la Olimpiada, la naturaleza estadística de la termodinámica permanece inadvertida, porque las fórmulas de la termodinámica y la cinética molecular se pueden aplicar exactamente de la misma manera que todas las otras fórmulas físicas.

2. CALOR Y TEMPERATURA

Definición 1: El calor es la energía del movimiento térmico de un sistema.

Tenga en cuenta que el término “movimiento térmico” significa un movimiento aleatorio de las partículas microscópicas que forman los cuerpos (átomos y moléculas). Estas partículas son

tan pequeñas y se mueven tan rápido que, por lo general, el movimiento térmico no se puede ver directamente.

Dado que la energía general de cualquier sistema cerrado se conserva, la siguiente conclusión se puede extraer directamente de esta definición (formulada como un “hecho”).

Hecho 1: Se conserva la energía total (térmica + mecánica, etc.) de un sistema cerrado:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W,$$

donde ΔU es el cambio de la energía interna (térmica), ΔQ es la cantidad de calor dada al sistema y

$$\Delta W = P\Delta V$$

es el trabajo mecánico realizado por el sistema mientras se expande; P representa la presión en el límite externo del sistema y ΔV denota el cambio del volumen del sistema.

Esta fórmula (la ley de conservación de energía termodinámica) se conoce como la **primera ley de la termodinámica** (1LTD). Los tres términos de esta ley son cantidades en las que hay que tener en cuenta los signos: si el sistema emite algo de calor, entonces $\Delta Q < 0$; si el volumen se contrae, el trabajo realizado por el sistema es negativo, $\Delta W < 0$ (en vez de W , también se puede usar el trabajo realizado por fuerzas externas ΔW_e en ese caso $\Delta W_e = -\Delta W$).

La expresión para el trabajo aquí supone que los cambios relativos de las propiedades del sistema son pequeños, de modo que la presión P puede considerarse constante; por lo tanto, sería más correcto sustituir el símbolo Δ (que normalmente se utilizan para designar un cambio finito) por diferenciales o para escribir

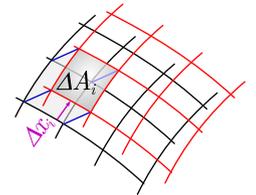
$$W = \int P dV.$$

Esta fórmula implica que el trabajo se puede encontrar como el área bajo el gráfico $P(V)$ y se puede derivar de la siguiente manera. Consideremos una pequeña superficie ΔA_i de la interfaz que separa el sistema en estudio del resto del espacio y denotemos con Δx_i esa componente de su desplazamiento que es perpendicular al elemento de superficie ΔA_i ; podemos considerar un intervalo de tiempo tan corto que el desplazamiento Δx_i sigue siendo tan pequeño como sea necesario. La fuerza de presión que actúa sobre el elemento de superficie $\Delta F_i = P\Delta A_i$ y su trabajo $\Delta W_i = \Delta F_i\Delta x_i = P\Delta V_i$, donde $\Delta V_i = \Delta A_i\Delta x_i$ es el aumento del volumen del sistema debajo del elemento de superficie ΔA_i . Para encontrar el trabajo total, necesitamos sumar toda la interfaz,

$$\Delta W = \sum_i P\Delta V_i = P\sum_i \Delta V_i = P\Delta V.$$

Para un incremento de volumen infinitesimal dV , se reescribe como $dW = P dV$ y se puede integrar en todo el proceso para producir $W = \int P dV$.

Para poder resolver problemas, también necesitamos el concepto de temperatura, que es intuitivamente claro para todos, pero cuya definición correcta es bastante complicada. Los termómetros clásicos (no digitales) miden la temperatura utilizando la expansión térmica de los líquidos: líquido caliente ocupa más espacio que uno más frío. Sin embargo, esto no puede usarse como una buena definición de temperatura: diferentes líquidos se expanden a una velocidad diferente y, lo más importante, este enfoque sería aplicable solo a temperaturas moderadas (a



altas temperaturas, todo el material estaría en estado de plasma y a temperaturas cercanas al cero absoluto, las pocas sustancias que permanecerían en estado líquido experimentarían transiciones de fase).

Sabemos que, si la temperatura exterior es baja, sentimos frío: nuestro cuerpo emite algo de calor y, según la definición 1, la energía cinética de las moléculas de nuestro cuerpo disminuye. Inversamente, si la temperatura es alta, sentimos calor: nuestro cuerpo no puede emitir tanto calor como se produce a través de procesos fisiológicos y la energía cinética de las moléculas de nuestro cuerpo comienza a aumentar. Por lo tanto, podemos comenzar con una definición cualitativa de la temperatura:

Definición 2: La temperatura es una cantidad que caracteriza la dirección del intercambio de calor entre dos cuerpos, los cuales han alcanzado un equilibrio térmico: cuando se pone en contacto, el calor fluye desde un cuerpo con una temperatura más alta al cuerpo con una temperatura más baja (temperaturas iguales corresponden a un flujo de calor nulo).

Esta definición es utilizable (no contradictoria) solo si tenemos la siguiente propiedad. Considere un conjunto arbitrario de tres cuerpos. A , B y C ; supongamos que cuando A y B se ponen en contacto, el calor fluye desde A a B y, cuando B y C se ponen en contacto, el calor fluye desde B a C . Entonces podemos estar seguros de que cuando A y C entrará en contacto, el calor fluirá desde A a C . Las observaciones experimentales confirman esta propiedad (por lo que podemos usar la definición 2) y en realidad incluso una propiedad más genérica que se conoce como la *segunda ley de la termodinámica* (2LTD):

Hecho 2: Cualesquiera que sean los trucos utilizados (motores de calor, demonios de Maxwell, etc.), si no se realiza un trabajo externo, el calor puede fluir solo de un cuerpo de temperatura más alta a un cuerpo de temperatura más baja (es decir, la dirección del flujo de calor no se puede revertir como en comparación con lo que se observa en el caso de un contacto directo de dos cuerpos).

Dentro de la teoría de la *termodinámica clásica*, 2LTD es un postulado a partir de datos experimentales; dentro de la *termodinámica estadística*, los métodos estadísticos se usan para demostrar que para procesos que involucren cuerpos macroscópicos (es decir, hechos de una gran cantidad de moléculas), los resultados que violen 2LTD tendrán probabilidades insignificantes (la prueba es matemáticamente complicada y no se proporcionará aquí).

Tenga en cuenta que las energías térmicas de dos cuerpos de igual temperatura no son necesariamente iguales; sin embargo, para un cuerpo estático, la energía térmica es una función monótonamente creciente de su temperatura¹.

Ahora tenemos una definición cualitativa de temperatura, pero aún nos falta una cuantitativa. Para muchos problemas es suficiente conocer y comprender el simplificado y clásico:

Definición 3: La temperatura es una medida de un cuerpo en (cuasi)equilibrio térmico: si dos cuerpos de diferentes temperaturas se ponen en contacto, el calor fluye del cuerpo de temperatura más alta al de temperatura más baja. Para un

cuerpo dado, la temperatura es una función monótonamente creciente de su energía térmica interna. La escala de temperatura de Kelvin se define de modo que la energía térmica cero corresponda a $T = 0$ K, el hielo se derrite a presión atmosférica a 273,15 K y el agua hierve a 373,15 K.

Esta definición es claramente insuficiente para diseñar termómetros adecuados para temperaturas muy bajas. Además de esta definición, también está la de Kelvin, que se discutirá en la sección 5. La mejor y más genérica definición se basa en el enfoque estadístico de la termodinámica (en cuyo caso la 2LTD se deriva de las leyes de estadística); consideremos esto con más detalles. La mecánica cuántica nos dice que un cuerpo (un conjunto de partículas que están unidas por fuerzas en una región finita del espacio) se caracteriza por un conjunto contable de sus estados estacionarios, los estados donde la energía total tiene un valor bien definido. Para la *termodinámica estadística*, debemos considerar dos cuerpos: uno pequeño (o de tamaño moderado) y uno grande, que se supone que está en contacto térmico con el pequeño, es decir, los dos cuerpos pueden intercambiar energía. Por ejemplo, el cuerpo pequeño puede ser un solo átomo de un gas monoatómico y el depósito de calor puede ser el resto del gas. El grande se conoce como el *foco calórico* y es necesario para garantizar que cuando el cuerpo pequeño obtenga o ceda debido a fluctuaciones aleatorias parte de su energía térmica, la temperatura se mantendrá constante. Por lo tanto, debe ser mucho más grande (tener una capacidad calorífica mucho mayor) que el cuerpo que analizamos.

Considere que los niveles de energía de los estados del cuerpo se denoten por E_i (por ejemplo para un solo átomo casi libre, $E_i = p_i^2/2m$, donde p_i es el momento del átomo en su i -ésimo estado).

Hecho 3: Se puede demostrar usando estadística (ver apéndice 1) que las probabilidades del cuerpo de estar en el i -ésimo o en el j -ésimo estado satisfacen la ley de Boltzmann:

$$\frac{p_i}{p_j} = e^{-\beta(E_i - E_j)}.$$

La constante β depende (y describe) el estado del depósito de calor, es decir, la temperatura; es fácil ver que valores pequeños de β corresponden a energías medias superiores del cuerpo. Por lo tanto, la temperatura del depósito puede definirse como

$$\tilde{T} = 1/k\beta = \frac{E_i - E_j}{k \ln(p_j/p_i)},$$

donde k es una constante que podría elegirse libremente, pero se considera igual a $k_B \approx 1,38 \times 10^{-23}$ J/K para garantizar un acuerdo con la definición 3.

En resumen, la ley de Boltzmann

$$p \propto e^{-E/k_B T}$$

sirve como la definición de temperatura que coincide con la escala de temperatura de Kelvin; aquí \propto denota proporcionalidad y E es la energía del sistema. La única diferencia con la escala de Kelvin es que, con la definición estadística de temperatura, uno también puede tener temperaturas negativas, suponiendo que el cuerpo y el depósito de calor tengan un número finito de estados cuánticos y que la energía neta del depósito sea tan alta que los estados de energía altos son más probables que los bajos.

¹Esto se puede demostrar usando la 2LTD y una construcción que involucra ciclos de Carnot (motores térmicos ideales).

Definición 4: Cada cuerpo se caracteriza por su capacidad térmica (o calorífica) C que muestra cuánto calor se necesita para elevar la temperatura en un grado: $C = dQ/dT$.

Tenga en cuenta que esta definición, cuando se escribe para incrementos finitos como $C = \Delta Q/\Delta T$, asume que no hay transiciones de fase (como fusión o ebullición) dentro del rango de temperatura considerado, porque las transiciones de fase incurrir en absorción o liberación de calor adicional.

Definición 5: Para llevar una sustancia de una fase a otra (típicamente de fase sólida a líquida o de fase líquida a fase gaseosa), se necesita dar cierta cantidad de calor a la sustancia, que es proporcional a la masa m de la sustancia: $Q = \lambda m$. El factor λ se denomina *calor latente* (por ejemplo, calor latente de evaporación o calor latente de fusión).

Típicamente, para incrementos moderados de temperatura cerca de la temperatura ambiente, se puede suponer que la capacidad calorífica es constante; en ese caso, podemos escribir $\Delta Q = C\Delta T$. En el caso de incrementos de temperatura mayores, esto ya no es válido y se necesita integración: $\Delta Q = \int C dT$.

Hecho 4: A bajas temperaturas, la capacidad térmica de los materiales de cristal es proporcional a la temperatura al cubo, $C \propto T^3$.

Si el cuerpo que se calienta se expande, el calor suministrado se convierte parcialmente en trabajo mecánico. Por lo tanto, la capacidad calorífica depende de las condiciones bajo las cuales se mantiene el cuerpo; muy a menudo, se usa la capacidad calorífica a volumen constante C_V y la capacidad calorífica a presión constante C_P .

Hecho 5: Si un cuerpo se calienta a un volumen constante, no se realiza ningún trabajo de expansión, de modo que de acuerdo con el 1LTD, C_V puede usarse para encontrar el cambio de la **energía interna** del movimiento térmico de las moléculas: $dU = C_V dT$ y

$$U = \int_0^T C_V(T') dT'$$

Esta integración hace uso del hecho de que en $T = 0\text{K}$, no hay movimiento térmico de las moléculas y, por lo tanto, la energía interna es cero. En particular, para materiales cristalinos a bajas temperaturas cuando $C = AT^3$ la integración resulta en $U = \frac{A}{4}T^4$.

En el caso de líquidos y cristales, el cambio de volumen es típicamente pequeño, de modo que el trabajo de expansión es insignificamente pequeño y $C_P \approx C_V$; sin embargo, esto no es válido para gases, en cuyo caso $C_P = C_V + R$ (esto se discutirá más adelante con más detalles).

Pr 1. [IPhO-1996] Una pieza de metal aislada térmicamente se calienta bajo presión atmosférica por una corriente eléctrica de manera que recibe energía eléctrica a una potencia constante \mathcal{P} . Esto conduce a un aumento de la temperatura absoluta T del metal con el tiempo t de la siguiente manera:

$$T(t) = T_0[1 + a(t - t_0)]^{1/4}$$

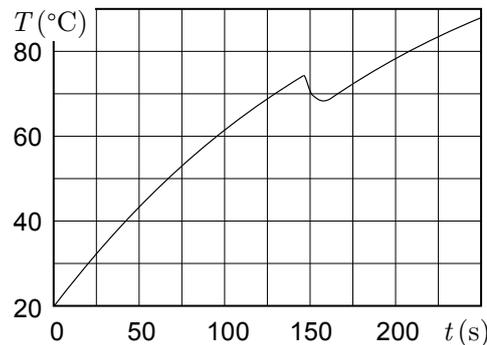
Aquí a , t_0 y T_0 son constantes. Determine la capacidad calorífica $C_P(T)$ del metal (dependiente de la temperatura en el rango de temperatura del experimento).

La solución de este problema es bastante sencilla: es suficiente aplicar la definición 4 y hacer algunas manipulaciones matemáticas para eliminar el tiempo t . Todavía podemos intentar formular una “idea” apropiada de la siguiente manera.

Idea 1: La temperatura de un cuerpo T y la potencia neta de calentamiento \mathcal{P} están relacionados por la igualdad $\mathcal{P} \equiv \frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt}$. Por lo tanto, la tangente a la curva $T(t)$ es proporcional a la potencia neta e inversamente proporcional a la capacidad calorífica; se pueden resolver muchos problemas utilizando esta observación.

En el caso del problema 1, esta idea debe usarse algebraicamente. En esos casos cuando se da una dependencia $T(t)$ en forma de gráfico, nos dice que mientras la capacidad calorífica de un cuerpo permanezca aproximadamente constante, podemos encontrar cuántas veces cambia la potencia neta de calentamiento determinando las pendientes de la tangente en dos puntos diferentes del gráfico $T(t)$. Esto se ilustra con el siguiente problema.

Pr 2. [EstPhO-2004] El agua se calienta en una tetera eléctrica. En cierto momento, un trozo de hielo a temperatura $T_0 = 0^\circ\text{C}$ fue puesto en la tetera. La figura muestra la dependencia de la temperatura del agua en función del tiempo. ¿Cuál era la masa del hielo si la potencia de calentamiento de la tetera era $\mathcal{P} = 1\text{kW}$? El calor latente de fusión del hielo $L = 335\text{kJ/kg}$, la capacidad calorífica del agua $c = 4,2\text{kJ/kg} \cdot \text{K}$. La temperatura ambiente $T_1 = 20^\circ\text{C}$.



En el caso de este problema, también podemos formular un hecho y una idea bastante simple.

Hecho 6: La tasa de intercambio de calor (es decir, la *potencia de transmisión*, medido en vatios) entre un cuerpo y el medio ambiente es una función de las temperaturas del cuerpo y del medio ambiente, T_1 y T_2 , respectivamente; **para una pequeña diferencia de temperatura $\Delta T \equiv T_1 - T_2$, el flujo de calor es proporcional a ΔT** ; esto se conoce como la ley de Fourier. Para diferencias de temperatura mayores, la dependencia se vuelve no lineal, porque (a) la conductividad térmica de los materiales puede depender de la temperatura, (b) el flujo de calor debido a la radiación de calor es una función no lineal de T_1 y T_2 (sin embargo, se puede linealizar para valores pequeños de ΔT); (c) grandes diferencias de temperatura pueden causar convección de aire y fluidos, lo que mejorará el flujo de calor de forma no lineal. ¡Tenga en cuenta que el flujo de calor se hace cero para $T_1 = T_2$!

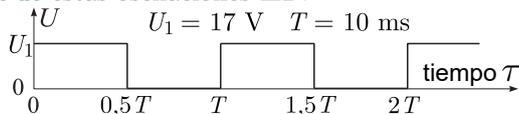
Idea 2: La tasa de intercambio de calor de un cuerpo con el medio ambiente es una función de las temperaturas; por lo tan-

to, para procesos durante los cuales el cambio de temperatura permanece pequeño, se puede suponer que la tasa de intercambio de calor es constante. En particular, si un cuerpo ha alcanzado un equilibrio térmico mientras se calienta con una potencia \mathcal{P}_0 , ha alcanzado una temperatura T_0 por el cual la potencia de pérdida de calor es exactamente igual a \mathcal{P}_0 : $\mathcal{P}_{\text{perdido}}(T_0) = \mathcal{P}_0$; por lo tanto, si el calentador se apaga repentinamente, la potencia de enfriamiento inicial del cuerpo (debido a la pérdida de calor al medio ambiente) es \mathcal{P}_0 .

Volviendo al problema 2, el gráfico nos permite determinar cuánto tiempo de retraso τ en el proceso de calentamiento ha sido causado por el trozo de hielo: este es el tiempo necesario para derretir y calentar el agua de deshielo hasta la temperatura actual del agua. El valor del tiempo de calentamiento de hielo τ nos permitiría determinar la masa de hielo de la 1LTD si la potencia neta de calentamiento (\mathcal{P} menos la pérdida de energía para el medio ambiente) es conocida. La potencia neta promedio recibida por la tetera durante ese período cuando el hielo se está derritiendo y el agua de deshielo que se está calentando puede determinarse a partir del gráfico utilizando las ideas 2 y 1.

El caso particular mencionado al final de la idea 2 se ilustra con el siguiente problema.

Pr 3. [EstPhO-2001] El filamento de una lámpara halógena tiene longitud $l = 5,0 \text{ cm}$ y está hecho de tungsteno. A la temperatura nominal de la lámpara $T_0 = 3200 \text{ }^\circ\text{C}$, la densidad del tungsteno es $\rho = 18\,200 \text{ kg/m}^3$, el calor específico $c = 235 \text{ J/(K} \cdot \text{kg)}$ y la resistividad $\rho_{\text{el}} = 9,95 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$. Cuando se aplica un voltaje de forma de onda rectangular como se muestra en el gráfico a las terminales de la lámpara, la temperatura del filamento alcanzará el valor nominal T_0 (estrictamente hablando, esta es la temperatura promedio; las regiones interiores del filamento son ligeramente más calientes). Sin embargo, debido a las oscilaciones de voltaje, hay pequeñas oscilaciones de la temperatura del filamento; encuentre la amplitud de estas oscilaciones ΔT .



El siguiente problema ilustra el uso de la dependencia lineal mencionada en el hecho 6.

Pr 4. Una pequeña casa está siendo calentada por un calentador eléctrico de potencia $\mathcal{P} = 1 \text{ kW}$ que mantiene la temperatura interior $t_1 = 19 \text{ }^\circ\text{C}$; la temperatura exterior $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$. Una persona ingresa a la casa, donde la temperatura ambiente comienza a aumentar y alcanza un nuevo valor $t_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Encuentre la “potencia de calentamiento” de la persona.

Aquí la tarea de descubrir que la ley de Fourier se puede usar (porque la diferencia de temperatura es mucho menor que las temperaturas en Kelvins) se deja a quienes resuelven el problema. Tenga en cuenta que, para algunos problemas poco formulados, se supone que la ley de Fourier se usa incluso cuando su aplicabilidad es realmente cuestionable (por ejemplo, para temperaturas $T_1 = 273 \text{ K}$ y $T_2 = 373 \text{ K}$).

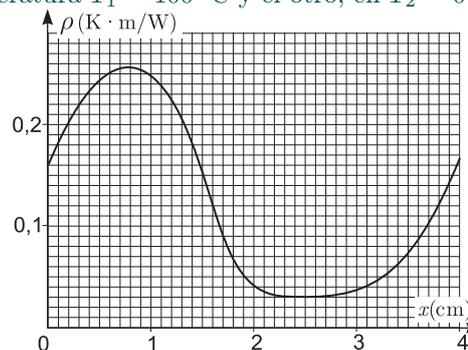
Idea 3: Los problemas en la tasa de intercambio de calor son

análogos a los problemas en los circuitos eléctricos. Existen los siguientes pares de cantidades análogas: las temperaturas corresponden a voltajes, energía térmica a una carga, potencia a corrientes, una resistencia térmica (coeficiente de proporcionalidad entre la potencia calorífica y ΔT , ver idea 6) a una resistencia eléctrica, capacidad calorífica a la capacitancia eléctrica. Ambas leyes de Kirchhoff siguen siendo válidas para los procesos de intercambio de calor: mientras que la contrapartida de la ley de voltaje es bastante inútil debido a la trivialidad (a lo largo de un circuito cerrado, la suma de los incrementos de temperatura es cero), la contrapartida de la ley de nodos es útil y puede ser referida como la continuidad de los flujos térmicos: si los cuerpos de un sistema han alcanzado temperaturas estacionarias, para cada cuerpo, la suma de las potencias de calor que ingresan o salen es igual a cero.

Pr 5. [EstFin-2003] La resistividad térmica es una característica de un material y se define como el coeficiente de proporcionalidad entre el gradiente de temperatura $\frac{dT}{dx}$ el flujo de calor (aquí asumimos que el flujo de calor es paralelo al eje x). Tenga en cuenta que la unidad del flujo de calor es W/m^2 , por lo tanto, la unidad de resistividad térmica es $\text{K} \cdot \text{m/W}$.

(i) Un microprocesador de disipación de energía $\mathcal{P} = 90 \text{ W}$ se enfría con una corriente de agua; el contacto térmico entre el procesador y el agua se establece a través de una placa de cobre de espesor $d = 5 \text{ mm}$ y área $s = 100 \text{ mm}^2$. Determine la diferencia de temperatura entre el microprocesador y el agua que fluye. Resistividad térmica del cobre $\rho = 2,6 \text{ mm} \cdot \text{K/W}$.

(ii) Un cable está hecho de diferentes aleaciones, de modo que su resistividad térmica depende de la coordenada a lo largo del cable como se muestra en la figura. El área de la sección transversal del cable $S = 1 \text{ mm}^2$ y longitud $l = 4 \text{ cm}$. Encuentre la potencia a través del cable si un extremo del cable se mantiene a la temperatura $T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ y el otro, en $T_2 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$.



La segunda mitad de este problema hace uso de un método bastante genérico

Idea 4: El cálculo de muchas cantidades físicas se puede reducir (a veces no de manera obvia) al cálculo de las áreas de superficie bajo un gráfico (es decir, a una integral).

Más específicamente, si un sistema describe por un parámetro x (que puede ser tiempo, coordenadas, velocidad, etc.) y una cantidad A puede expresarse como $A = \sum_i F_i \Delta x$, donde Δx es un pequeño intervalo del parámetro x , la suma se toma en todos los pequeños intervalos y F_i es una función de x (pero no en función de A) entonces en el límite $\Delta x \rightarrow 0$ podemos escribir $W = \int F(x) dx$, es decir W es el área debajo del gráfico $F(x)$.

Para ilustrar este método, consideremos el siguiente problema mecánico. Para un barco en el agua, la fuerza de fricción se da en función de la velocidad. $F(v)$, representado en un gráfico (tiene un cruce de una función lineal a pequeñas velocidades a una parábola para grandes velocidades). Se le pide que encuentre, qué tan lejos viajará un bote de una masa dada m y velocidad inicial v asintóticamente (es decir, al esperar mucho tiempo). Dividamos el desplazamiento en pedazos pequeños, $s = \sum \Delta s$, donde $\Delta s = v dt$. Si la función $v(t)$ es conocida, la última fórmula habría completado nuestra tarea. Sin embargo, la fuerza nos es dada en función de v , por lo tanto, necesitamos sustituir Δt con Δv . La fuerza está directamente relacionada con la aceleración, $a(v) = \frac{dv}{dt} = F(v)/m$, lo que nos da una pista de que deberíamos intentar sustituir Δt mediante Δv mientras introduce la aceleración:

$$\Delta t = \Delta v \frac{\Delta t}{\Delta v} = \frac{\Delta v}{\Delta v / \Delta t} = \frac{\Delta v}{a}.$$

Este resultado nos sirve perfectamente bien:

$$s = \sum v \Delta t = \sum \frac{v}{a} \Delta v = \sum v m F(v) \Delta v \rightarrow \int \frac{vm}{F(v)} dv,$$

es decir, el desplazamiento es igual al área debajo de un gráfico que representa $\frac{vm}{F(v)}$ como función de v .

El siguiente problema también hace uso de la continuidad del flujo de calor; sin embargo, también requiere el conocimiento de la ley Stefan-Boltzmann para la radiación de calor.

Hecho 7: Para los cuerpos “grises” (que absorben una fracción constante de la radiación electromagnética incidente, independientemente de su longitud de onda), el flujo de radiación de calor (es decir, energía radiada por unidad de área) $I = \varepsilon \sigma T^4$, donde T es la temperatura del cuerpo; $\varepsilon \in [0, 1]$, el factor de absorción y $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ la constante de Stefan-Boltzmann.

El factor ε muestra, qué fracción de la luz incidente es absorbida; para una superficie perfectamente negra $\varepsilon = 1$; para una superficie perfectamente blanca $\varepsilon = 0$. Esta fórmula se deriva de la suposición de que el cuerpo radiante está en equilibrio térmico con las ondas electromagnéticas en el vacío adyacente; se requiere un conocimiento de la mecánica cuántica y la aplicación de la distribución de Boltzmann, así como ciertas habilidades matemáticas.

Pr 6. [IPhO-1992] Un satélite representa una esfera homogénea de diámetro $D = 1 \text{ m}$; puede suponer que todas las partes del satélite tienen la misma temperatura. El satélite orbita alrededor de la Tierra (pero no está a la sombra). El Sol puede considerarse un cuerpo absolutamente negro con la temperatura de la superficie $T_{\odot} = 6000 \text{ K}$, el radio del Sol $R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$, el radio orbital de la Tierra alrededor del Sol $L = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$. Encuentre la temperatura del satélite asumiendo que está cubierto con una pintura perfectamente gris (el factor de absorción es independiente de la longitud de onda de la radiación electromagnética). Puede despreciar la radiación de la Tierra.

Para este problema, se debe utilizar el siguiente hecho (aquellos que tienen “miedo” de la integral de la superficie pueden saltar al párrafo siguiente del hecho).

Hecho 8: En un estado estacionario, la ley de Gauss es válida para los flujos de calor (esto es completamente análogo al teorema de Gauss para los campos eléctrico y magnético): $\oint \vec{I} \cdot d\vec{A} = \mathcal{P}$, donde la integral se toma sobre una superficie

cerrada, \mathcal{P} es la potencia calorífica liberada dentro de la superficie, el vector de flujo de calor (intensidad) \vec{I} es paralelo a la dirección de propagación de la energía térmica, el vector $d\vec{A}$ es paralelo a la superficie normal y es igual en módulo al área de un elemento de superficie pequeño (infinitesimal).

Esta es la formulación matemática de la continuidad del flujo de calor. En el caso de una geometría esféricamente simétrica (con una fuente de calor esférica isotrópica), la integral de superficie se simplifica al producto del flujo de calor con el área de una esfera:

$$4\pi R^2 I = \mathcal{P},$$

donde $I = I(R)$ es la densidad del flujo de calor a la distancia R desde el centro de la fuente de calor.

El siguiente problema completa el tema de la continuidad del flujo de calor.

Pr 7. [IPhO-1996] La superficie caliente perfectamente negra se mantiene a una temperatura constante T_h . Hay otra superficie fría perfectamente negra que es paralela a la primera y se mantiene a una temperatura constante T_l ; hay un vacío en el espacio entre las placas. Para reducir el flujo de calor entre las placas, se utiliza una pantalla, que está hecha de N placas paralelas perfectamente aisladas térmicamente negras (en la figura, $N = 2$). Dicha pantalla se coloca entre las placas calientes y frías, paralelas a ellas. ¿Por qué factor x se reducirá el flujo de calor una vez que se alcance un equilibrio térmico? Los efectos de borde causados por el tamaño finito de las placas pueden ser despreciados.



Este problema nos lleva a un sistema de N ecuaciones lineales. En general, resolver dicho sistema de ecuaciones no es una tarea fácil; sin embargo, este sistema en particular se puede resolver fácilmente. No debería sorprendernos, porque los cálculos matemáticos largos no son compatibles con el formato de las Olimpiadas de física; podemos formular una recomendación apropiada, como una idea “no física”.

Idea 5: Como regla general, los problemas de las Olimpiadas de física no requieren largos cálculos matemáticos. Si obtiene un sistema de ecuaciones largo o difícil, lo más probable es que una de las siguientes opciones sea válida: (a) ha seguido un método de resolución no óptimo (es decir, más complicado de lo necesario); (b) el método es bueno y el sistema de ecuaciones solo es aparentemente complejo, por ejemplo, casi todas las incógnitas se pueden eliminar simultáneamente utilizando las simetrías de las ecuaciones.

Pr 8. [EstOpen-2014] Considere un cubo negro que está hecho de un material perfectamente conductor del calor. Un rayo de luz paralelo con intensidad $I (\text{W}/\text{m}^2)$ se direcciona a este cubo. La temperatura de equilibrio T del cubo depende de su orientación; encuentre los valores mínimos y máximos de T ($T_{\text{mín}}$ y $T_{\text{máx}}$, respectivamente).

Este problema es físicamente bastante sencillo, pero la solución completa (rigurosa) requiere habilidades matemáticas en

el campo del cálculo vectorial.

Idea 6: En el caso de un campo vectorial homogéneo $\vec{F}(x, y, z) \equiv \vec{F}_0$, el flujo $\Phi = \int_A \vec{F} \cdot d\vec{A}$ a través de una superficie (posiblemente curva) A se puede encontrar como el producto escalar de cierto elemento efectivo de superficie plana $\vec{A}_{\text{ef}} = \int_A d\vec{A}$, $\Phi = \vec{A}_{\text{ef}} \cdot \vec{F}_0$.

3. GASES

En física estadística (termodinámica), es relativamente fácil (es decir, difícil, pero en muchos casos aún posible) hacer cálculos si todo es muy regular, por ejemplo, en el caso de los sólidos cristalinos. Es aún más fácil hacer cálculos cuando todo es caótico, por ejemplo, en el caso de gases y plasmas, porque entonces se pueden promediar las cantidades físicas. Los más difíciles de analizar son los medios donde el orden y el desorden existen juntos, como fluidos, medios granulares, sólidos, transición de fase cercana, etc. Debido a eso, la física de secundaria se ocupa solo del caso caótico, con gases.

Un buen modelo que describe bastante bien la realidad es el *modelo de gases ideales*.

Definición 6: Un gas ideal está formado por moléculas de tamaño insignificante (en comparación con las distancias intermoleculares promedio) que se comportan como pelotas elásticas (gas monoatómico) o sistemas de pelotas-resorte (gas poliatómico) y se mueven chocando aleatoriamente entre sí y con las paredes del contenedor. Se supone que no hay otras fuerzas entre las moléculas que las fuerzas de contacto (por ejemplo, las interacciones electrostáticas deben ser insignificantes ya que las fuerzas electrostáticas actúan a distancia).

Consideremos n como la densidad numérica de las moléculas (número por unidad de volumen) y $f(v_x)$, su función de distribución sobre v_x (la componente en x de la velocidad), definida para que $\Delta n = n f(v_x) \Delta v_x$ nos de la densidad numérica de tales moléculas para las cuales la componente en x de la velocidad se encuentre dentro del intervalo $[v_x, v_x + \Delta v_x]$ (aquí, Δv_x denota un pequeño incremento de velocidad). Según la distribución de Boltzmann, $f(v_x) = A e^{-mv_x^2/2kT}$ (que en esta forma se conoce como la distribución de Maxwell)², donde el factor A es tal que el área debajo del gráfico $f(v_x)$ es unitario, es decir $A = 1 / \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x$.

La integral en la última expresión se puede resolver usando dos técnicas. La primera (y la más simple) técnica es cambiar la variable de integración sustituyendo $x = v_x/v_T$, donde $v_T = \sqrt{2kT/m}$, esto nos permite deshacernos del parámetro v_T en el integrando. De hecho, v_T es constante (independiente de la variable de integración), $dv_x = v_T dx$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x = v_T \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Un segundo truco (que no discutimos aquí) debe aplicarse para demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, resultando en

$$f(v_x) = e^{-mv_x^2/2kT} / v_T \sqrt{\pi}.$$

²Estrictamente hablando, la distribución de Boltzmann es válida para la ocupación promedio de un estado cuántico; aquí hacemos uso del hecho de que para una pelota elástica en una caja, los niveles cuánticos se distribuyen uniformemente sobre los valores de v_x .

³Hablando estrictamente, para una sola colisión, la velocidad de salida es aleatoria y depende de la velocidad momentánea de la molécula de esa pared con la que choca. Sin embargo, cuando se promedia sobre muchas colisiones y se supone que el gas y la pared tienen temperaturas iguales, la velocidad de salida promedio es como si hubiera una colisión elástica con una pared plana.

Hecho 9: La distribución de la velocidad de las moléculas en un gas está dada por la distribución de Maxwell,

$$dN = \frac{N}{v_T \sqrt{\pi}} e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x \quad v_T = \sqrt{2kT/m},$$

donde N es el número total de moléculas y v_x es la componente en x de la velocidad de las moléculas. En el caso isotrópico tridimensional, también se puede escribir para la velocidad,

$$dN = \frac{4N}{v_T^3 \sqrt{\pi}} v^2 e^{-v^2/v_T^2} dv.$$

Para derivar la última ecuación, asumimos un movimiento no correlacionado en las direcciones x , y y z para que las distribuciones individuales se puedan multiplicar: $dN = \left(\frac{N}{v_T \sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/v_T^2} dv_x dv_y dv_z$, e integrado sobre una capa esférica en el espacio $v_x - v_y - v_z$, $\int dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$.

Encontremos una expresión para la presión. Hacemos esto en dos partes: primero hacemos cálculos asumiendo que todas las moléculas se acercan a la pared con la misma velocidad u (considere el eje x sea perpendicular a la pared; entonces u es la componente en x de la velocidad de la molécula) y luego generalizamos el resultado al caso realista de diferentes velocidades. La presión se define como la fuerza por unidad de área, $P = F/A$; la fuerza se encuentra como el momento dado a la pared por unidad de tiempo, $F = 2Nmu/t$, donde N es el número de moléculas que chocan con la pared durante un período de tiempo t . El coeficiente dos refleja el hecho de que la velocidad promedio con la que las moléculas salen de la pared después de la colisión es igual a la velocidad de acercamiento³, por lo tanto, cada molécula recibe un momento $2mu$ de la pared. Durante el período de tiempo t , solo esas moléculas alcanzarán la pared que está dentro de la capa de espesor cercana a la pared ut y avanzar hacia la pared. Por lo tanto, el número total de colisiones se encuentra como el número de moléculas dentro de la capa de volumen $V = Aut$, reducido por un factor de dos (solo la mitad de las moléculas se mueven en la dirección de la pared): $N = \frac{1}{2}nV \approx Aut$. Por lo tanto, la fuerza ejercida sobre la pared se encuentra como $F = 2muN/t = nm u^2 A$. Ahora, recordemos que, en realidad, las moléculas pueden tener diferentes velocidades, por lo que debemos promediar el resultado, $F = nm \langle u^2 \rangle A$, donde los paréntesis angulares denotan el promedio. Finalmente, la presión $P = F/A$ se encuentra como

$$P = nm \langle u^2 \rangle.$$

Entonces, la presión se expresa en términos del cuadrado medio de la componente en x de la velocidad. Esta expresión también se puede reescribir en términos de la velocidad neta promedio $\langle v^2 \rangle$ como $P = \frac{1}{3}nm \langle v^2 \rangle$. En efecto, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ (donde $v_x \equiv u$) y por lo tanto, $\langle v^2 \rangle = 3 \langle u^2 \rangle$ (hemos tenido en cuenta que debido a la isotropía estadística, en promedio, todas las direcciones de propagación de las moléculas son equivalentes, por lo tanto $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$).

Usando la distribución de Maxwell, uno puede expresar los valores promedio en términos de integrales: $\langle v_x^2 \rangle = \int v_x^2 f(v_x) dv_x$. Esta integral se puede evaluar (ver apéndice 2), resultando en $\langle v_x^2 \rangle = kT/m$, es decir, la energía cinética pro-

medio relacionada con el movimiento a lo largo del eje x

$$\frac{m}{2} \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} kT.$$

Usando esta expresión obtenemos

$$P = nm \langle u^2 \rangle = nkT.$$

Una vez que sustituimos $n = N/V = \frac{m}{\mu} N_A/V$ (N_A es el número de Avogadro, μ es la masa molar del gas, m es la masa total del gas y V es su volumen), obtenemos $PV = \frac{m}{\mu} N_A kT = \frac{m}{\mu} RT$, donde $R = kN_A$ se llama la *constante del gas ideal*. Esta ley se conoce como *la ley del gas ideal*; a veces es conveniente expresarlo en términos de densidad de gas ρ como $P\mu = \rho RT$. Resumamos nuestros resultados.

Hecho 10: El estado del gas ideal está descrito por la ley

$$PV = \nu RT,$$

que también se puede expresar como

$$P = nkT \quad \text{o} \quad P\mu = \rho RT.$$

Método 1: Se pueden hacer varios problemas de estimación relacionados con los gases de la misma manera que derivamos la ley de los gases ideales, es decir, utilizando el *enfoque cinético molecular*.

Los cálculos exactos requieren a menudo integración (promediar usando la distribución de Maxwell). Sin embargo, en el caso de los problemas de la Olimpiada, generalmente es suficiente para hacer solo estimaciones y no hay necesidad de usar la distribución de Maxwell. Esto se debe a dos razones: (a) resolver integrales complejas no prueba el conocimiento de la física, (b) en muchos casos, incluso los cálculos aparentemente exactos son exactos solo para la llamada *aproximación de vacío* cuando la trayectoria libre media (la distancia recorrida por una molécula entre dos colisiones posteriores con otras moléculas es mucho más grande que las dimensiones características del sistema) y solo se aproxima de otra manera.

Pr 9. En el vacío y la ingravidez, en el fondo de un recipiente cilíndrico (una copa), hay una capa de sustancia sólida de masa molar μ . Esta sustancia se sublima lentamente (se evapora de la fase sólida a la fase gaseosa) y empuja el recipiente hacia la dirección opuesta. Estime la velocidad terminal del recipiente. La masa del recipiente M y la masa inicial de la sustancia $m \ll M$; la temperatura del recipiente es T ; se puede suponer que el proceso es isotérmico (el enfriamiento debido a la evaporación y la radiación de calor sigue siendo insignificante). El área de la sección transversal del recipiente es A .

Pr 10. El uranio natural consta principalmente de dos isótopos, ^{238}U y ^{235}U , siendo la concentración relativa de este último es 0,7%. El uranio se “enriquece” (es decir, la concentración de ^{235}U se aumenta) mediante la implementación de un proceso de múltiples etapas, donde en cada etapa, un compuesto químico evaporado del uranio natural UF_6 se conduce a través de una pared porosa. Se puede considerar que la pared porosa es una película delgada que tiene agujeros microscópicos (el tamaño de los agujeros es más pequeño que el camino libre medio de las moléculas, pero más grande que la dimensión de las moléculas) ¿Cuántas etapas se necesitan para aumentar el contenido de ^{235}U a un 1,4%? La masa molar de flúor (F) es 19 g/mol.

Pr 11. [PhysCup-2012] Determine o estime el flujo de calor I entre dos placas paralelas a distancia L una de la otra, que están a temperaturas T_1 y T_2 , respectivamente. El espacio entre las placas se llena con un gas monoatómico de densidad molar n y de masa molar M . Puede usar las siguientes aproximaciones: (i) la densidad del gas es tan baja que el camino libre medio $\lambda \gg L$; (ii) $T_1 \gg T_2$; (iii) cuando las moléculas de gas rebotan en las placas, obtienen la temperatura de las placas respectivas (por ejemplo, esto sucederá si son absorbidas/unidas por las moléculas de la placa por un corto periodo de tiempo y luego se liberan nuevamente en el espacio entre las placas); (iv) puede despreciar la radiación del cuerpo negro.

Tenga en cuenta que “estimación” significa que el factor numérico de su expresión no necesita ser exacto.

La energía interna U de un gas monomolecular (es decir, la energía cinética neta de las moléculas) se puede expresar en términos de temperatura utilizando el resultado obtenido anteriormente $m\overline{v_x^2} = kT$. De hecho, un solo átomo no puede girar debido a sus pequeñas dimensiones⁴. Por lo tanto, U se encuentra como el producto de la energía de una sola molécula con el número de moléculas N ,

$$U = N \frac{m}{2} (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}).$$

Debido a la isotropía estadística $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = kT$; substituyendo $N = \nu N_A$ (donde ν representa el número de moles) y $N_A k = R$ obtenemos

$$U = \frac{3}{2} \nu RT.$$

En el caso de las moléculas diatómicas y poliatómicas, las moléculas obedecen también a la energía rotacional. $U_r = \frac{1}{2} N (I_x \overline{\omega_x^2} + I_y \overline{\omega_y^2} + I_z \overline{\omega_z^2})$, donde I_x , I_y y I_z denotan momentos de inercia con respecto a diferentes ejes y ω_x , ω_y y ω_z las respectivas velocidades angulares. Usando la distribución de Boltzmann para el movimiento de rotación alrededor del eje x , $p \propto e^{-I_x \omega_x^2 / 2kT}$, obtenemos una expresión que es muy similar a la que teníamos para el movimiento traslacional (sólo que v_x es substituido por ω_x y m con I_x). Por eso, el resultado también es el mismo, $U_r = \frac{3}{2} \nu RT$. Sin embargo, uno debe tener en cuenta que si tenemos una molécula diatómica (o una molécula lineal poliatómica, como el CO_2), no podrá girar alrededor del eje que pasa a través de sus átomos (que sea el eje z). Por lo tanto, la rotación tendrá lugar solo alrededor del eje x y y ; la energía rotacional se reduce respectivamente: $U_r = \nu RT$.

Observemos que cada uno de los llamados *grados de libertad* (movimiento de traslación a lo largo del eje x , rotación alrededor del eje x , movimiento traslacional a lo largo del eje y , etc.) contribuyen a la energía interna general en la misma cantidad $\frac{1}{2} \nu RT$ ($\frac{1}{2} kT$ si hablamos de la energía promedio de una sola molécula). Debido a eso, la energía interna de un gas se expresa convenientemente en términos del número de *grados de libertad* i como

$$U = \frac{i}{2} \nu RT.$$

Para un gas monoatómico $i = 3$, para un gas diatómico (y un gas poliatómico lineal) $i = 5$; para todos los demás casos $i = 6$.

⁴Las razones son cuánticas y hasta cierto punto se discutirán más adelante.

En el caso de una mezcla de gases (como el aire), el número efectivo de grados de libertad puede llegar a ser fraccional.

Usando la última expresión, podemos derivar fácilmente una expresión para la energía interna de un gas en volumen constante. Si el volumen permanece constante, no se realiza ningún trabajo mecánico ($W = \int P dV = 0$), por lo tanto, todo el calor dado al gas se destina al aumento de la energía interna, $C_V = dU/dT = \frac{i}{2}\nu R$. Se obtiene una expresión particularmente simple para la capacidad calorífica molar, $c_V = C_V/\nu$:

$$c_V = \frac{i}{2}R.$$

Si estamos tratando con un proceso isobárico (a una presión constante), entonces el cambio de energía interna puede calcularse, por supuesto, utilizando el resultado anterior, pero de acuerdo con el 1LTD, parte del calor va al trabajo realizado por el gas, $\Delta W = P\Delta V = \nu R\Delta T$. Por lo tanto, el calor dado al gas $\Delta Q = \Delta U + \Delta W = \frac{i+2}{2}\nu R\Delta T$, es decir, la capacidad calorífica molar para procesos isobáricos

$$c_P = \frac{i+2}{2}R.$$

La regla “ $\frac{1}{2}kT$ por cada grado de libertad” es válida, sin embargo, solo para temperaturas moderadas. Cuando la temperatura es lo suficientemente grande, las moléculas comenzarán a oscilar de manera similar a las pelotas que están conectadas con resortes y también debe incluirse la energía de oscilación. En ese caso, se puede decir que los *grados de libertad oscilatorios están excitados*. Para las moléculas de un gas relativamente ligero, como los componentes del aire, la temperatura crítica a la que se excitan las oscilaciones está muy por encima de la temperatura ambiente. Mientras tanto, las moléculas de gases pesados (por ejemplo, Br_2) ya oscilan a temperatura ambiente. Cabe destacar que la regla $\frac{1}{2}kT$ *no es válida* para los grados oscilatorios de libertad. Parece que **cada grado de libertad oscilatorio excitado contribuye a un kT** a la energía térmica de una molécula. Por lo tanto, cada grado de libertad oscilatorio aumenta el *número efectivo de grados de libertad* en 2, por ejemplo, para $i = 5 + 2 = 7$ para Br_2 a temperatura ambiente.

La razón por la cual los grados de libertad oscilatorios contribuyen el doble que los grados de libertad traslacionales y rotacionales radica en la estructura de los niveles de energía cuántica. Para energía traslacional y rotacional, el nivel de energía es una función cuadrática del número de orden de nivel n , $E_n = h^2n^2/8L^2m$; aquí, L representa la longitud de la caja donde se coloca nuestra partícula. Mientras tanto, para el movimiento oscilatorio, la energía es una función lineal del número de orden, $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, donde ω es la frecuencia natural. Por lo tanto, la energía de oscilación promedio se puede calcular utilizando la distribución de Boltzmann como

$$\bar{E} = \sum_0^{\infty} \hbar\omega n e^{-\hbar\omega n/kT} / \sum_0^{\infty} e^{-\hbar\omega n/kT}.$$

Las sumas se pueden resolver para encontrar $\bar{E} = kT$.

Por otro lado, a temperaturas muy bajas, incluso los grados de libertad de rotación de las moléculas poliatómicas pueden no estar excitados; esto significa que su número efectivo de grados de libertad es 3. Para determinar si se excita uno u otro grado de libertad, es necesario comparar la diferencia de nivel de energía ΔE entre el estado fundamental y el primer nivel excitado con la energía promedio de un grado de libertad kT : el respectivo grado de libertad comienza a excitarse $T \sim E/k$.

De hecho, consideremos dos niveles de energía E_0 y E_1 . Según la distribución de Boltzmann, $p_1/p_0 = e^{-(E_1-E_0)/kT}$. Si $E_1 - E_0 \gg kT$ entonces

la probabilidad de estar en el estado excitado es exponencialmente pequeña y, por lo tanto, el aumento de energía promedio relacionado también es exponencialmente pequeño.

Ahora queda claro también por qué las moléculas de gases pesados comienzan a oscilar a temperaturas más bajas que los gases ligeros. Las frecuencias naturales $\omega \approx \sqrt{k/m}$ de las moléculas pesadas son más bajas que las de las moléculas ligeras (la rigidez de un enlace químico como “resorte” tiene siempre el mismo orden de magnitud, la principal diferencia proviene de la masa efectiva m). Esto significa que la diferencia de nivel de energía $\Delta E = \hbar\omega$ es correspondientemente más pequeño, lo que lleva a una temperatura de excitación más baja.

Por lo tanto, el número efectivo de grados de libertad depende de la temperatura; además, para un rango de temperatura en el que el número efectivo está cambiando de un valor a otro, el comportamiento del sistema no está bien descrito por un valor entero de i . Por eso, en lugar de i , a menudo las capacidades caloríficas molares c_V y c_P son usadas. Si el comportamiento de un gas está bien descrito por el modelo de gas ideal, es suficiente para dar solo el valor de c_V como c_P entonces se puede encontrar desde la igualdad $c_P = c_V + R$. Por el contrario, si para un determinado gas $c_P - c_V \neq R$ entonces no se comporta como un gas ideal y una relación $PV = \nu RT$ no se cumple del todo. Mientras tanto, es muy posible que, para un gas ideal, $2c_V/R$ no es un número entero: los valores fraccionales solo demuestran que la temperatura actual está cerca de la temperatura de excitación de un cierto grado de libertad. Hagamos un resumen intermedio.

Hecho 11: Para un gas ideal,

$$c_V = \frac{i}{2}R; \quad c_P = c_V + R; \quad \Delta U = \nu c_V \Delta T,$$

donde i es el número de grados de libertad excitados (se deben agregar grados de libertad oscilatorios con doble peso). Un cierto grado de libertad se excita cuando kT es mayor que la diferencia de nivel de energía de los estados cuánticos correspondientes al grado de libertad dado. Como regla general, cerca de la temperatura ambiente para un gas monoatómico $i = 3$, para un gas diatómico $i = 5$ y para gases poliatómicos $i = 6$.

Hasta ahora utilizamos el concepto de los grados de libertad sin una definición adecuada; discutamos esta noción con más detalles.

Definición 7: El número de grados de libertad muestra cuántos parámetros (coordenadas generalizadas) se necesitan para describir completamente el estado de un sistema.

Por ejemplo, para describir una masa puntual en un espacio tridimensional, se necesitan $j = 3$ coordenadas; para N masas puntuales que ya necesitamos $j = 3N$ coordenadas. Para describir la colocación espacial de un cuerpo sólido, se necesitan 6 coordenadas: aparte de las coordenadas de un cierto punto del cuerpo (por ejemplo, el centro de masa), la orientación debe describirse mediante 3 coordenadas (dos ángulos que describen la dirección de un eje del cuerpo y un ángulo que describe la rotación alrededor de ese eje). En el caso de una molécula lineal, la última coordenada, el ángulo de rotación, no es necesaria, por lo tanto, $j = 5$.

Si un sistema consta de N masas puntuales, cuyo movimiento está limitado por ciertas restricciones (por ejemplo, la distancia entre dos masas puntuales se fija con una varilla, o el ángulo entre las líneas que conectan un cierto punto A con

dos puntos vecinos tiene un valor fijo), el número de grados de libertad se puede encontrar usando la fórmula $j = 3N - r$, donde r es el número de restricciones. En el caso de las moléculas, los enlaces son los enlaces químicos que también sirven como resortes y pueden dar lugar a oscilaciones; en ese caso, r es el número de grados oscilatorios de libertad. Sabiendo que, para una molécula lineal, el número total de grados de libertad $j = 5$ y para moléculas planas o tridimensionales $j = 6$, podemos usar esta fórmula para encontrar el número de grados de libertad oscilatorios como $r = 3N - j$. Por ejemplo, una molécula de CO_2 es lineal: $N = 3$ y $j = 5$, por lo tanto $r = 4$. Tenga en cuenta que, en la teoría de los osciladores acoplados, se muestra que el número de grados de libertad oscilatorios es igual al número de modos naturales y frecuencias naturales.

Consideremos un problema sobre el tema de los grados de libertad.

Pr 12. [EstAcadPhO-2006] El juguete “Supermag” hace posible construir, entre otros, poliedros, por ejemplo, tetraedros, cubos y muchos poliedros irregulares, donde los bordes del poliedro están hechos de barras magnéticas, que están conectadas en los vértices con la ayuda de pelotas de acero. Las pelotas de acero fijan firmemente el punto final de una barra de acero, pero el ángulo entre las barras magnéticas que se encuentran en una bola de acero se puede cambiar con un poco de esfuerzo. Parece que un tetraedro es una construcción rígida, pero un cubo puede deformarse fácilmente. Demuestre el siguiente teorema: un poliedro convexo es rígido si y solo si todas las caras del poliedro son triángulos.

Para resolver este problema, la fórmula $j = 3N - s$ se usa, pero se necesita una fórmula más: la fórmula de Euler para grafos (incluidos los poliedros) que relacionan el número de vértices N , caras f y aristas e a través de la igualdad $N + f = e + 2$. El teorema de Euler se proporciona aquí sin pruebas (que en realidad no es difícil y se basa en la inducción matemática). Para resolver el problema 12, es necesario demostrar que si todas las caras son triangulares, el número de grados de libertad restante $j = 3N - s$ es igual al de un cuerpo rígido. Si el número de grados de libertad fuera mayor, sería necesario usar más parámetros que en el caso de un cuerpo rígido para describir su estado, es decir, no puede ser rígido.

Como hemos aprendido, los iones y átomos conectados en moléculas con límites químicos pueden oscilar como sistemas de pelota-resorte. Esto se aplica no solo a las moléculas, sino también a los materiales cristalinos. De manera similar a los gases pesados, en el caso de muchos materiales cristalinos, todos los grados de libertad oscilatorios están excitados. En el caso de un cristal N -atómico (iónico), existen $3N$ grados de libertad; casi todos estos grados de libertad (excepto los 6 grados de libertad de un cuerpo sólido) son oscilatorios. Como N es muy grande, podemos olvidar ese 6, para que la energía interna se pueda expresar como $U = 3\nu RT$. Por lo tanto, la capacidad calorífica molar $c_V = 3R$. En el caso de los iones ligeros, aún puede ocurrir que los modos naturales de mayor frecuencia tengan $\omega > kT/\hbar$ y por lo tanto aún no estén excitados. En ese caso, la energía interna es menor que $3\nu RT$ y el número efectivo de grados de libertad por ión individual (átomo) es una función creciente de la temperatura, acercándose asintóticamente al valor límite $i = 6$ (como todos los grados de libertad son oscilatorios, el número de coordenadas espaciales se multiplica por dos). Recordemos también que a bajas temperaturas comienza como una función cúbica de T .

Derivemos la ley $c_V \propto T^3$ para bajas temperaturas a través de estimacio-

nes (para un diamante, esto es válido incluso para temperatura ambiente). Cada grado oscilatorio de libertad excitado lleva energía kT ; por lo tanto, necesitamos estimar el número de oscilaciones excitadas, es decir, el número de modos naturales con $\omega < kT/\hbar$. Los modos de oscilación naturales de un cristal pueden considerarse ondas de sonido estacionarias. La frecuencia de la onda sonora se expresa como $\omega = c_s \kappa$, donde c_s es la velocidad del sonido y $\kappa = 2\pi/\lambda$ el vector de onda. Por lo tanto, todas las ondas estacionarias con el vector de onda $\lambda kT/\hbar c_s$ y longitud de onda $\lambda > \hbar c_s/kT$ estarán excitadas. Considere que el cristal tiene una forma cúbica de longitud lateral L . En el límite libre del cristal, no puede haber tensión, por lo tanto, para los vectores de desplazamiento de las moléculas, debe haber antinodos en el límite. Por lo tanto, L debe ser un múltiplo de la media longitud de onda: $L\kappa_x = m_x\pi$, donde κ_x es la proyección del vector de onda al eje x y m_x es el número de nodos a lo largo de x . Para la longitud de onda excitada más pequeña, $\lambda_s = \hbar c_s/kT$ y $m_x = 2L/\lambda_s$. Tenga en cuenta que todas esas ondas estacionarias que tienen un menor número de nodos también están excitadas. Del mismo modo, a lo largo de los ejes y y z , para oscilaciones excitadas, el número de nodos varía entre 1 y $2L/\lambda_s$. El número de ondas estacionarias diferentes se encuentra como el número de tripletes diferentes (m_x, m_y, m_z) , que es igual a $(2L/\lambda_s)^3$. Entonces, la energía interna se encuentra como

$$U \approx M kT \approx kT (2LkT/\hbar c_s)^3 \propto T^4.$$

Por lo tanto, la energía interna es proporcional a T^4 y la capacidad calorífica $C_V = \frac{dU}{dT} \propto T^3$.

Ahora, pasemos a los problemas que no están relacionados con el enfoque cinético molecular y, en cambio, requieren el conocimiento de la ley de los gases ideales y su energía interna. Muchos problemas de la Olimpiada se basan simplemente en esas dos ecuaciones; en el caso del siguiente problema, el único “truco” es que, a diferencia de los procesos isocóricos, isobáricos, etc., no se conserva la cantidad de gas, sino la presión, por lo tanto, la cantidad de moles cambiará de acuerdo con $\nu T = \text{const.}$

Pr 13. [EstPhO-2003] Un aerostato (un globo de aire hecho de una membrana no estirable) tiene volumen V_0 , se llena con hidrógeno y se mantiene estable a cierta altura donde la presión externa es P y la temperatura del aire es T_{aire} . Debido a la luz solar, el aerostato se calienta a una temperatura T_1 . Como resultado, parte del aire sale del globo a través de una válvula. La válvula está hecha de modo que, si la presión interior excede la exterior, se libera el exceso de gas; la válvula nunca permite que el gas ingrese al globo desde afuera. Ahora, la luz solar está bloqueada por una nube: la temperatura del globo baja y el volumen se vuelve más pequeño. ¿Cuánto lastre (cuánta masa m) necesita ser expulsado para mantener el aerostato a la misma altura (donde la presión todavía es igual a P)? Tanto el aire como el hidrógeno pueden tratarse como gases ideales, las masas molares son μ_{H_2} y μ_{aire} , respectivamente.

El siguiente problema trata con un proceso de transferencia de energía más complicado; la siguiente idea será útil.

Idea 7: Si dos depósitos están conectados a través de una tubería estrecha, una válvula estrecha, etc., entonces es posible un cuasi equilibrio: mientras que las temperaturas de los dos depósitos a los otros lados de la tubería son diferentes, las presiones son iguales. Por lo tanto, hay un equilibrio mecánico, pero no hay equilibrio térmico (se necesita mucho más tiempo para llegar a este último).

Pr 14. Considere un globo que tiene paredes gruesas y rígidas y desde el cual se ha vaciado todo el aire. Ahora, la válvula del globo está ligeramente abierta y el globo se llena lentamente

con el aire del exterior. Encuentre la temperatura del aire dentro del globo una vez que el flujo de aire se haya detenido (ya que se ha alcanzado un equilibrio mecánico). La temperatura ambiente es T , las paredes del globo tienen baja conductividad térmica y capacidad térmica para que se pueda despreciar el flujo de calor a través de las paredes.

El primer paso hacia la solución de este problema es comprender a qué se dedica el trabajo realizado por aire externo $P\Delta V$: cómo se convierte en calor y cómo cambia el volumen externo ΔV relacionado con el volumen de la cavidad V . Observemos también que, presumiblemente, el tamaño de la abertura de la válvula es mayor que la longitud media del camino libre, de modo que no se necesita un enfoque cinético molecular y, en su lugar, se debe aplicar un enfoque macroscópico: una corriente estrecha (pero aún macroscópica) del aire entra en la cavidad a través de la válvula.

3.1. Procesos adiabáticos

La respuesta típica a la pregunta de cuáles son los procesos adiabáticos tiende a ser que estos son procesos tan rápidos con un gas que esencialmente no hay intercambio de calor con el gas (durante el período de tiempo dado, el calor transferido mediante conducción y radiación al gas permanece mucho más pequeño que la energía interna del gas).

Sin embargo, esto es solo la mitad de la verdad y en realidad la mitad menos importante. Para entender esto, consideremos el siguiente problema simple. El recipiente aislado térmicamente se divide en dos mitades a través de una pared. Considere que una de las mitades contiene un gas a una presión P y que la otra está vacía (es decir, contiene vacío a una presión insignificanamente pequeña). La pared que separa las dos mitades se elimina instantáneamente; ¿cuál es la presión del gas dentro del recipiente al alcanzar el equilibrio mecánico y térmico?

Dado que la pared se retira instantáneamente, el gas no puede realizar ningún trabajo mecánico (la pared no se mueve en la dirección de la fuerza). No hay intercambio térmico al medio ambiente y, por lo tanto, de acuerdo con el 1LTD, la energía interna permanece constante, por lo tanto, la temperatura no cambia. Mientras tanto, el volumen aumenta dos veces y, debido a la ley de gases ideal, esto significa que la presión disminuye dos veces. Entonces, ¿estamos lidiando con un proceso isotérmico y no con uno adiabático!

De hecho, el requisito principal para tener un proceso adiabático es que el proceso debe ser lo suficientemente lento: el tiempo característico del proceso debe ser mucho más largo que el período de oscilación natural del sistema. En el caso de los gases, los modos de oscilación naturales son ondas estacionarias; el período del modo más lento es $c_s/2L$, donde L es la longitud del vaso y el factor dos explica el hecho de que la longitud de onda de la onda estacionaria más larga tiene una longitud de onda igual a $2L$; c_s denota la velocidad del sonido. Así, $v/L \ll c_s/2L$, entonces $v \ll c_s$, donde v es la velocidad de las paredes del contenedor (o de un pistón).

Definición 8: El proceso adiabático es un proceso por el cual los parámetros del sistema cambian tan lentamente que el tiempo característico de cambio es mucho más largo que el período del modo más lento de oscilaciones naturales; además, no debe haber procesos disipativos (donde la energía mecánica

se convierte en calor), por ejemplo, fricción. En el caso de los gases, esto significa que la velocidad de las paredes del contenedor debe ser mucho menor que la velocidad del sonido y que tampoco debe haber suministro de calor externo.

Los procesos adiabáticos en un sentido termodinámico tan amplio juegan un papel importante también en mecánica cuántica, electrodinámica, etc.

En el curso de la mecánica analítica se demuestra que para los procesos adiabáticos en sistemas que oscilan periódicamente, se conserva la invariante adiabática; esta es el área del bucle dibujado por el oscilador en el plano de fase (la curva en el plano $x - p_x \oint p_x dx$, donde x es la coordenada y p_x el momento correspondiente), véase la guía de mecánica. Si bien una prueba general es complicada, un problema del folleto de mecánica trataba de una partícula que rebotaba de un lado a otro entre dos placas que se movían lentamente; se demostró que $Lv = \text{const}$, v siendo la velocidad de la partícula y L la distancia entre las paredes.

Ahora, consideremos el gas unidimensional: hay muchas partículas que rebotan a lo largo del eje x entre las placas. Desde la teoría de la cinética molecular, la presión de dicho gas $P = nm\bar{v}^2$. La densidad numérica de las partículas es, por supuesto, inversamente proporcional al “volumen”, que en el caso unidimensional es solo la distancia entre las placas L , es decir $n \propto 1/L$. Debido a la invariante adiabática, la velocidad de cada una de las moléculas es inversamente proporcional a L y, por lo tanto, la velocidad promedio sigue la misma ley, $\bar{v} \propto 1/L$. Así, $P \propto 1/L^3$, o alternativamente, $PL^3 = \text{const}$. Esta es nuestra ley adiabática para el gas unidimensional: $PV^\gamma = \text{const}$, con $V = L$ y $\gamma = 3$.

Lo que es aún más importante, es que en la mecánica cuántica, el área en el espacio de fase está relacionada con la regla de cuantización cuasiclásica, para el n -ésimo nivel de energía cuántica, $\oint p_x dx = n\hbar$. Ahora, si el potencial cambia lentamente en el tiempo, se conserva la invariante adiabática, por lo tanto, el sistema permanecerá en el mismo nivel de energía (con el mismo número de orden) que al principio (solo son posibles excepciones en el caso de un “intersección separatriz”, por ejemplo, si el “pozo potencial” se vuelve tan estrecho que el estado unido dado desaparece y la partícula unida anteriormente al pozo queda libre).

Idea 8: Durante los procesos adiabáticos, las partículas permanecen en sus niveles cuánticos iniciales. Al combinar esta observación con la ley de Boltzmann, a menudo es posible encontrar la nueva temperatura.

Pr 15. La expansión de nuestro Universo puede considerarse como un proceso adiabático para los fotones de la radiación de fondo de microondas: la longitud de onda de los fotones crece proporcionalmente al tamaño lineal del Universo. ¿Cuántas veces cambiará la temperatura de la radiación, si el tamaño lineal del universo crece dos veces? ¿Cuál es el exponente adiabático para un gas fotón?

Para los procesos adiabáticos con gases, también se requiere que la tasa de intercambio de calor del gas dado sea insignificanamente pequeña (en comparación con el cambio de energía interno): $\Delta Q = 0$. Si recordamos el movimiento adiabá-

tico de una partícula entre dos paredes, vemos que el requisito de no intercambio de calor es muy consistente con ese proceso adiabático: la partícula no recibió ninguna energía externa aparte de la energía recibida de la pared en movimiento (el flujo de calor corresponde a una fuente de energía externa para la energía cinética de las moléculas) y no hubo pérdidas de energía debido a la fricción u otros procesos. Entonces, el proceso adiabático con un gas puede ser arbitrariamente lento, en principio, pero en la práctica, para procesos demasiado lentos, el intercambio de calor ya no puede ser ignorado.

Antes de deducir la ley adiabática para gases, tengamos en cuenta que, en las Olimpiadas, esta derivación generalmente no es necesaria, simplemente es suficiente saber la ley.

Para comenzar, aplicamos el 1LTD a un proceso adiabático en un mol de gas, $dU = P dV$, donde $dU = c_V dT$, es decir

$$c_V dT = -P dV.$$

Tenga en cuenta que, aunque el volumen no sea constante, el cambio de energía interna se expresa en términos de c_V . Este es un método estándar: con volumen constante, no se realiza ningún trabajo mecánico y, por lo tanto, todo el calor proporcionado $c_V dT$ va al cambio de la energía interna dU .

Idea 9: El cambio de energía interna se puede calcular como $dU = c_V dT$.

Queremos derivar la relación entre la presión y el volumen, por lo que debemos eliminar aquí la temperatura; para ese fin, usamos la ley de gas ideal, $RT = PV$, por lo tanto

$$R dT = P dV + V dP.$$

Aquí aplicamos la regla de la cadena $d(PV) = P dV + V dP$. Ahora podemos eliminar fácilmente dT de estas dos ecuaciones para obtener

$$P dV(c_V + R) + c_V V dP = 0.$$

Notemos que $c_V + R = c_P$, e introduzca el índice adiabático definido como

$$\gamma = c_P/c_V.$$

Esto nos permite reescribir la última ecuación como

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0.$$

Si integramos esta igualdad, el primer término produce $\int \gamma \frac{dV}{V} = \gamma \ln V = \ln V^\gamma$ y el segundo $\int \frac{dP}{P} = \ln P$, así que $\ln V^\gamma + \ln P = \ln PV^\gamma = \text{const}$, por lo tanto

$$PV^\gamma = \text{const}.$$

Ahora, regresemos al gas unidimensional discutido anteriormente; tiene un grado de libertad, por lo tanto, $c_V = \frac{1}{2}R$ y $c_P = \frac{3}{2}R$ así que $\gamma = 3$, que está completamente de acuerdo con nuestro resultado para la invariante adiabática. Hagamos un resumen intermedio.

Hecho 12: La ley adiabática, que es válida simultáneamente con la ley del gas ideal $PV/T = \text{const}$, establece que

$$PV^\gamma = \text{const}; \quad \text{donde}; \quad \gamma = c_P/c_V.$$

Combinando esto con la ley del gas también tenemos igualdades

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}; \quad \text{y}; \quad T^\gamma \propto P^{\gamma-1}.$$

Idea 10: Para procesos adiabáticos, el trabajo realizado puede calcularse como el cambio de energía interna (ya que no hay intercambio de calor):

$$\Delta W = \nu \frac{i}{2} R \Delta T = \int P dV.$$

Para problemas de la vida real cuando las suposiciones aplicables no se establecen explícitamente, es importante comprender cuándo se puede despreciar la tasa de intercambio de calor (entonces el proceso es adiabático) y cuando el intercambio de calor es tan rápido que el proceso es esencialmente isotérmico. Aquí es útil comparar escalas de tiempo características del tiempo de relajación térmica τ_{ter} (el tiempo durante el cual las diferencias de temperatura disminuyen en un factor de e) y el tiempo característico del proceso en sí (por ejemplo, el tiempo durante el cual el sistema pasa del estado inicial al estado final). Es útil saber que el tiempo de relajación térmica depende del tamaño del sistema (dimensión lineal) L , siendo proporcional a L^2 ; en el caso de aire en condiciones normales, por $L \approx 1 \text{ cm}$, $\tau_{\text{ter}} \approx 1 \text{ s}$.

A continuación, procedemos a la discusión de los procesos atmosféricos.

Idea 11: Cuando las masas de aire están en movimiento vertical, generalmente durante el día, pero también durante la actividad ciclónica y los fuertes vientos, el movimiento vertical del aire incurre en expansión adiabática. Esto da como resultado la llamada atmósfera adiabática, donde la temperatura cae con la altura h ,

$$T^\gamma \propto P^{\gamma-1}, \quad P = P_0 - \rho gh;$$

aquí la expresión para P es válida para diferencias de altura moderadas cuando la variación de la densidad del aire ρ puede ser despreciada.

De hecho, las masas de aire son muy grandes y, por lo tanto, aunque el aire puede elevarse lentamente, el tiempo de relajación térmica es aún más lento, por lo que el proceso es adiabático. Durante el día, el movimiento vertical del aire es causado por la luz solar que calienta el suelo, lo que, en su término, calienta el aire a través de la conductividad térmica (tenga en cuenta que como el aire es transparente, no absorbe la luz y, por lo tanto, el calentamiento directo por la luz solar es despreciable). El aire calentado tiene una densidad menor que el aire más frío en altitudes más altas y comienza a elevarse. A nivel del suelo, no se puede crear un vacío, por lo que también debe haber masas de aire descendentes. Entonces, el aire se mueve hacia arriba y hacia abajo, lo que resulta en una mezcla vertical bastante buena y una atmósfera adiabática. ¿Qué significa en términos de caída de temperatura a grandes altitudes? esto lo aprenderemos en el siguiente problema.

Pr 16. ¿Cuál es la temperatura en la cima de una colina de altura $H = 200 \text{ m}$ si en el fondo del valle $t_0 = 20^\circ \text{C}$? Puede suponer que cuando las masas de aire se mueven a lo largo de la pendiente de la colina, la expansión y/o contracción del aire puede considerarse adiabática. La presión del aire a nivel del valle $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, densidad del aire $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ y el índice adiabático $\gamma = 1,4$.

Este problema puede resolverse muy rápido si hacemos uso del hecho de que aquí, el cambio relativo de presión es muy pequeño.

Idea 12: En el caso de las igualdades que involucran productos, por ejemplo $a^\alpha b^\beta = \text{const}$, si los cambios relativos de las variables son pequeños ($\Delta a \ll a$, $\Delta b \ll b$) entonces es conveniente usar un cálculo aproximado basado en la diferenciación

logarítmica,

$$0 = d \ln(a^\alpha b^\beta) = \alpha \frac{da}{a} + \beta \frac{db}{b} \Rightarrow \alpha \frac{\Delta a}{a} = -\beta \frac{\Delta b}{b}.$$

Si la altura de la colina fuera muy grande, de modo que la diferencia de densidad del aire entre la cima y el fondo de la montaña fuera significativa, sería necesario usar aquí la distribución de Boltzmann $\rho \propto e^{-\mu gh/RT}$. Mientras que para $\mu gh \ll RT$, esta es una expresión que se puede simplificar usando el término lineal de la expansión de Taylor $e^x \approx 1 + x$, se puede obtener el mismo resultado aproximado (posiblemente) más fácilmente utilizando la siguiente idea.

Idea 13: Si las diferencias de altura son pequeñas y no hay necesidad de aplicar la distribución de Boltzmann, el cambio de presión de aire se puede encontrar como la presión de la columna de aire $\Delta P = \rho gh$, donde ρ se puede considerar en la primera aproximación como independiente de la altura.

Utilizando el resultado de este problema, también queda claro por qué los picos de las montañas están nevados; por ejemplo, 3 km corresponderían a la diferencia de temperatura de 30° C. En realidad, la diferencia de temperatura sigue siendo algo menor ya que el aire que asciende a lo largo de las laderas de las montañas se calienta debido a la conducción del calor desde la superficie de la montaña (ver arriba).

Durante el clima nocturno tranquilo, la atmósfera adiabática no siempre puede ser observada. Esto se debe a que la superficie de la Tierra emite calor a través de la radiación y se enfría; las masas de aire inferiores también se enfrían por conducción de calor. Tengamos en cuenta que la radiación de calor del aire en sí es insignificante: al ser transparente, no absorbe la radiación; debido a la 2LTD, la absorción y la radiación son fenómenos simétricos y, por lo tanto, el aire limpio no puede irradiar. Las capas inferiores de aire frío tienen una densidad más alta y, por lo tanto, se forma una estratificación de aire muy estable: casi no hay movimiento vertical del aire. Tal fenómeno se llama “inversión”. En el caso de la inversión, todos los gases residuales permanecen cerca de la superficie, dando lugar a una alta contaminación del aire.

La ecuación de Bernoulli, $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + P = \text{const}$ (donde ρ es la densidad, v la velocidad, P la presión, g aceleración gravitacional y h altura) es una igualdad bien conocida que expresa el hecho de que en el caso de un flujo estacionario, el flujo de energía que ingresa a cualquier volumen debe ser igual al flujo de energía que sale de ese volumen: de lo contrario, la cantidad total de energía dentro de ese volumen comenzaría a crecer, contradiciendo la suposición de estacionariedad. La ecuación de Bernoulli, sin embargo, es válida solo en el caso de flujos incompresibles. Como hemos visto anteriormente, los flujos de aire atmosférico son típicamente adiabáticos, en cuyo caso la ecuación de equilibrio de energía debe tener en cuenta el cambio de energía interna del gas y el trabajo realizado por expansión.

Idea 14: Para problemas establecidos en el flujo de gas estacionario, se deben usar dos leyes de conservación. **Primero**, a lo largo de las líneas de corriente

$$\frac{v^2}{2} + gh + c_P T = \text{const},$$

donde $c_P = C_P/M$ es el calor específico del gas por unidad de masa por presión constante (C_P denota el calor específico mo-

lar y M la masa molar). Esta igualdad refleja la conservación de energía. Alternativamente, si la velocidad de flujo es mucho menor que la velocidad sónica y las variaciones de densidad a lo largo de las líneas de corriente siguen siendo pequeñas, $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$, la ley original de Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + P = \text{const}$$

también se puede utilizar.

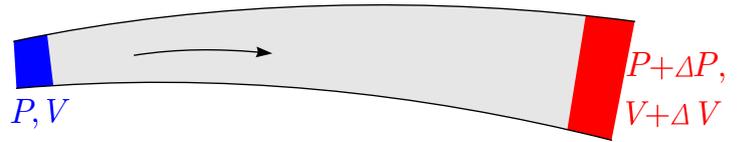
Segundo,

$$\rho v A = \text{const},$$

donde A es el área de la sección transversal de un tubo ficticio formado por líneas de corriente; esto refleja la conservación de masa como ρv es igual a la densidad de flujo de masa (masa que pasa una unidad de área de sección transversal por unidad de tiempo).

Cabe destacar que en el caso de los flujos de gas cuando ρ no es constante, $\frac{v^2}{2} + gh + c_P T = \text{const}$ se sostiene exactamente; mientras tanto, la ley de Bernoulli es válida solo en el límite $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$.

El hecho de que la ley de Bernoulli se puede utilizar en el límite $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$ en realidad no es trivial de hecho, la ley de Bernoulli se deriva del equilibrio energético: el trabajo realizado por presión se convierte en energía cinética y/o potencial. Sin embargo, cuando el gas es compresible, también hay una conversión en energía interna debido a la compresión.



Considere un desplazamiento de una cierta cantidad de gas dentro de un tubo ficticio hecho de líneas de corriente como se muestra en la figura: supongamos que antes del desplazamiento, este volumen de gas ocupaba la región sombreada en azul y gris. Como resultado del desplazamiento, ahora ocupa la región sombreada en gris y rojo. No hay cambios en el estado de la región gris, pero el gas de la región azul se ha trasladado a la región roja. El cambio en la energía cinética es $\frac{m}{2}(v_r^2 - v_a^2)$, donde v_a y v_r representan las velocidades del gas en las posiciones azul y roja, respectivamente. El balance de energía está escrito como

$$W = \frac{m}{2}(v_r^2 - v_a^2) + \Delta U,$$

donde ΔU es el cambio de la energía interna y el trabajo realizado por presión externa

$$W = PV - (P + \Delta P)(V + \Delta V).$$

Ahora, considere un desplazamiento de gas más largo, de modo que el gas de la región azul haya cubierto toda la distancia del azul al rojo y ahora ocupe el volumen sombreado en rojo. Durante ese desplazamiento, el proceso en el gas fue adiabático, por lo que $\Delta U = -\int P dV$; asumiendo $\frac{\Delta P}{P} \ll 1$ (que es equivalente a requerir $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$), la integral puede ser aproximada como $\Delta U = -P \Delta V$. Volviendo a la ecuación del balance energético, podemos escribir

$$\frac{m}{2}(v_r^2 - v_a^2) = V \Delta P + \Delta V \Delta P,$$

lo que nos da la ley de Bernoulli si despreciamos el término cuadráticamente pequeño $\Delta V \Delta P$ y suponemos que las densidades en las posiciones azul y roja son aproximadamente iguales, $\frac{m}{V} \approx \frac{m}{V + \Delta V}$. Esto es válido si el cambio relativo en la

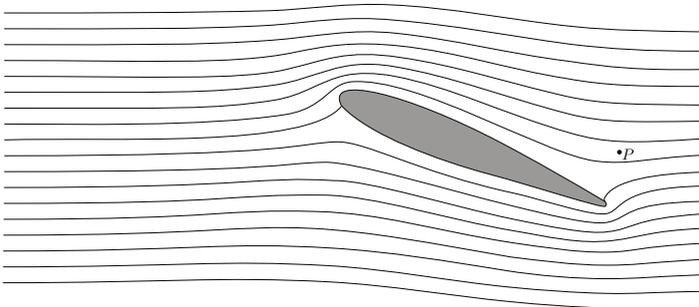
velocidad del flujo es mucho mayor que el cambio relativo en la densidad, lo cual es cierto si la velocidad del flujo es mucho menor que la velocidad sónica.

Cuando derivamos aquí la ley de Bernoulli, utilizamos un truco que también se puede formular como una idea.

Idea 15: Si una columna de líquido o gas, una varilla o una cuerda (y así sucesivamente) se mueve paralela a sí misma de modo que el estado nuevo y el estado anterior se superponen en su mayoría y solo hay pequeñas regiones donde se ha cambiado el estado (por ejemplo, el rojo y regiones azules en la figura anterior), el cambio de la energía total (momento, momento angular, etc.) puede calcularse considerando solo aquellas regiones en las que se ha cambiado el estado.

Pr 17. Demuestre que, para un flujo de gas estacionario, a lo largo de las líneas de corriente $\frac{v^2}{2} + gh + c_P T = \text{const.}$

Pr 18. [IPhO-2012] En la figura a continuación, se representa una sección transversal del ala de un avión junto con líneas de flujo de aire alrededor del ala, como se ve en el marco de referencia del ala. Suponga que (a) el flujo de aire es puramente bidimensional (es decir, que los vectores de velocidad del aire se encuentran en el plano de la figura); (b) el patrón aerodinámico es independiente de la velocidad de la aeronave; (c) no hay viento; (d) la presión dinámica es mucho menor que la presión atmosférica $P_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$. Puede usar una regla para tomar medidas de la figura.



- a) Si la velocidad de avance de la aeronave es $v_0 = 100 \text{ m/s}$, ¿cuál es la velocidad del aire v_P en el punto P (marcado en la figura) con respecto al suelo?
- b) En el caso de alta humedad relativa, a medida que la velocidad de avance de la aeronave aumenta sobre un valor crítico $v_{\text{crít}}$, se crea una corriente de gotas de agua detrás del ala. Las gotas emergen en cierto punto Q . Marque el punto Q en la figura en la hoja de respuestas. Explique cualitativamente (usando fórmulas y la menor cantidad de texto posible) cómo determinó su posición.
- c) Estime la velocidad crítica $v_{\text{crít}}$ utilizando los siguientes datos: la humedad relativa del aire es $r = 90 \%$, calor específico del aire a presión constante $c_P = 1,00 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, presión de vapor de agua saturado: $P_{sa} = 2,31 \text{ kPa}$ a la temperatura del aire no perturbado $T_a = 293 \text{ K}$ y $P_{sb} = 2,46 \text{ kPa}$ a $T_b = 294 \text{ K}$.

La idea 14 también es útil cuando se deriva la velocidad del sonido c_s en un gas, sin embargo, necesitamos una idea más.

Idea 16: Para encontrar la velocidad de propagación de un pulso en un medio homogéneo, por ejemplo, gas o cuerda estirada, es conveniente usar un marco de referencia móvil donde el pulso está en reposo.

Consideremos una onda de sonido que se propaga en la dirección del eje x ; entonces, la densidad del aire $\rho = \rho(x - c_s t)$. Siguiendo la idea 16, consideramos un sistema de referencia que se mueve con velocidad c_s , con eje de coordenadas $x' = x - c_s t$. En ese marco, la perturbación de densidad permanece constante en el tiempo, $\rho = \rho(x')$. Esto significa que podemos usar la idea 14, para obtener dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \Delta\rho)(v + c_s) &= \rho_0 c_s, \\ \frac{1}{2}(v + c_s)^2 + c_P T &= \frac{1}{2}c_s^2 + c_P T_0, \end{aligned}$$

donde $v \ll c_s$ es la velocidad del gas en el marco del laboratorio. En la onda de sonido, las perturbaciones de densidad son típicamente pequeñas, por lo que podemos suponer $\Delta\rho \ll \rho$. Al abrir las llaves y despreciar términos cuadráticamente pequeños (por ejemplo $v\Delta\rho$ y v^2), obtenemos

$$\rho_0 v + c_s \Delta\rho = 0, \quad c_s v + c_P \Delta T = 0.$$

Si la longitud de onda es lo suficientemente larga (mucho más larga que la longitud media del camino libre de las moléculas de gas), el flujo de gas es adiabático, por lo que podemos relacionar ΔT con $\Delta\rho$ mediante la ley adiabática $T\rho^{1-\gamma} = \text{const.}$ Usando la idea 12, obtenemos $\frac{\Delta T}{T_0} + (1 - \gamma)\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = 0$, entonces $\Delta T = (\gamma - 1)\frac{T_0}{\rho_0}\Delta\rho$. Con esto, nuestras ecuaciones pueden reescribirse como

$$\rho_0 v + c_s \Delta\rho = 0, \quad \rho_0 c_s v + c_P(\gamma - 1)\frac{T_0}{\rho_0}\Delta\rho = 0,$$

donde $c_P(\gamma - 1) = M^{-1}C_P\frac{C_P - C_V}{C_V} = M^{-1}C_P\frac{R}{C_V} = \gamma\frac{R}{M}$. Este es un conjunto de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, v y $\Delta\rho$ que puede tener soluciones distintas de cero solo si el determinante es cero (las ecuaciones son linealmente dependientes), es decir

$$c_s^2 = \gamma\frac{RT_0}{M}.$$

Al calcular c_s , hemos ignorado un hecho importante: en el caso de líneas de corriente rectas (lo que tenemos en el caso de frentes de onda planos/unidimensionales en su propagación), aparte de la conservación de energía y masa, también tenemos la conservación del momento lineal del gas.

Pr 19. Demuestre que, en el caso del flujo de gas a lo largo de líneas de corriente rectas, debido a la segunda ley de Newton para las parcelas de gas

$$\rho v^2 + P = \text{const.}$$

Debe enfatizarse que esta última ley es válida solo en el caso de líneas de corriente rectas: de lo contrario, la fuerza de presión por la cual las paredes del tubo ficticio (hechas de líneas de corriente) actúan sobre las parcelas de gas también contribuirá a la aceleración a lo largo de las líneas de corriente.

Cuando calculamos c_s , utilizamos tres ecuaciones: ley de conservación de energía, $\frac{1}{2}v^2 + c_P T = \text{const}$, conservación de la masa $\rho v = \text{const}$ y la ley adiabática $T\rho^{1-\gamma} = \text{const}$. Podríamos haber sustituido la ley adiabática con la ley de conservación del momento $\rho v^2 + P = \text{const}$ y aun así hubiéramos obtenido el mismo resultado. Esto significa que, si la amplitud de las perturbaciones de densidad es pequeña, las cuatro ecuaciones son linealmente dependientes y la ley adiabática se puede derivar

de las tres restantes: por lo tanto, siempre que la amplitud de la onda sea pequeña, la propagación del sonido es adiabática. Por otro lado, para grandes amplitudes este ya no es el caso: las tres leyes de conservación (conocidas como las *condiciones de Rankine-Hugoniot*) pueden (y estarán) en contradicción con la ley adiabática. Por lo tanto, en el caso de ondas de choque de gran amplitud, el proceso con gas no es adiabático y parte de la energía mecánica se convierte en calor.

Pr 20. En el caso de una onda de choque, una región de alta presión se propaga en gas con una velocidad que es algo mayor que la velocidad del sonido. Considere una onda de choque en la que la densidad del aire crece exactamente dos veces; ¿cuántas veces es una onda de choque más rápida que la velocidad del sonido?

3.2. Interfaz entre líquidos y vapores

Las partículas líquidas (y cristalinas) (átomos, moléculas, iones) están unidas entre sí a través de enlaces químicos, fuerzas que dependen de la distancia entre partículas de una manera complicada. Por origen, estas fuerzas tienen naturaleza electrostática: la interacción de las leyes cuánticas y las interacciones electrostáticas entre los electrones orbitales y los núcleos atómicos hace que la fuerza entre las partículas sea una función compleja de las posiciones de las partículas que interactúan. A pequeñas distancias entre los núcleos atómicos, la fuerza se vuelve repulsiva (las cargas positivas de los núcleos se repelen), a distancias moderadas la fuerza es atractiva (esto mantiene las partículas juntas en la fase líquida o cristalina) y a grandes distancias la fuerza disminuye más rápido que la ley electrostática de r^{-2} . La atracción a distancias moderadas significa que la energía potencial (con respecto a una distancia infinita) para un par típico cercano al vecino es negativa; considere que la energía potencial promedio por partícula es $-U_0$. Para las partículas dentro de la fase líquida (o cristalina), el número de vecinos cercanos es mayor que para las partículas en la superficie. Respectivamente, la energía potencial promedio de las fuerzas entre partículas por partícula en la superficie también es menor en módulo que U_0 ; denotemos la diferencia de energía por ΔU_0 . Ahora podemos sacar dos conclusiones.

Primero, aumentar el área de superficie de un líquido aumentará el número de partículas en la superficie y, por lo tanto, la energía general de las fuerzas moleculares. Naturalmente, el número de partículas adyacentes a la superficie es proporcional al área A y también lo es la energía general W asociada con las partículas que están en la superficie en lugar de estar dentro de la mayor parte del líquido: $W = \sigma A$, donde el coeficiente σ caracteriza las fuerzas moleculares del líquido y se llama **ten-sión superficial**. Este fenómeno se discutirá en la siguiente sección.

Segundo, para extraer una partícula de la fase líquida, necesita obtener energía U_0 (esta energía es análoga a la función de trabajo en la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico). Hasta ahora hemos aprendido que, en los sistemas termodinámicos, las partículas pueden estar en estados de energía más altos y más bajos, lo que significa que las moléculas líquidas también pueden obtener, debido a interacciones aleatorias con otras moléculas, energía que excede U_0 y, como resultado, “sal-

ta” de la fase líquida. Este proceso (las moléculas saltan del líquido) da lugar a la *evaporación*: el número de moléculas en fase líquida disminuirá. Sin embargo, también existe el proceso inverso, la *condensación* en la superficie del líquido. De hecho, si la fase gaseosa por encima de la superficie del líquido contiene las moléculas del líquido, las moléculas de vapor (que están en un movimiento aleatorio) pueden golpear la superficie del líquido y quedar “atrapadas” en ella.

Para una molécula, la probabilidad de tener una energía adicional superior a U_0 es proporcional a $e^{-U_0/kT}$; la **tasa de evaporación** es proporcional a esa probabilidad y, por lo tanto, aumenta muy rápidamente con la temperatura. La **tasa de condensación**, por otro lado, es menos sensible a la temperatura (es proporcional a la velocidad de las moléculas, es decir \sqrt{T}) y depende principalmente de la concentración de las moléculas de vapor en la fase gaseosa. Obviamente, si la velocidad de evaporación excede la velocidad de condensación, la cantidad de líquido está disminuyendo y *viceversa*. Si tomamos una cierta cantidad de líquido y lo sellamos herméticamente en una botella, los dos procesos alcanzan un equilibrio: la concentración de las moléculas de vapor en la fase gaseosa alcanzará un valor tal que la velocidad de evaporación sea igual a la velocidad de condensación.

Definición 9: El vapor con tal concentración que conduce a que la velocidad de condensación sea igual a la velocidad de evaporación a la temperatura dada se denomina *vapor de saturación*.

Muy a menudo, la cantidad de vapores se mide como la presión parcial causada por el tipo dado de moléculas en la fase gaseosa. Este método es válido debido a la ley de Dalton.

Hecho 13: La ley de Dalton establece que la presión es una cantidad aditiva: la presión total ejercida por un gas es igual a la suma de *presiones parciales*: $P = P_A + P_B + \dots$, donde P_A es la presión debida a las moléculas de tipo A , P_B el de las moléculas de tipo B , etc.

Esta ley se deriva directamente de los principios de la teoría cinética molecular: la presión es el momento de las moléculas transferidas a las paredes del recipiente por unidad de tiempo y unidad de superficie y de acuerdo con las leyes de la mecánica, el momento es una cantidad aditiva (el momento de un todo sistema es la suma de los momentos de todas sus partes).

Volviendo a los vapores, el vapor de saturación se caracteriza típicamente por su presión, la *presión de vapor de saturación*.

Definición 10: La *humedad relativa* se define como la razón de la presión de vapor a la presión de vapor de saturación a la temperatura dada del gas.

Hay otro proceso que es muy similar a la evaporación: la **sublimación**. En el caso de la sublimación, la única diferencia es que las moléculas van directamente de la fase sólida a la fase gaseosa; los ejemplos de sublimación incluyen agua a temperaturas inferiores a 0°C y yodo a temperatura ambiente. En el caso de la sublimación, las nociones de presión de saturación, presión de vapor y humedad relativa permanecen intactas.

El siguiente problema prueba la comprensión del concepto de presión de saturación.

Pr 21. En el vacío y la ingravidez, en el fondo de un recipiente cilíndrico (una copa), hay una capa de sustancia sólida. Esta sustancia se sublima lentamente (se evapora de la fase sólida a la fase gaseosa) y empuja el vaso hacia la dirección opuesta. La masa del recipiente es M y la masa inicial de la sustancia $m \ll M$. El área de la sección transversal del recipiente es A y la presión de los vapores saturados de la sustancia a la temperatura T es P_0 . ¿Cuál es la aceleración del recipiente? De la respuesta para dos casos: (a) la longitud media del camino libre λ de las moléculas a la presión de saturación es mucho más pequeña que la longitud del recipiente y (b) mucho más grande que eso.

Si la presión de vapor actual es menor que la presión de vapor de saturación (es decir, la humedad relativa es menor al 100%), la evaporación en una superficie líquida domina sobre la condensación y la masa de líquido disminuye lentamente. Por otro lado, si la humedad relativa es mayor que $r = 100\%$, la condensación domina sobre la evaporación. Sin embargo, a diferencia de la evaporación, la condensación puede tener lugar no solo en la superficie líquida libre, sino que también comienza a formar gotas. Aun así, las moléculas de vapor no pueden comenzar a formar una gotita en un espacio vacío, ya que en el caso de una gotita muy pequeña (del tamaño de unas pocas moléculas), la fase líquida aún no se ha formado y las fuerzas de atracción molecular no son lo suficientemente fuertes como para mantener moléculas juntas (la energía de unión es menor que la de una fase líquida, U_0). Por lo tanto, para comenzar a formar una gota, se necesita un centro de condensación: puede ser una partícula de polvo o un pequeño cristal de sal flotando en el aire. Entonces, alrededor de cada centro de condensación, se forma una pequeña gota; esto es niebla. Si hay un número suficientemente grande de centros de condensación, las pequeñas gotas “absorben” todo el exceso de vapor, lo que lleva a $r = 100\%$. Si el número de centros de condensación es menor, cada una de las gotas necesitará absorber los vapores de un volumen mayor, por lo que el proceso llevará más tiempo. En el caso de aire extremadamente limpio, cuando hay muy pocos centros de condensación, durante un cierto período de tiempo $r > 100\%$ es posible, dicho gas se llama *vapor sobresaturado*.

Ahora, analicemos con más detalle la evaporación en $r < 100\%$. En el caso de los vapores de agua en el aire, el aire suele estar relativamente seco, con r que van típicamente del 40% al 80%. Este es el caso porque la superficie de agua libre forma solo una pequeña fracción de todas las superficies: el calentamiento solar reduce r aumentando la presión de saturación, pero la presión de vapor permanece casi constante ya que no hay fuentes de vapor (en forma de agua líquida) disponibles. Incluso relativamente cerca de las superficies de agua, r permanecerá moderado: no hay tiempo suficiente para establecer un equilibrio térmico, la evaporación es relativamente lenta y el aire en movimiento pone en contacto nuevas masas de aire seco con la superficie del agua.

Sin embargo, en una capa estrecha cerca de la superficie del agua, el aire se mueve lentamente debido a la fricción contra la superficie del agua; considere que el grosor de esta (casi) capa de aire estancada sea δ (tenga en cuenta que δ depende de la velocidad del viento: el viento fuerte hace que la capa estanca-

da sea más estrecha. Las moléculas de aire en la capa estancada evitan que las moléculas de vapor de agua salgan hacia la mayor parte del aire: las moléculas de agua golpean a menudo las moléculas de aire y se mueven aleatoriamente de un lado a otro; como resultado, su velocidad de salida de la superficie del agua es lenta en comparación con la velocidad térmica. Si el camino libre medio λ de las moléculas de vapor es mucho más pequeño que el grosor de esa capa superficial (que normalmente es el caso), entonces podemos considerar por separado una capa delgada de aire que está directamente sobre la superficie del agua, con un grosor de pocos λ (esta capa es la parte más baja de la capa estancada). Dentro de esa capa, consideremos dos procesos: **primero**, las moléculas que saltan del agua a la capa delgada y luego regresan a la fase líquida después de realizar pocas colisiones con moléculas de aire; **segundo**, moléculas de vapor que salen de la capa de espesor estancada δ . Como $\lambda \ll \delta$, la escala de tiempo característica del primer proceso es mucho menor que la del segundo proceso. Si un proceso es mucho más rápido que el otro, se alcanza un cuasi equilibrio para el proceso más rápido. Por lo tanto, dentro de la capa delgada de espesor λ , el cuasi equilibrio térmico se alcanza entre las moléculas de agua en la fase líquida y la fase de vapor: las moléculas de agua saltan de la fase líquida casi tan a menudo como las moléculas de vapor golpean la superficie y se atascan en el líquido. Por la definición de la presión de saturación, esto significa que, dentro de la capa delgada, la presión de vapor es igual a la presión de saturación (a la temperatura de la superficie del agua).

Si no hubiera colisiones con las moléculas de aire, es decir, si el camino libre medio de las moléculas fuera muy grande y las moléculas que saltan de la superficie nunca volverían, la tasa de evaporación podría derivarse de la presión de vapor de saturación. De hecho, la presión de saturación completa puede dividirse en dos componentes: el impulso por unidad de tiempo y unidad de área, (a) intercambiados por aquellas moléculas que saltan del agua, con aquellas moléculas que permanecen en la fase líquida y (b) transferido por esas moléculas de vapor que golpean la superficie del agua y se “atascan” en ella, al agua líquida. En el equilibrio, ambos procesos tienen intensidades iguales, por lo tanto, ambos contribuyen con la mitad de la presión de saturación. Si faltara el segundo componente, la presión de vapor se reduciría a la mitad de la presión de saturación total y la intensidad de evaporación (número de moléculas que salen por unidad de tiempo y área de unidad) podría expresarse en términos de presión de saturación, temperatura y masa molar utilizando la teoría cinética de los gases.

Sin embargo, en la realidad, mientras no estemos tratando con la sublimación en el vacío, las moléculas de vapor no pueden salir libremente de la capa límite y muchas moléculas terminan chocando nuevamente con la superficie del agua y condensándose en ella. Luego, la tasa de evaporación efectiva se define por la interacción de dos procesos: las moléculas (a) saltan de la superficie del agua y (b) se difunden a través de la capa límite. Como se discutió anteriormente, directamente sobre la superficie del agua, el agua y los vapores están en equilibrio, es decir $r = 100\%$. En la parte superior de la capa estancada, el movimiento del aire trae aire fresco con una humedad relativa r igual a la de las grandes masas de aire. El grosor de la capa estancada depende principalmente de la velocidad del viento;

una capa más estrecha significa un mayor gradiente de concentración de vapor y, por lo tanto, un mayor flujo de moléculas de vapor, es decir, una mayor velocidad de evaporación. Por lo tanto, las cosas húmedas se secan más rápido si la humedad relativa del aire es baja y si hay un fuerte viento.

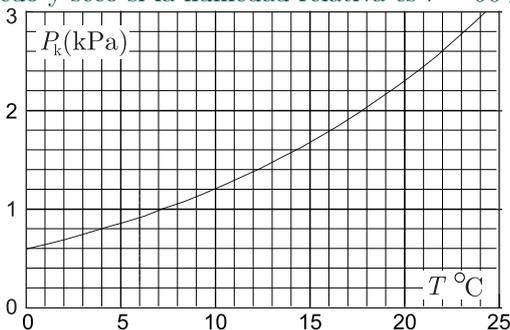
Idea 17: Si la dependencia entre dos cantidades físicas y y x se da como un gráfico donde y se traza versus x [$y = f(x)$] y se le pide que encuentre el valor de x (o f) y de consideraciones teóricas se puede derivar otra dependencia funcional entre f y x , por ejemplo $y = ax + b$, entonces la solución se puede encontrar como el punto de intersección de dos gráficos, $y = f(x)$ y $y = ax + b$.

Por lo tanto, es suficiente dibujar una línea $y = ax + b$ en el gráfico (proporcionado a usted) $y = f(x)$ y lea las coordenadas del punto de intersección. Si la dependencia teórica no es lineal, se incrementan los esfuerzos de trazado: o se vuelve a dibujar el gráfico $y = f(x)$ usando otras coordenadas, de tal manera que la dependencia teórica estaría dada por una línea recta, o trazar en el gráfico $y = f(x)$ dada la curva correspondiente a la dependencia teórica. En caso genérico, no hay necesidad de que la dependencia teórica sea una función lineal; sin embargo, las dependencias lineales no son demasiado raras. Por ejemplo, en el caso de los circuitos eléctricos, las leyes de Kirchhoff garantizan la linealidad, ver idea CE-22 del folleto de circuitos eléctricos.

Pr 22. [EstPhO-1997] Un método para encontrar la humedad relativa se basa en tomar las lecturas de un termómetro seco y otro húmedo. El termómetro húmedo tiene un paño húmedo envuelto alrededor de su sensor. Para que el método produzca un resultado preciso, debe soplar un viento sobre el sensor húmedo (puede crearlo con un ventilador). A lo largo de este problema, puede usar el gráfico de la presión de los vapores de agua saturada en función de la temperatura.

Cuando el viento sopla sobre el sensor húmedo, habrá dos procesos que influyen en la temperatura del sensor: primero, el viento elimina el aire de alta humedad cercano a la superficie del paño húmedo para que el agua pueda evaporarse; segundo, aumenta el flujo de calor desde el aire caliente hacia el sensor más frío al reducir el grosor de la capa de aire estancado donde se localiza la caída de temperatura. Para la pregunta a), puede despreciar el efecto del flujo de calor (es decir, asuma que la conductividad térmica del aire es muy pequeña). En lo que sigue, suponga que la temperatura del aire $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

a) Encuentre la diferencia de temperatura entre los termómetros húmedo y seco si la humedad relativa es $r = 90\%$.



b) Si suponemos que el viento sopla con una velocidad fija, entonces la potencia calorífica conductiva Q_c (medida en vatios)

es proporcional a la diferencia entre la temperatura del aire T_0 y la de la tela mojada T , $Q_c = a(T_0 - T)$. El coeficiente de proporcionalidad a depende de la forma y el tamaño de la tela mojada, así como de la velocidad del viento. Además de la potencia calorífica debido a la conductividad, también hay una potencia calorífica debido a la evaporación: las moléculas evaporadas eliminan el calor de acuerdo con el calor latente de la evaporación. Esta potencia calorífica por evaporación Q_e es proporcional a la velocidad de evaporación, que a su vez es proporcional a la diferencia de la presión de saturación (a la temperatura de la tela húmeda), $P_s(T)$ y, la presión de los vapores en el aire circundante, P_a . Así, $Q_e = b[P_s(T) - P_a]$, donde el coeficiente b depende de las mismas cosas que el coeficiente a .

Sin embargo, parece que la razón a/b es una cantidad que se puede suponer que es constante para una amplia gama de condiciones, suponiendo que la presión de saturación es mucho menor que la presión atmosférica. Depende lentamente de la presión y temperatura del aire, pero para cualquier temperatura y presión de aire razonables al nivel del mar se puede considerar que es igual a $a/b = 65 \text{ Pa/K}$. Teniendo en cuenta lo que se ha mencionado anteriormente, ¿cuál sería la lectura del termómetro húmedo si el aire está absolutamente seco (es decir, $r = 0$)?

c) Derive la expresión más simple posible para encontrar la diferencia entre las lecturas de los termómetros húmedos y secos dentro de la precisión relativa del 10% que podría aplicarse para $T_0 = 20^\circ\text{C}$ y para el rango de humedad $80\% < r < 100\%$.

d) Una secadora de ropa funciona de manera que no cae la luz solar directa sobre la ropa. En un caso, la humedad es del 95%, en el otro caso: 80%; todas las demás condiciones son exactamente las mismas. ¿Cuántas veces más rápido secará la ropa en el segundo caso?

Hecho 14: El líquido comenzará a hervir si la condición $P_s(T) > P_{\text{atm}}$ se satisface.

A la inversa, si $P_s(T) < P_{\text{atm}}$, la presión externa no permitirá la expansión de una burbuja: una presión externa mayor siempre comprimiría la burbuja a su tamaño inicial pequeño (definido por el tamaño de la impureza o el número de moléculas no solubles de algún otro gas en su interior).

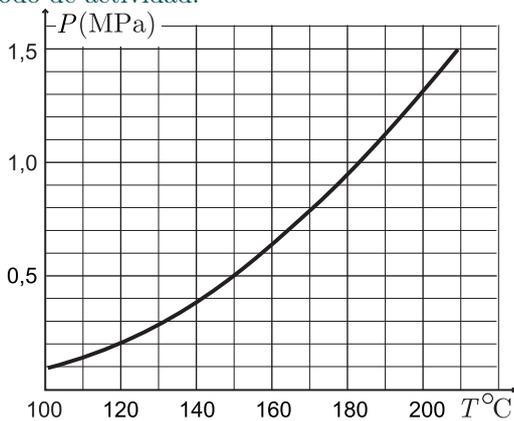
Solo los líquidos extremadamente limpios pueden estar casi libres de centros de evaporación, en cuyo caso es posible tener lo que se llama *líquidos sobrecalentados*: mientras $P_s(T)$ es un poco más grande que P_{atm} , debido a la ausencia de centros de evaporación dentro del líquido, la evaporación solo puede tener lugar en la superficie. Aunque este proceso es relativamente rápido (no se necesita viento para acelerar la evaporación ya que los vapores ahora pueden expulsar libremente el aire), no hay evaporación del bulto en forma de burbujas, es decir, no hay ebullición. Esto es muy similar a los vapores sobresaturados discutidos anteriormente. Además, en condiciones similares (de líquidos muy limpios) es posible tener *líquidos sobreenfriados* que permanecen en la fase líquida por debajo del punto de fusión. Por ejemplo, un agua muy limpia puede permanecer líquida a pocos grados por debajo de 0°C . Tanto para líquidos sobrecalentados como sobreenfriados, la agitación puede iniciar una transición de fase muy rápida: para el líquido sobrecalentado

do, el exceso de calor se libera a través del calor latente durante la evaporación parcial y en el caso del líquido sobreenfriado, parte del líquido se solidifica liberando calor latente y elevando la temperatura hasta el valor del punto de fusión.

Cabe señalar que el sobreenfriamiento también puede ocurrir con gotas de lluvia, lo que conduce al fenómeno conocido como escarcha glaseada: tan pronto como una gota golpea una superficie sólida (carretera, cables eléctricos, etc.), parte del agua se solidifica en esa superficie sólida.

Pr 23. Los géiseres pueden considerarse grandes depósitos subterráneos que se llenan de agua subterránea y se calientan con paredes calientes. Dicho depósito está conectado con la superficie de la tierra a través de un canal estrecho y profundo, que en el estado de reposo del géiser (período de inactividad) se llena con agua relativamente fría (las paredes del canal están frías y no calientan el agua dentro del canal). El géiser se activa cuando el agua en el depósito comienza a hervir; durante el período de actividad, el canal que conecta el depósito con la superficie del suelo se llena de vapores de agua. La tasa de suministro de agua dulce del reservorio es tan lenta que el flujo de entrada puede despreciarse durante el período de actividad (relativamente muy corto); mientras tanto, es tan rápido que todo el depósito y todo el canal (hasta la superficie del suelo) se llena con el agua durante el período de inactividad (relativamente muy largo).

Considere que la diferencia de altura entre los puntos finales del canal sea $h = 90$ m. El calor latente de evaporación del agua $\lambda = 2,26 \times 10^6$ J/kg; su calor específico $c = 4,2 \times 10^3$ J/kg · K. La dependencia de la presión de vapor de agua saturada con respecto a la temperatura se representa en el gráfico. Averigüe cuál es la fracción del agua en el depósito se pierde durante un solo período de actividad.



Si tenemos una interfaz entre dos líquidos, los hechos 13 y 14 deben combinarse: en las burbujas en la interfaz de dos líquidos, las moléculas de ambos líquidos pueden entrar en la fase de vapor. Según la ley de Dalton, la presión dentro de la burbuja será igual a $P_{1s} + P_{2s}$, donde P_{1s} y P_{2s} son las presiones de saturación del primer y segundo líquido a la temperatura dada, respectivamente.

Hecho 15: En la interfaz de dos líquidos, la ebullición puede comenzar a temperaturas considerablemente más bajas que en ambos líquidos, por separado: la ebullición comenzará cuando la condición $P_{1s} + P_{2s} > P_{atm}$ se satisface.

Pr 24. [IPhO-1989] Considere dos líquidos A y B insolu-

ble el uno en el otro. Las presiones P_i ($i = A, B$) de sus vapores saturados obedecen, en buena aproximación, la fórmula $\ln(P_i/P_0) = a_i/T + b_i$, donde P_0 denota la presión atmosférica normal, T la temperatura absoluta del vapor y a_i y b_i ($i = A, B$) son ciertas constantes dependiendo del líquido. Los valores de la razón P_i/P_0 , $i = A, B$, para los líquidos A y B a la temperatura 40°C y 90°C se dan en la tabla a continuación.

T ($^\circ\text{C}$)	P_A/P_0	P_B/P_0
40	0,248	0,07278
90	1,476	0,6918

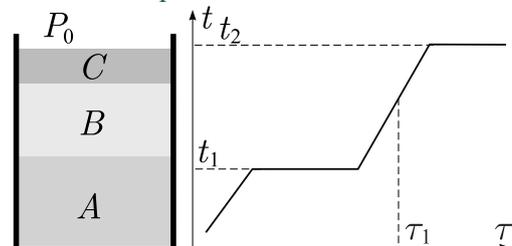
a) Determine las temperaturas de ebullición de los líquidos A y B bajo presión P_0 .

Los líquidos A y B se vertieron en un recipiente en el que se formaron las capas que se muestran en la figura. La superficie del líquido B se ha cubierto con una capa delgada de un líquido no volátil C , que es insoluble en los líquidos A y B y viceversa, evitando así cualquier evaporación libre de la superficie superior del líquido B , la razón de masas moleculares de los líquidos A y B (en la fase gaseosa) es $g = M_A/M_B = 8$.

Las masas de los líquidos A y B fueron inicialmente iguales, cada uno igual a $m = 100$ g. Las alturas de las capas de los líquidos en el recipiente y las densidades de los líquidos son lo suficientemente pequeñas como para suponer que la presión en cualquier punto del recipiente es prácticamente igual a la presión atmosférica normal P_0 . El sistema de líquidos en el recipiente se calienta lentamente, pero de manera continua y uniforme. Se estableció que la temperatura t de los líquidos cambiaron con el tiempo τ como se muestra esquemáticamente en la figura. Determine las temperaturas t_1 y t_2 correspondiente a las partes horizontales del diagrama y las masas de los líquidos A y B en el momento τ_1 . Las temperaturas deben redondearse al grado más cercano (en $^\circ\text{C}$) y las masas de los líquidos deben determinarse a una décima parte de gramo.

Observación: Suponga que los vapores de los líquidos, a una buena aproximación,

- (1) obedecen la ley de Dalton que establece que la presión de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales de los gases que forman la mezcla y
- (2) puede tratarse como gases perfectos hasta las presiones correspondientes a los vapores saturados.



4. TENSIÓN SUPERFICIAL

Como vimos en el capítulo anterior, las moléculas de una sustancia en la fase líquida están siendo atraídas por las otras moléculas líquidas y, por lo tanto, tienen una cierta energía potencial negativa con respecto al infinito. Observe que esas moléculas líquidas que están directamente en la interfaz líquido-gas están siendo atraídas por otras moléculas solo desde el lado de

la fase líquida. Por lo tanto, para las moléculas directamente en la superficie, en comparación con las moléculas en la mayor parte del líquido, el número de vecinos atrayentes es menor y, respectivamente, la energía potencial negativa también es menor por módulo. Esta energía negativa faltante puede interpretarse como una energía positiva de la superficie, que es proporcional al número de moléculas en la superficie, que a su vez es proporcional al área del líquido,

$$U = A\sigma,$$

donde el coeficiente de proporcionalidad σ se llama tensión superficial. A temperatura ambiente, generalmente toma valores de 17 mN/m (éter dietílico) a 73 mN/m (agua); y 480 mN/m para mercurio. En el caso del agua, concentraciones muy pequeñas de sustancias conocidas como tensioactivos pueden reducir la tensión superficial dos o tres veces.

Ahora, consideremos una forma rectangular $a \times b$ de una superficie líquida y un proceso donde aumentamos la longitud lateral a por Δa . Al hacerlo, aumentamos el área en $b\Delta a$ y por lo tanto, la energía superficial por $\sigma b\Delta a$. A medida que aumentaba la energía, se debe haber hecho algo de trabajo. Para aumentar la longitud lateral a , necesitábamos tirar de un borde de longitud b por Δa . Supongamos que, para hacerlo, una fuerza F es necesitada. Entonces, desde el balance energético podemos equiparar el trabajo realizado $F\Delta a$ con el aumento de energía $\sigma b\Delta a$; entonces,

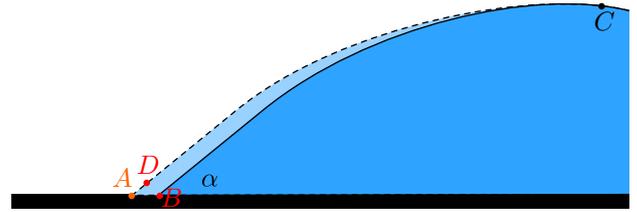
$$F = \sigma a,$$

es decir, σ es la fuerza por unidad de longitud. En resumen, de manera similar a la tensión en la cuerda, podemos decir que si hacemos una línea de corte imaginaria de longitud L en la superficie, las dos mitades de la superficie tiran de cada una con fuerza $F = \sigma L$.

Tenga en cuenta que la tensión superficial existe no solo en una superficie líquida libre, es decir, en la interfaz líquido-aire, sino también en las interfaces líquido-líquido entre dos líquidos insolubles, interfaces líquido-sólido, interfaces sólido-gas e interfaces sólido-sólido. Sin embargo, a menos que tengamos objetos a escala nanométrica (o más pequeños), en cuyo caso la razón área-volumen (y, junto con ella, la importancia relativa de la energía superficial) es anormalmente grande, la tensión superficial no tiene efectos notables en las interfaces sólido-sólido y sólido-aire debido al hecho de que el tamaño y la forma de estas superficies está fijado por la forma de los cuerpos sólidos. Como excepción, la energía de una interfaz de aire-sólido se vuelve importante si es adyacente a una interfaz sólido-líquido y sólido-aire. Consideremos este caso con más detalles.

Consideremos la línea de contacto de tres sustancias, un gas (por ejemplo, aire), un líquido (por ejemplo, agua) y un sólido (por ejemplo, un vaso donde se guarda el agua). Por lo tanto, tenemos interfaces de gas-líquido, gas-sólido y líquido-sólido; considere que las tensiones superficiales respectivas sean σ_{1-g} , σ_{s-g} y σ_{s-1} . Estudiemos el equilibrio para la posición de la línea de contacto de las tres sustancias. La superficie sólida no se puede deformar, por lo que esta línea de contacto solo puede moverse a lo largo de la superficie sólida. Ahora, suponga que la longitud de la línea de contacto es L y se movió hacia la fase líquida desde su posición inicial por una pequeña distancia $|AB| = a$, vea la figura que representa una sección transversal

del sistema. Luego, la energía superficial de gas-sólido aumentó en $\sigma_{s-g}aL$ y la energía superficial sólido-líquido se redujo en $\sigma_{s-1}aL$. Suponga que las superficies líquido-aire y sólido-líquido forman un ángulo α , ver figura. Tenga en cuenta que la figura se dibuja suponiendo que el volumen total del líquido es tan grande que el volumen del líquido desplazado ABC fluyendo hacia la derecha del punto P no incurre en cambios significativos en la forma de la superficie líquida en esa región. Entonces, el desplazamiento de la línea de contacto reducirá la energía de la superficie líquido-aire en $\sigma_{1-g}aL \cos \alpha$. De hecho, desde el triángulo rectángulo ABC , la longitud de la superficie del líquido-gas disminuye en $|AD| = |AB| \cos \alpha$ (ignoramos la diferencia de longitud $|CD| - |CB|$ que es diminuto en segundo orden en el parámetro pequeño $|AB|/|AC|$).



Ahora podemos concluir usando el balance de energía que es energéticamente favorable que la línea de contacto se mueva hacia la derecha si $\sigma_{1-g} \cos \alpha + \sigma_{s-1} > \sigma_{s-g}$ y hacia la izquierda, si se mantiene la desigualdad opuesta; el equilibrio solo es posible si

$$\sigma_{1-g} \cos \alpha + \sigma_{s-1} = \sigma_{s-g}.$$

Ahora podemos expresar para el llamado ángulo de contacto α

$$\cos \alpha = \frac{\sigma_{s-g} - \sigma_{s-1}}{\sigma_{1-g}}.$$

En el caso de líquidos y superficies normales, el ángulo de contacto es mayor que 0 y menor que π ; casos con $\alpha < \pi/2$ se conocen como *hidrófilos* o *humectantes* y los casos con $\alpha > \pi/2$ como *hidrofóbico* o *no humectante*. En caso de *humectación perfecta*, $\cos \alpha = 1$. En el caso de valores aún menores de σ_{1-g} nosotros obtendríamos $\cos \alpha > 1$, lo cual es claramente imposible; en cambio, la desigualdad $\sigma_{1-g} + \sigma_{s-1} < \sigma_{s-g}$ significa que la tensión superficial de gas-sólido σ_{s-g} es tan grande y las tensiones superficiales del líquido son tan pequeñas que es energéticamente útil que una gota de líquido se disperse sobre toda la superficie sólida para que quede completamente cubierta con una capa delgada de líquido. Si dicho líquido se mantiene en un recipiente con paredes verticales, sería incluso energéticamente favorable que el líquido “trepara” a lo largo de las paredes: en el caso de una capa de líquido extremadamente delgada, la energía potencial gravitacional sería insignificante. Sin embargo, la velocidad de flujo del líquido en una capa extremadamente delgada será extremadamente lenta debido al arrastre viscoso. Debido a eso, tal comportamiento puede observarse solo si no hay arrastre viscoso, en el caso de *superfluides* (helio a temperaturas muy bajas).

Si hubiera interfaces con $\sigma_{1-g} + \sigma_{s-g} \leq \sigma_{s-1}$, sería energéticamente favorable mantener un espacio de aire estrecho entre el líquido y el sólido: el líquido no se adheriría a la superficie y las gotas de líquido podrían moverse esencialmente sin un arrastre a lo largo de la superficie. Si bien no existen tales superficies, existen interfaces para las cuales $\cos \alpha$ es bastante cercano a -1 . Por ejemplo, el ángulo de contacto del mercurio en la mayoría de las superficies es de alrededor de 140° .

Pr 25. Para algunos materiales naturales (por ejemplo, hojas de loto) y para materiales con revestimientos nanotecnológicos modernos, el ángulo de contacto de los líquidos aumenta debido a la microestructura de la superficie: hay “bigotes” microscópicos que mantienen las gotas en las puntas de los bigotes y reducir así el área de contacto entre el líquido y el material sólido. Si el área de contacto aparente de una gota con dicha superficie es A y el área de contacto real debido a los bigotes microscópicos es rA con $r = 0,006$, ¿Cuál es el ángulo de contacto? Suponga que sin “bigotes”, el ángulo de contacto sería $\alpha_0 = 110^\circ$.

Tenga en cuenta que la condición de energía mínima también se puede interpretar como la condición de equilibrio de fuerza para la línea donde se encuentran las tres fases (punto A en la figura): las fuerzas σ_{l-g} , σ_{s-l} y σ_{s-g} (por unidad de longitud) tiran de las moléculas líquidas en la línea de contacto trifásica a lo largo de las interfaces líquido-gas, sólido-líquido y sólido-gas, respectivamente. Por lo tanto, entonces la igualdad $\sigma_{l-g} \cos \alpha + \sigma_{s-l} = \sigma_{s-g}$ representa la condición de equilibrio para la dirección horizontal (a lo largo de la cual la línea podría moverse si el área cubierta por el líquido se contrajera o expandiera).

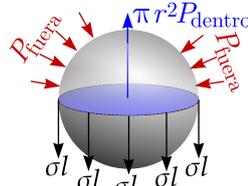
Resumamos lo que hemos aprendido.

Hecho 16: Las interfaces entre fases transportan energía; cada interfaz se caracteriza por el coeficiente de tensión superficial σ que da la energía por unidad de área. Como consecuencia directa, σ también proporciona la fuerza por unidad de longitud de un corte ficticio de la interfaz (conocida como *tensión superficial* o *fuerza capilar*).

Ahora, estudiemos la *presión capilar*, que es la presión manométrica debido a la interfaz esférica líquido-aire de radio r , como se tendría en el caso de una burbuja dentro de un líquido, o una pequeña gota flotando en el aire. Dividamos la burbuja en dos mitades por un plano que pase por su centro y consideremos el equilibrio de fuerzas para una de las mitades. Para empezar, necesitamos una nueva idea.

Idea 18: A menudo es útil considerar una condición de equilibrio de fuerza para una parte separada ficticiamente de un líquido que involucra fuerza de gravedad, fuerza de tensión superficial y fuerza debida a la presión hidrostática.

Consideremos, por ejemplo, una burbuja de aire dentro de un líquido y cortemos ficticiamente en dos mitades iguales por una superficie plana. El cuerpo para el que escribimos el equilibrio de fuerza consiste en el aire dentro de la media burbuja y la interfaz hemisférica líquido-aire a su alrededor. Las fuerzas que actúan sobre este cuerpo son: la fuerza capilar a través de la línea de corte que tira hacia la otra mitad, $F_1 = 2\pi r\sigma$; la fuerza debida a la presión hidrostática P_{dentro} dentro de la burbuja, $F_2 = \pi r^2 P_{dentro}$, ejercido por la otra mitad de la burbuja y separando las dos mitades una de la otra; la fuerza F_3 debido a la presión hidrostática P_{fuera} fuera de la esfera actuando en la misma dirección que la fuerza capilar. Tenga en cuenta que P_{fuera} actúa sobre una superficie curva para que el cálculo de la fuerza resultante requiera integración

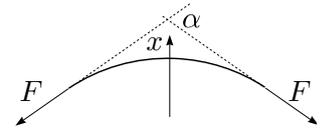


$P_{fuera} \hat{i} \cdot d\vec{A}$, donde \hat{i} es un vector unitario a lo largo del eje del hemisferio y $d\vec{A}$ es un elemento de superficie infinitesimal (su módulo es igual al área de superficie correspondiente y apunta paralela a la superficie normal). Sin embargo, si dicho hemisferio estuviera rodeado tanto de los lados curvos como planos por la misma presión hidrostática (como la mitad de una sandía sujeta a la presión del aire en la atmósfera), el cuerpo obviamente permanecería quieto, es decir, las fuerzas de presión a ambos lados sería igual. Por lo tanto, $F_3 = \pi r^2 P_{fuera}$. Y así, la condición de equilibrio para el hemisferio se escribe como $\pi r^2 P_{fuera} + 2\pi r\sigma = \pi r^2 P_{dentro}$, entonces

$$P_{dentro} - P_{fuera} = 2\sigma/r.$$

En el caso de una superficie cilíndrica, podemos usar un enfoque completamente similar para obtener $P_{dentro} - P_{fuera} = 2\sigma/r$.

Sin embargo, la geometría cilíndrica se puede analizar también utilizando un enfoque diferente: considere el equilibrio de fuerza para un elemento de superficie muy pequeño (en la figura, $\alpha \ll 1$) en dirección perpendicular a la superficie (el eje x en la figura). La fuerza de tensión superficial F , tangente a la superficie, se aplica a los bordes del elemento de superficie, produciendo $F_x = -\frac{1}{2}\sigma l \sin \alpha \approx -\frac{1}{2}\sigma l \alpha$ (l es la longitud del elemento de superficie perpendicular al plano de la figura). El área del elemento de superficie $\Delta A = lR\alpha$ y, por lo tanto, el balance de fuerza se escribe como $(P_{dentro} - P_{fuera})lR\alpha = 2F_x = \sigma l \alpha$, resultando de inmediato $P_{dentro} - P_{fuera} = \sigma/r$. Observe también que, en la figura anterior, se puede pensar que la interfaz líquido-gas es una cuerda de tensión T , en cuyo caso obtenemos la fuerza normal por unidad de longitud de la cuerda $n = T/R$.



Finalmente, el último párrafo ilustra un método muy importante y universal en física, el enfoque de *cálculo diferencial*. El cálculo diferencial tiene muchas utilidades: por ejemplo, en matemáticas, hablamos más a menudo sobre derivar e integrar y resolver ecuaciones diferenciales. En física, es una habilidad muy útil para saber cómo demostrar que una u otra cantidad física es cierta integral (ver idea CE-2 del folleto de circuitos eléctricos). Tratemos de dar una receta específica: el resumen sobre lo que se hizo en el párrafo anterior.

Idea 19: Considere pequeños volúmenes (segmentos de línea, etc., infinitesimales) y escriba los balances de fuerza y/o leyes de conservación aplicables para que estos volúmenes deriven una relación entre cantidades físicas o ecuaciones diferenciales que describan una cantidad física en función de otras cantidades. Aproveche lo diminuto de estas cantidades: desprecie cualquier cosa que tenga un mayor orden de pequeñez (por ejemplo, pequeñas cantidades al cuadrado).

Resumamos también los resultados de la presión capilar.

Hecho 17: La presión manométrica debida a las fuerzas capilares a través de una interfaz curva es $\Delta P = \sigma/r$ en geometría esférica y $\Delta P = \sigma/r$ en geometría cilíndrica.

Parece que estas expresiones pueden generalizarse a formas arbitrarias de la interfaz; aquí solo proporcionamos el resultado,

$$P_{dentro} - P_{fuera} = \sigma(r_1^{-1} + r_2^{-1}),$$

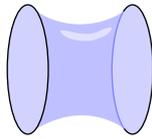
donde r_1 y r_2 son los radios de curvatura de dos curvas en su punto de cruce P ; las dos curvas se forman como las líneas

de intersección de la interfaz aire-líquido con dos planos, suponiendo que las tres superficies son mutuamente perpendiculares en el punto P . Se puede demostrar que mientras las curvaturas individuales r_1 y r_2 dependan de la orientación de los dos planos, la suma $\sigma(r_1^{-1} + r_2^{-1})$ permanece invariable cuando los planos giran alrededor del dibujo normal a través del punto P a la interfaz aire-líquido.

En particular, el volumen de un menisco, la masa de una gota que cae de un tubo de agua, etc., se puede encontrar usando la idea 18, es decir, de la condición de equilibrio de fuerza para la fuerza de tensión superficial y la fuerza de gravedad. El siguiente problema sirve como ilustración aquí.

Pr 26. [EstPhO-1995] Una probeta tiene volumen $V = 100$ ml y altura $h = 20$ cm. Hay líneas de marcador dibujadas en el cilindro después de cada 1 ml. Suponga que el cilindro se usa para medir el volumen de agua y la lectura se toma de acuerdo con el punto más bajo de la superficie curva del agua. ¿Qué tan grande es el error debido al hecho de que la superficie del agua es curva y no plana? Coeficiente de tensión superficial para el agua $\sigma = 0,073$ N/m; suponga que el agua moja perfectamente las paredes del cilindro.

Pr 27. [EstAcadPhO-2003] Dos anillos coaxiales de radio $R = 10$ cm se colocan a distancia L de cada uno. Hay una película de jabón que conecta los dos anillos como se muestra en la figura. Derive una ecuación diferencial que describe la forma $r(z)$ de la película, donde r es la distancia radial de la película desde el eje de simetría, como la función de la distancia z a lo largo del eje. Demuestre que $\cosh x$ es una de sus soluciones. Cuando la distancia entre anillos aumenta lentamente, a cierta distancia crítica L_0 , se rompe la película de jabón. Encuentre L_0 .

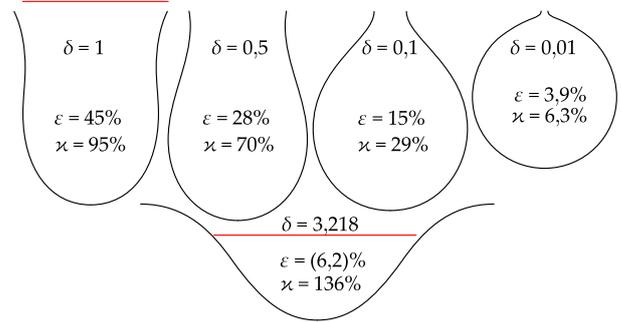


Es tentador aplicar la idea 18 a las gotas que caen de un grifo, pajilla o jeringa, para relacionar la masa de una gota con el diámetro interno del grifo.

Pr 28. Considere las gotas que caen de una jeringa cuando la jeringa A se mantiene verticalmente apuntando hacia abajo; se presiona lentamente para que caigan gotas de líquido desde la punta de la aguja (la punta de la aguja es plana, es decir, se corta perpendicularmente a su eje). La tensión superficial del líquido es σ , su densidad es ρ , la aceleración de caída libre es g y el diámetro interno de la aguja d ($d \ll \sqrt{\sigma/\rho g}$) Encuentre la masa m de una gota que cae (corrija su respuesta teniendo en cuenta la pequeña fuerza de presión debida a la presión manométrica dentro de la gota).

Este enfoque es, de hecho, válido si el diámetro interno d del grifo/jeringa es pequeño. Sin embargo, si ese no es el caso, el problema se vuelve mucho más complicado. Basado en el equilibrio de fuerza estática para las capas horizontales de una gotita en crecimiento, se puede componer una ecuación diferencial para determinar la forma de la gotita. Cuando se inyecta líquido en la gotita, está creciendo y su forma está cambiando; en cierto momento, se alcanza el tamaño máximo: con volúmenes de gotas más grandes, para el diámetro dado del grifo, no hay soluciones de la ecuación diferencial. Este es el momento en que cae la gota. En la figura a continuación, las formas de las

gotas que caen se representan para diferentes radios de jeringas (grifos) r (indicado en unidades adimensionales, $\delta = r/\lambda$, donde $\lambda = \sqrt{\sigma/\rho g}$ es la escala de longitud característica en la cual las presiones capilares e hidrostáticas tienen el mismo orden de magnitud, $\sigma/\lambda = \rho g \lambda$).



Se pueden detectar dos problemas que pueden invalidar la solución del problema 28 para $\delta \gtrsim 0,5$: (a) en el borde superior de la gota (donde está conectado al grifo), las paredes de la gota ya no son verticales (por lo tanto, el equilibrio de la fuerza debe incluir el coseno del ángulo entre una línea vertical y la tangente de la superficie); (b) la fuerza de presión debida a la presión manométrica dentro de la gotita debe calcularse con mayor precisión (radios de curvatura y , por lo tanto, la presión manométrica cambia a lo largo de la altura de la gotita). Además, no está claro qué parte de la gota se separa del grifo cuando la gota comienza a caer: aparentemente es algo menor que todo el volumen representado en la figura. La figura anterior indica la corrección relativa de la masa de la gota ϵ debido a los efectos mencionados anteriormente (para $\delta = 0,5$ y $\delta = 1$, se supone que lo que se separa como una gota que cae es la parte debajo de la parte más estrecha de la gota). El parámetro κ muestra la diferencia relativa de las presiones del medidor en la parte inferior y en la parte superior de la gota; la línea roja muestra el nivel de presión manométrica cero.

El caso $\delta = 3,218$ (también se muestra en la figura) produce la gota más grande (teniendo en cuenta todo el volumen debajo del borde del grifo); también es la gota que cuelga de un techo horizontal cuando los vapores de agua se condensan sobre ella. Cuando el radio del grifo se incrementa aún más, las gotas se vuelven aún más planas y en $\delta \approx 3,83$, la altura de la gota se convierte en cero. Cuando el radio del grifo es mayor que $3,83\lambda$, el grifo ya no puede contener agua: debido a lo que se conoce como la *inestabilidad de Rayleigh-Taylor*, el agua fluye.

Idea 20: Los estados de equilibrio de un sistema se pueden encontrar como su estado de energía total mínimo; esto es válido no solo para sistemas mecánicos, sino también para sistemas que involucran fenómenos termodinámicos (electromagnéticos, etc.).

Pr 29. [EstPhO-1995] Un líquido se vierte sobre una superficie horizontal totalmente no humectante donde forma una "piscina" (una capa de líquido). Encuentre el grosor de la capa si la densidad del líquido es ρ y el coeficiente de tensión superficial es σ . ¿Cuál sería el espesor si fuera un líquido parcialmente humectante, con un ángulo entre las interfaces aire-líquido y líquido-sólido igual a α ($0 < \alpha < \pi$)?

Pr 30. Encuentre la altura del menisco en el caso del problema 26, es decir, la diferencia de altura entre los puntos más alto y más bajo de la interfaz aire-líquido. Use los datos del problema 26; la densidad del líquido es ρ .

Finalmente, con respecto a las inestabilidades debidas a la tensión superficial: cualquier líquido intenta tomar la forma de energía mínima, que en el caso de ingravidez es una esfera. Debido a eso, cualquier otra forma, como cilíndrica o plana (películas de jabón) es inestable. En el caso de una forma cilíndrica, la inestabilidad evoluciona bastante rápido; considere el siguiente problema.

Pr 31. [Seagull-2014] Debido a la inestabilidad (conocida como inestabilidad Plateau-Rayleigh), una corriente de agua del grifo se rompe en gotas a cierta altura. Este proceso puede ser modelado por la inestabilidad de un cilindro de agua largo en ingravidez. Considere que el diámetro del cilindro es $d = 1$ mm; estime el periodo T durante el cual la amplitud de las perturbaciones más inestables aumentará en un factor de $e \approx 2,718$. La tensión superficial del agua $\gamma = 72$ g/s² y la densidad $\rho = 1$ g/cm³.



Debido a la misma razón, las gotas que caen no tienen la forma de una gota, porque una punta afilada implicaría una gran presión capilar debajo de la punta y empujaría el fluido inmediatamente hacia las regiones de menor presión (radio de curvatura más grande). En cambio, las gotas que caen toman una forma que (debido al arrastre de aire) es similar a la forma de pequeñas gotas que descansan sobre una superficie hidrofóbica: ligeramente elipsoidal. Del mismo modo, las películas delgadas son inestables, pero en el caso de las películas muy delgadas (películas de jabón), el tiempo característico para el crecimiento de inestabilidades es muy grande. Las películas de jabón son, por lo tanto, bastante estables y se pueden encontrar a menudo en problemas; en ese caso, no olvide el factor “2” para presiones, fuerzas y energías que reflejan el hecho de que **una película tiene dos interfaces: ¡internas y externas!**

5. CICLO DE CARNOT Y ENTROPÍA

La teoría clásica de la termodinámica se basa en el concepto de *procesos reversibles*.

Definición 11: Los procesos reversibles son procesos para los cuales el sistema bajo consideración está siempre en un cuasi-equilibrio termodinámico (aquellas partes del sistema que están en contacto térmico deben tener casi la misma temperatura) y no debe haber disipación (es decir, conversión de energía mecánica en calor) dentro del sistema.

Por lo tanto, el sistema puede tener dos o más partes aisladas térmicamente de diferentes temperaturas, pero cada una de esas partes debe estar aislada térmicamente (no debe haber flujo de calor entre ellas). Tan pronto como se permite que el calor fluya de una parte a otra, las temperaturas de estas partes deben ser casi iguales: en ese caso, la dirección del flujo de calor se puede revertir cambiando las temperaturas solo en una cantidad muy pequeña. Para un proceso perfectamente

reversible, la diferencia de temperatura debe ser infinitamente pequeña, de modo que el cambio de temperatura requerido para una reversión del proceso sea infinitamente pequeño. Sin embargo, dicho proceso también sería infinitamente lento, porque la velocidad de flujo de calor entre los cuerpos también sería infinitamente pequeña. Por lo tanto, los procesos reales pueden estar razonablemente cerca de ser reversibles, pero nunca perfectamente reversibles. Observe que, para un proceso inverso, todas las cantidades (calor intercambiado, trabajo) obtienen signos opuestos.

Como se mencionó anteriormente, la mejor definición de temperatura se basa en la termodinámica estadística; esto, sin embargo, se basa en la mecánica cuántica y en la era pre-mecánica cuántica, se utilizó una definición diferente, la de Kelvin. Como ya estamos equipados con la definición estadística de temperatura, no es estrictamente necesario hablar sobre la de Kelvin: en el caso de temperaturas positivas, estas dos son idénticas. Sin embargo, la discusión sobre la escala de temperatura de Kelvin nos sirve como un ejercicio útil y proporciona información adicional sobre la termodinámica.

La definición de temperatura de Kelvin se basa en el *ciclo de Carnot*, que se discutirá más adelante con más detalles; aquí es suficiente para saber su definición.

Definición 12: El ciclo de Carnot es un proceso reversible con un gas que tiene cuatro etapas:

- (i) el gas se expande isotérmicamente (es decir, a una temperatura constante) mientras recibe calor lentamente Q_1 desde un depósito de calor⁵ a una temperatura T_1 ,
- (ii) se expande adiabáticamente (es decir, lentamente sin recibir ni emitir calor) y, por lo tanto, se enfría (véase el hecho 12) a una temperatura T_2 ;
- (iii) el gas se pone en contacto térmico con otro depósito de calor de temperatura T_2 ; el gas desprende calor Q_2 al depósito y se contrae isotérmicamente;
- (iv) el gas se comprime adiabáticamente hasta que alcanza la temperatura T_1 .

Tenga en cuenta que hasta ahora no tenemos definiciones cuantitativas de temperatura, pero sabemos que las temperaturas T_1 y T_2 son diferentes, $T_1 > T_2$: basados en el hecho 2 sabemos que si los depósitos se pusieran en contacto, habría un flujo de calor del primero al segundo.

Dado que la presión del gas cae cuando se enfría (ver sección 3), el trabajo mecánico neto realizado por el gas durante todo el ciclo es positivo (contribución de la etapa de expansión $W_1 = \int_{\text{exp}} P dV > 0$ domina sobre el de la etapa de contracción, $W_2 = \int_{\text{contr}} P dV < 0$). Por lo tanto, debido a la 1LTD, $Q_1 = Q_2 + W_1 + W_2 > Q_2$. Entonces, el sistema funciona como un motor térmico: la diferencia de calor va al trabajo mecánico $W = Q_1 - Q_2$; la razón $\eta \equiv \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ es llamada la *eficiencia del motor térmico*.

Definición 13: El motor térmico es un dispositivo que convierte la energía térmica en un trabajo mecánico utilizando una diferencia de temperatura entre los cuerpos de calentamiento y enfriamiento; la bomba de calor utiliza el trabajo mecánico para “bombear” energía térmica de un cuerpo con temperatura más baja a un cuerpo con temperatura más alta. El motor

⁵Reservorio de calor: un cuerpo térmicamente tan grande que recibir o dar algo de calor no causará ningún cambio notable en su temperatura.

térmico ideal se basa en el ciclo de Carnot; la bomba de calor ideal utiliza el ciclo de Carnot invertido (todas las etapas están invertidas: la contracción se sustituye por expansión, el enfriamiento se sustituye por calentamiento, etc.).

Pr 32. Demuestre que, para un ciclo de Carnot, la eficiencia puede depender solo de las temperaturas de los cuerpos de calentamiento y enfriamiento y no depende de qué gas se use como gas de trabajo.

La solución aquí se basa en el 2LTD, que formulamos como una idea.

Idea 21: La 2LTD puede usarse para demostrar por contradicción imposibilidad o inexistencia de varias cosas. Con ese fin, es necesario demostrar que cuando se supone que lo contrario es cierto, se puede construir un esquema mediante el cual la energía se transfiere de un cuerpo de temperatura más baja a un cuerpo con una temperatura más alta mientras no se realiza ningún trabajo neto. Estas construcciones generalmente utilizan motores de calor y/o bombas de calor ideales.

La solución del problema 32 se puede usar directamente para demostrar una declaración más genérica (y muy útil), que formulamos como un hecho.

Hecho 18: Cualquier motor térmico reversible (no necesariamente basado en el ciclo de Carnot) que toma calor de un baño de calor a una temperatura fija única T_1 y da calor a otro baño de calor a otra temperatura fija T_2 , debe tener (y tiene) exactamente la misma eficiencia que un ciclo de Carnot, $\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. Para motores térmicos no ideales (no reversibles), la eficiencia solo puede ser menor que η_C y nunca más grande que eso.

Esta expresión de eficiencia se deriva directamente de la siguiente definición de temperatura. Según el problema 32, la razón Q_2/Q_1 es una cantidad que depende solo de las temperaturas de los reservorios de calor. Este hecho puede usarse para cuantificar las temperaturas definiendo la razón de las temperaturas de dos cuerpos como

$$T_1/T_2 = Q_1/Q_2,$$

donde Q_1 y Q_2 son las cantidades de calor recibidas y dadas, respectivamente, por un ciclo ficticio de Carnot que usa estos dos cuerpos como reservorios de calor de calentamiento y enfriamiento. Esta es la definición de temperatura de Kelvin; la unidad de temperatura 1 K se define postulando que la temperatura del punto triple⁶ del agua es $T_0 = 273,16$ K. Este valor para T_0 se elige de modo que a la presión atmosférica, la diferencia de las temperaturas de ebullición y fusión del agua sea igual a 100 K. Tenga en cuenta que con esta definición, la eficiencia del ciclo de Carnot se puede reescribir como $\eta_C = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

Pr 33. Demuestre que el hecho 18 es una consecuencia del hecho 2.

Como se mencionó, en termodinámica estadística se demuestra que con la definición estadística de temperatura (de la ley de Boltzmann) \tilde{T} , en el caso de un ciclo de Carnot

$Q_1/Q_2 = \tilde{T}_1/\tilde{T}_2$. Esto significa que la definición de Kelvin y la definición de la mecánica estadística son idénticas; la igualdad de unidades se logra si la constante k en la ley de Boltzmann es igual a $k_B \approx 1,38 \times 10^{-23}$ J/K.

Pr 34. [IPhO-1992] Un fabricante anuncia una pintura especial de la siguiente manera: “Esta pintura reflejará más del 90 % de toda la radiación entrante (luz visible e infrarroja) pero irradiará en todas las frecuencias (luz visible e infrarroja) como un cuerpo negro, por lo tanto, eliminando mucho calor del satélite. Por lo tanto, la pintura ayudará a mantener el satélite lo más fresco posible”. ¿Puede existir tal pintura? ¿Por qué o por qué no?

Una consecuencia de este problema es que las propiedades de radiación y absorción de un material deben ser idénticas en todo el espectro. Se puede demostrar de manera similar que un material parcialmente reflectante debe tener la misma transmitancia desde ambos lados. Puede parecer que los vidrios oscuros de las ventanas son más transparentes cuando se mira desde el interior de una habitación oscuramente iluminada, pero esto es una mera ilusión: cuando se mira desde afuera, una pequeña fracción de abundante luz exterior reflejada puede dominar fácilmente sobre la parte transmitida de la luz que viene de adentro, pero lo contrario no es cierto. El efecto puede mejorarse superponiendo capas absorbentes y reflectoras y poniendo la capa reflectora hacia afuera. Entonces, mientras la transmitancia total es igual desde ambos lados, la reflectancia desde el exterior es mayor porque desde el exterior, la luz reflejada no pasa a través de la capa absorbente.

Idea 22: El hecho 18 de que todos los motores de calor reversibles tienen la misma eficiencia $\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ se puede usar para resolver una serie de problemas.

En primer lugar, esta idea se aplica a todos los problemas relacionados con los motores térmicos si estos motores implican baños de calor con exactamente dos temperaturas diferentes. En particular, se debe tener en cuenta que los dispositivos basados en el efecto termoelectrico (véase el hecho 20) pueden ser teóricamente reversibles (por supuesto, la disipación óhmica en tales dispositivos es irreversible y, por lo tanto, debe excluirse del equilibrio de energía). En algunos casos, es posible resolver un problema (derivar una ecuación) haciendo un experimento mental con un motor de calor hipotético diseñado adecuadamente, vea el siguiente problema.

Pr 35. Derive la igualdad de Clausius-Clapeyron que relaciona la derivada con respecto a la temperatura de las presiones de saturación de una sustancia, $\frac{dP_s}{dT}$, al calor latente de evaporación λ , temperatura T , presión de saturación P_s y masa molar μ .

¿Cuánto cambiará la presión de los vapores saturados de agua si la temperatura disminuye de $T_0 = 100,0^\circ\text{C}$ a $T_1 = 99,9^\circ\text{C}$? la presión atmosférica es $P_0 = 1,0 \times 10^5$ Pa, calor latente de evaporación para agua $L = 2260$ kJ/kg. Sugerencia: considere el ciclo de Carnot donde el trabajo está siendo realizado por vapores de agua y los depósitos de refrigeración y calefacción están hechos de agua, a temperaturas T_0 y T_1 , respectivamente.

⁶Punto triple de una sustancia: tal combinación de temperatura y presión que los estados sólido, líquido y gaseoso están en equilibrio térmico entre sí.

Pr 36. Tenga en cuenta que la igualdad de Clausius-Clapeyron se puede escribir como la ley de Boltzmann, $P_s = P_0 e^{-U/k_B T}$; exprese U en términos de los parámetros enumerados en el problema 35, e interpréte los físicamente.

Definición 14: Entropía clásica (no relacionada con la mecánica cuántica) S se define solo a través de incrementos (de manera similar a la energía potencial):

$$\Delta S = \Delta Q/T,$$

donde ΔQ es el calor dado al sistema y T es la temperatura del sistema.

Conclusión: el proceso adiabático es un proceso isentrópico.

Mientras que en la termodinámica clásica, solo se definen los incrementos de entropía, en la termodinámica estadística que se basa en la mecánica cuántica, los valores absolutos de la entropía están bien definidos; en términos generales, es $S = k_B \ln N$, donde N es el número de estados cuánticos excitados térmicamente; más precisamente $S = -k_B \langle \ln p_i \rangle_i$, donde p_i es la probabilidad del i -ésimo estado cuántico y las llaves angulares denotan promedios sobre todos los estados posibles. Usando estadísticas matemáticas, uno puede demostrar que esta definición produce $\Delta S = \Delta Q/T$, de acuerdo con la definición clásica.

Es bastante fácil ver que para un sistema cerrado que experimenta procesos reversibles, se conserva la entropía. De hecho, dado que el intercambio de calor entre sus diferentes partes tiene lugar a la misma temperatura, entonces al intercambiar una cierta cantidad de calor, las dos partes obtienen el mismo por módulo e incrementos de entropía opuestos. Sin embargo, en el caso de procesos irreversibles, de acuerdo con el 2LTD (idea 2) esa parte del sistema que emite calor ($-\Delta Q < 0$) tiene una temperatura mayor que la parte que recibe el calor, $T_1 > T_2$. Por lo tanto, el cambio total de entropía para todo el sistema $\Delta S = -\frac{\Delta Q}{T_1} + \frac{\Delta Q}{T_2} > 0$ es positivo.

Hecho 19: La entropía de un sistema cerrado permanece constante en procesos reversibles y crece en procesos irreversibles.

Al estar equipados con la definición estadística de entropía, podemos decir que, si un sistema evoluciona solo, el número total de estados cuánticos excitados solo puede crecer. Esto se puede demostrar formalmente usando estadística. El número de estados excitados también puede considerarse como un parámetro que describe el grado de orden: los estados más ocupados implican menos orden. Por lo tanto, el grado de orden de un sistema cerrado solo puede aumentar. Puede usar esto como una excusa si su habitación se vuelve desordenada.

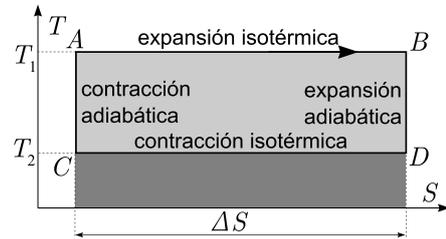
Finalmente, observe que los hechos 19 y 18 a menudo también se conocen como 2LTD, lo cual está bien, ya que son equivalentes al hecho 2: una reducción de entropía significaría directamente que el calor se ha transferido de un cuerpo de temperatura más baja a uno de temperatura más alta.

Ya hemos demostrado equivalencia entre el hecho 2 y 19. Una hipotética máquina de calor con $\eta > \eta_C$ se conoce como máquina de movimiento perpetuo de segundo tipo y es tan imposible como la máquina de movimiento perpetuo de primer tipo (el que viola la ley de conservación de energía). Sin embargo, las personas tienden a confiar menos en las leyes de estadísticas que en otras leyes de la naturaleza (de lo contrario, ¿quién compraría boletos de lotería?). Esto ha resultado en una gran cantidad de intentos fallidos de crear dispositivos

móviles perpetuos de segundo tipo, pero también en paradojas realmente interesantes. Quizás el más famoso es el demonio de Maxwell: un ente a escala nanométrica que se sienta en una puerta entre dos partes de un recipiente y que abre la puerta cuando se acerca una molécula rápida y de lo contrario mantiene la puerta cerrada. Aparentemente, la temperatura en el otro lado del recipiente comenzaría a aumentar, violando 2LTD. La resolución de la paradoja es que el ente necesita obtener información sobre las moléculas que se aproximan y debe sondearlas enviando, por ejemplo, fotones. Sin embargo, los fotones dispersados de las moléculas contribuirían a un aumento de la entropía.

Ahora, consideremos los ciclos de Carnot regulares e invertidos con más detalles.

Idea 23: Los procesos que involucran el ciclo de Carnot generalmente se estudian convenientemente utilizando un diagrama $S-T$, porque entonces, el proceso tiene una forma rectangular.



Si bien ya hemos derivado la eficiencia de un ciclo de Carnot a partir de la definición de temperatura de Kelvin, hagámoslo, una vez más, comenzando por la definición de entropía y utilizando el diagrama $S-T$. Consideremos el eje S el horizontal y longitud del rectángulo como ΔS . Según la definición de entropía, el calor recibido del depósito de calentamiento $\Delta Q_1 = \int_A^B T dS = T_1 \Delta S$ es el área del rectángulo grande; del mismo modo, el calor dado al depósito de enfriamiento $\Delta Q_2 = \int_C^D T dS = T_2 \Delta S$ es el área del rectángulo gris oscuro. De acuerdo con la ley de conservación de energía, el trabajo realizado $\Delta W = \oint_{ABCD} T dS = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \Delta S(T_1 - T_2)$ es el área del rectángulo gris claro. Según la definición de eficiencia,

$$\eta_C = \frac{\Delta W}{\Delta Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

El ciclo de Carnot invertido tiene un movimiento en sentido antihorario en el diagrama $S-T$: todas las contracciones se convierten en expansiones (y viceversa), la dirección del flujo de calor se invierte y el trabajo mecánico se vuelve negativo, es decir, se necesita hacer un trabajo para mantener el proceso en marcha. Tal motor de calor invertido puede usarse para dos propósitos: para bombas de calor y refrigeradores. En un refrigerador, un gas toma calor del interior del refrigerador a la temperatura interna T_2 , fluye a través del radiador en la parte posterior del refrigerador y emite más calor a la temperatura del radiador $T_1 > T_2$; el motor eléctrico de la nevera mantiene el proceso en marcha. La eficiencia del refrigerador (a menudo llamada *coeficiente de rendimiento* o *COP*) se caracteriza por la razón del calor Q_2 que se retira del interior y el trabajo W realizado por el motor (energía eléctrica consumida),

$$\eta_{\text{refri}} = \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

De esta expresión podemos deducir que la eficiencia de un refrigerador puede ser mayor y menor que uno, pero es muy difícil alcanzar temperaturas extremadamente bajas, porque la

eficiencia disminuye junto con la temperatura dentro del refrigerador.

La bomba de calor se puede considerar como una nevera, que tiene un radiador caliente dentro de los edificios y que toma calor de los depósitos de calor más fríos fuera de la casa (aire o tierra). Ahora, lo que nos es útil es el calor Q_1 recibido por nuestro edificio, de modo que la eficiencia de una bomba de calor es

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{Q_1}{W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2},$$

que siempre es más grande que uno: funciona siempre de manera más eficiente que un radiador eléctrico.

Finalmente, discutamos el *efecto termoeléctrico*. Para comenzar, recordemos el problema 36: para que una molécula pueda salir de la fase líquida, una cierta energía U necesita ser suministrada. Esto significa que efectivamente, las moléculas en fase líquida obedecen a la energía potencial $-U$ con respecto a las moléculas de vapor; esta energía potencial se conoce como *potencial químico* y es igual al cambio de energía total cuando se agrega una partícula a un sistema (energía final menos las energías iniciales de la partícula y del sistema). De forma similar a las moléculas en fase líquida, los electrones en los metales (semiconductores, dieléctricos) también se describen por potencial químico, a menudo denominado *nivel de Fermi* E_F . El nivel de Fermi de un material depende de la temperatura; si la temperatura de un cable cambia a lo largo de su longitud, el nivel de Fermi también cambiará a lo largo de su longitud. Como resultado, los electrones se mueven hacia niveles más bajos de Fermi (energía potencial más pequeña), creando un excedente de cargas y un campo eléctrico. Finalmente, se alcanza un equilibrio: el potencial electrostático compensa la diferencia de nivel de Fermi. Entonces, en equilibrio, hay un potencial cambiante a lo largo del cable. Hagamos un resumen.

Hecho 20: Si un cable se calienta desde un extremo y se enfría en el otro extremo para que las temperaturas de sus puntos finales sean T_c y T_f , respectivamente, entonces habrá un voltaje

$$V = S(T_c - T_f)$$

entre los puntos finales, donde el *coeficiente Seebeck* S toma diferentes valores para diferentes materiales. Esto se conoce como el *efecto Seebeck*.

Un *termopar* es un dispositivo hecho de cables de dos materiales diferentes que se seleccionan para que la diferencia de los coeficientes de Seebeck sea lo más grande posible. Un alambre de material A está conectado en sus dos puntos finales, *las uniones*, a los cables de material B ; si las uniones se mantienen a diferentes temperaturas, se crea una fuerza electromotriz en los terminales de salida del termopar. Los termopares que se utilizan para generar energía eléctrica se denominan *generadores termoeléctricos*. Los termopares toman y liberan calor en las uniones y realizan trabajos eléctricos, por lo que funcionan como motores de calor. Si tuviéramos que revertir un motor térmico de este tipo, necesitaríamos suministrarle una corriente desde una fuente externa. Entonces esperaríamos que una de las uniones liberara calor y la otra absorbiera calor; esto es, de hecho, lo que sucederá y se conoce como el *efecto Peltier*. La dirección de la corriente define, cuál de las uniones absorberá calor.

Para la mayoría de los metales, S toma valores que perma-

necen por debajo de $10 \mu\text{V/K}$ y para ciertas aleaciones metálicas hasta $30 \mu\text{V/K}$ ($70 \mu\text{V/K}$ para bismuto). Lo que importa en el caso de un termopar es la diferencia de los coeficientes de Seebeck de los dos materiales de los cables y en el caso del par *cromel* y *constantán*, la diferencia a la temperatura ambiente es $62 \mu\text{V/K}$. Para materiales semiconductores, S puede alcanzar valores mucho más altos.

Ahora podemos preguntar, qué tan cerca de ser reversible es el efecto termoeléctrico. Para que un sistema sea reversible, todas sus partes deben haber alcanzado un estado muy cercano a un equilibrio térmico. Sin embargo, en el caso de un termopar, tenemos un cable que conecta las uniones frías y calientes: la diferencia de temperatura crea un flujo de calor a través del cable, que es muy irreversible. Para que el proceso sea reversible, la potencia calorífica irreversible

$$\Phi_{\text{irr}} = \frac{\kappa A}{L}(T_c - T_f)$$

(donde κ es la conductividad térmica, A es el área de sección transversal y l la longitud) debe ser pequeño en comparación con la potencia calorífica reversible que se gasta en la producción de energía eléctrica,

$$\Phi_{\text{rev}} = \frac{\mathcal{P}}{\eta_C} = \frac{V^2}{R} \frac{T_c}{T_c - T_f} = \frac{S^2(T_c - T_f)T_c}{\rho l/A}.$$

Entonces, el proceso puede considerarse reversible si

$$\frac{\Phi_{\text{rev}}}{\Phi_{\text{irr}}} = \frac{S^2 T_c}{\kappa \rho} \gg 1.$$

Este parámetro adimensional se llama *factor de mérito* y se denota por

$$ZT \equiv \frac{S^2 T}{\kappa \rho};$$

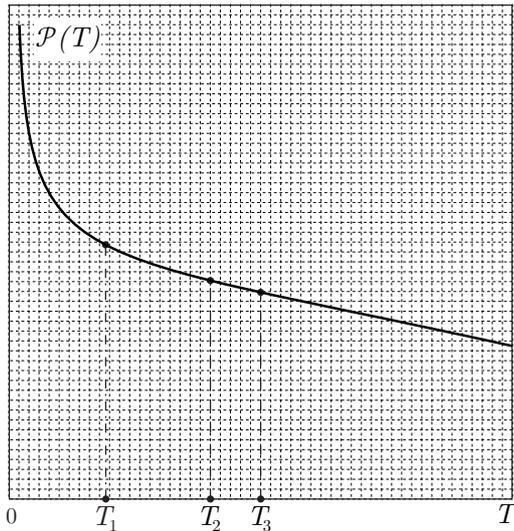
actualmente los materiales con el factor de mérito más alto alcanzan valores $ZT \approx 2,5$ pero teóricamente no hay límite superior para ZT . Parece que en el caso de $ZT \approx 2,5$ la eficiencia máxima de un termopar es el 30% de la eficiencia del ciclo de Carnot. Es un desafío para las ciencias de los materiales crear materiales con mayores factores de mérito que podrían usarse para fabricar generadores termoeléctricos compactos.

Pr 37. Se está utilizando un termopar como batería: una de sus uniones está a temperatura ambiente $T_1 = 20^\circ\text{C}$, la otra se mantiene dentro de un vaso de agua con hielo, a temperatura $T_2 = 0^\circ\text{C}$. Los cables de salida están conectados a una resistencia $R = 10 \Omega$, conectado en serie con un amperímetro que muestra la corriente $I = 10 \text{ mA}$. ¿Cuánto hielo se derrite durante $t = 10 \text{ h}$ si el vaso con hielo tiene muy buen aislamiento térmico y la temperatura ambiente permanece constante? El calor latente de fusión para el hielo $\lambda = 330 \text{ kJ/kg}$. Suponga que los procesos de transferencia de energía en el termopar son reversibles.

6. PROBLEMAS DE REVISIÓN

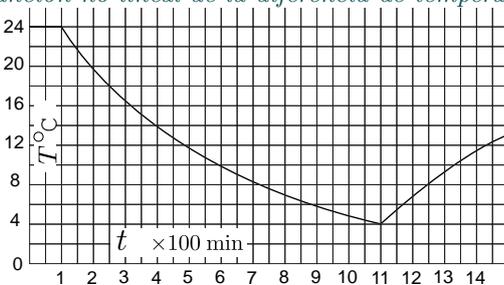
Pr 38. [EstPhO-2007] Cierta habitación se está calentando usando un dispositivo de calefacción, la potencia de salida $\mathcal{P}(T)$ depende de la temperatura de la habitación T como se muestra en la figura. Si la temperatura exterior es T_1 entonces la temperatura de la habitación alcanzará el valor T_2 (ver figura). ¿Qué temperatura alcanzará la habitación si la temperatura exterior es T_3 ? (encuentre la solución gráficamente usando la figura). La tasa de pérdida de intercambio de calor de la habitación

es proporcional a la diferencia de las temperaturas interior y exterior.



Pr 39. [EstPhO-2000] El voltaje nominal de una bombilla es $V_0 = 26 \text{ V}$ y la corriente nominal es $I_0 = 0,12 \text{ A}$. El filamento de tungsteno frío de un bombillo tiene una resistencia $R_0 = 24 \Omega$. Estime la longitud l y el diámetro d del filamento. También, ¿a qué temperatura T se supone que el filamento debe emitir luz (cuando funciona en su régimen nominal)? La resistividad del tungsteno a temperatura ambiente es $\rho_0 = 5,3 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Para metales, la resistividad se puede asumir proporcional a la temperatura en Kelvins. Considere al tungsteno como un cuerpo perfectamente gris que absorbe $k = 0,3$ de la radiación incidente a cualquier longitud de onda. La constante de Stefan-Boltzmann es $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$. Desprecie la expansión térmica del filamento.

Pr 40. [EstPhO-2006] Debido al clima frío, el sistema de calefacción se rompió y la temperatura en una habitación comenzó a disminuir. Se compró y encendió rápidamente un calentador de ventilador. Durante todo ese período, la temperatura ambiente cambió en el tiempo como se muestra en el gráfico. ¿Qué temperatura ambiente se alcanzará a largo plazo? La temperatura exterior se mantuvo constante. Tenga en cuenta que, debido a ciertos elementos de construcción, la tasa de intercambio de calor entre la habitación y el ambiente exterior fue una *función no lineal de la diferencia de temperatura*.



Pr 41. En un cilindro aislado térmicamente, un pistón puede moverse sin fricción hacia arriba y hacia abajo. El cilindro está dividido en dos compartimentos por una pared liviana que se mueve libremente y que conduce el calor lentamente, vea la figura.

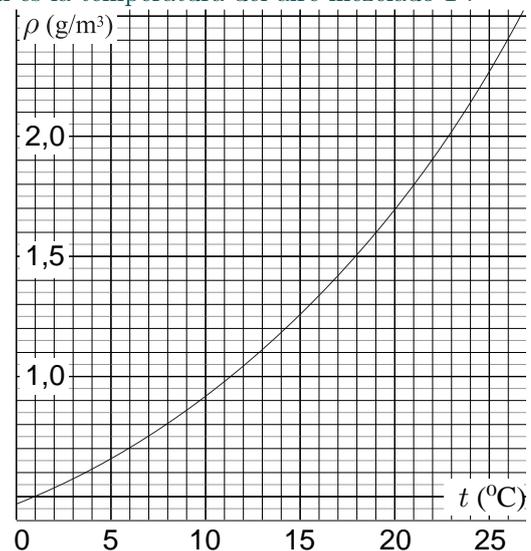


Inicialmente, las temperaturas del gas son iguales y el volumen de hidrógeno es 3 veces menor que el del helio. El helio recibe una cierta cantidad de calor, por lo que el pistón se mueve hacia arriba $d_1 = 5 \text{ cm}$. Después de esperar un período de tiempo más largo, se observó un desplazamiento adicional del pistón. ¿Por cuánto y en qué dirección se movió adicionalmente el pistón? Los gases pueden considerarse ideales. La capacidad calorífica molar a presión constante es $C_{PH_2} = 7/2R$ para el hidrógeno y $C_{PHe} = 5/2R$ para helio.

Pr 42. [EstFin-2006] De acuerdo con la creencia generalizada, es útil mantener la ventana abierta al secar la ropa, incluso si la humedad relativa exterior es del 100%, porque la temperatura del aire entrante aumenta y, por lo tanto, la humedad relativa disminuye. Analicemos si sostienen estos argumentos cuando la calefacción está apagada.

Supongamos que, dentro de una habitación, el volumen de aire $V_1 = 20 \text{ m}^3$ desde adentro a la temperatura $t_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ se mezcla con el volumen de aire $V_2 = 10 \text{ m}^3$ desde afuera a la temperatura $t_2 = 1 \text{ }^\circ\text{C}$. El calor específico del aire (a presión constante) $c_P = 1005 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ se puede suponer que es constante para el rango de temperatura dado; el intercambio de calor con el medio puede ser despreciado. Por el momento, puede despreciar la posibilidad de condensación (parcial) del vapor.

- a) Pruebe que el volumen total del aire no cambiará, es decir, que el volumen del aire mezclado $V = V_1 + V_2$.
b) ¿Cuál es la temperatura del aire mezclado T ?



c) El siguiente gráfico muestra la dependencia de la densidad de vapor saturado para el agua en función de la temperatura. Antes de mezclar, tanto el aire interior como el exterior tenían una humedad relativa de $r_0 = 100\%$. ¿Cuál es la humedad relativa r del aire mezclado (si aumenta, entonces suponga que un vapor sobresaturado con $r > 100\%$ se forma)?

d) Si por casualidad obtuviste $r > 100\%$ entonces el vapor sobresaturado se descompone en una niebla que contiene pequeñas gotas de agua. En ese caso, ¿cuál es la masa m del agua condensada (es decir, la masa total de las gotas de agua)? Densidad del aire $\rho_0 = 1,189 \text{ kg}/\text{m}^3$; calor latente de vaporización para agua $q = 2500 \text{ kJ}/\text{kg}$.

Pr 43. [IPhO-1999] Un recipiente cilíndrico, con su eje vertical, contiene un gas molecular en equilibrio termodinámico. La base superior del cilindro se puede desplazar libremente y está hecha de una placa de vidrio; supongamos que no hay fugas de gas y que la fricción entre la placa de vidrio y las paredes del cilindro es suficiente para amortiguar las oscilaciones, pero no implica una pérdida significativa de energía con respecto a las otras energías involucradas. Inicialmente, la temperatura del gas es igual a la del entorno circundante. El gas puede considerarse perfecto dentro de una buena aproximación. Supongamos que las paredes del cilindro (incluidas las bases) tienen una conductividad y capacidad térmica muy bajas y, por lo tanto, la transferencia de calor entre el gas y el medio ambiente es muy lenta y puede despreciarse en la solución de este problema. A través de la placa de vidrio enviamos al cilindro la luz emitida por un láser de potencia constante; esta radiación se transmite fácilmente por aire y vidrio, pero es completamente absorbida por el gas dentro del recipiente. Al absorber esta radiación, las moléculas alcanzan estados excitados, donde emiten rápidamente radiación infrarroja que regresan pasos por pasos al estado fundamental molecular; sin embargo, esta radiación infrarroja es absorbida por otras moléculas y se refleja en las paredes de los vasos, incluida la placa de vidrio. Por lo tanto, la energía absorbida por el láser se transfiere en muy poco tiempo al movimiento térmico (caos molecular) y luego permanece en el gas durante un tiempo suficientemente largo. Observamos que la placa de vidrio se mueve hacia arriba; después de un cierto tiempo de irradiación apagamos el láser y medimos este desplazamiento.

- Usando los datos a continuación y, si es necesario, algunas constantes físicas, calcule la temperatura y la presión del gas después de la irradiación.
- Calcule el trabajo mecánico realizado por el gas como consecuencia de la absorción de radiación.
- Calcule la energía de radiación absorbida durante la irradiación.
- Calcule la potencia emitida por el láser que es absorbido por el gas y el número correspondiente de fotones (y, por lo tanto, de procesos de absorción elementales) por unidad de tiempo.
- Calcule la eficiencia del proceso de conversión de energía óptica en un cambio de energía potencial mecánica de la placa de vidrio. Posteriormente, el eje del cilindro gira lentamente 90° , llevándolo a una dirección horizontal. Los intercambios de calor entre el gas y el recipiente aún pueden despreciarse.
- Indique si la presión y/o la temperatura del gas cambian como consecuencia de dicha rotación y, si ese es el caso, cuál es su nuevo valor.

Datos: presión ambiental: $P_0 = 101,3 \text{ kPa}$; temperatura ambiente: $T_0 = 20,0^\circ\text{C}$; diámetro interior del cilindro: $2r = 100 \text{ mm}$; masa de la placa de vidrio: $m = 800 \text{ g}$; cantidad de gas dentro del recipiente: $n = 0,100 \text{ mol}$; calor específico molar a volumen constante del gas: $c_V = 20,8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$; longitud de onda de emisión del láser: $l = 514 \text{ nm}$; tiempo de irradiación: $\Delta t = 10,0 \text{ s}$; desplazamiento de la placa móvil después de la irradiación: $\Delta s = 30,0 \text{ mm}$.

Pr 44. [EstPhO-1998] Se bombea un neumático con una bomba manual. Un manómetro muestra que el exceso de presión

(la diferencia entre las presiones internas y externas) es $P_1 = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$, la presión del aire $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Encuentre la temperatura del aire que ingresa al neumático a través de la válvula. La bomba tiene dos válvulas. Una de ellas deja pasar el gas a la bomba desde la atmósfera; se abre tan pronto como la presión dentro de la bomba es inferior a P_0 y se cierra tan pronto como se hace mayor que P_0 . La otra deja pasar el gas de la bomba al neumático; se abre tan pronto como la presión dentro de la bomba se hace mayor que la presión dentro del neumático y se cierra tan pronto como esta desigualdad ya no se mantiene. Temperatura ambiente $T_0 = 20^\circ\text{C}$

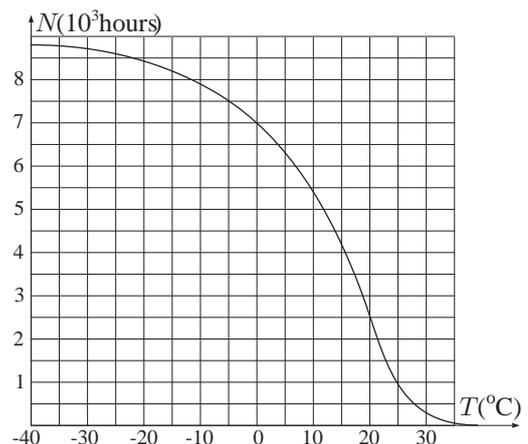
Pr 45. [EstPhO-2002] Los componentes principales del motor de un automóvil son: un cilindro, un pistón que se mueve dentro de él y una válvula para permitir que los gases entren y salgan del cilindro.



- El ciclo de trabajo del motor consta de las siguientes etapas:
- Entrada de gas:* el pistón se mueve de la posición más a la derecha a la izquierda; entra aire fresco a través de la válvula y llena el cilindro.
 - Aumento de presión:* la válvula se cierra y el pistón vuelve a la posición más a la derecha; el aire se comprime adiabáticamente.
 - Trabajo:* se inyecta combustible en el cilindro y se enciende. Puede suponer que el combustible se quema instantáneamente. El gas comienza a expandirse y empuja el pistón a la posición más a la izquierda.
 - Eliminación de gas:* la válvula se abre, el pistón se mueve hacia la derecha y el gas se expulsa del cilindro. El proceso comienza a repetirse periódicamente.

- Describa todo el ciclo en un diagrama $P - V$.
- Encuentre la eficiencia η .

Datos. Índice adiabático para aire $\gamma = 1,4$. El factor de compresión se define como la razón de los volúmenes más grandes y más pequeños del cilindro, $k = V_l/V_s$; aquí $k = 10$. Desprecie la fricción cuando el pistón se mueve. El número de moléculas de combustible es mucho menor que el número de moléculas de aire dentro del cilindro. El aire debe considerarse como un gas ideal, uno de los cuales tiene una energía interna igual a $U = c_V T$, donde c_V es su capacidad calorífica molar a volumen constante.

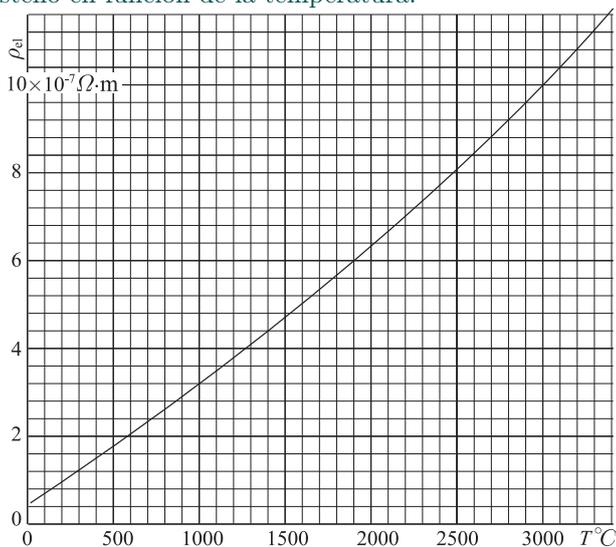


Pr 46. [EstPhO-2002] Las salas de almacenamiento de archivos deben mantener una temperatura constante $T_0 = 15^\circ\text{C}$ todo el año. Encuentre los gastos anuales de electricidad necesarios para mantener esa temperatura si la tasa de intercambio de calor a lo largo de las paredes del edificio es $\mathcal{P} = C\Delta T$, donde $C = 200\text{ W/K}$ es una constante y ΔT es la diferencia de temperatura dentro de la sala de almacenamiento y fuera del edificio. Para regular la temperatura dentro de la habitación, se utiliza una bomba de calor; la bomba de calor también puede funcionar como aire acondicionado. Si el dispositivo se usa como aire acondicionado (para enfriar la habitación), la eficiencia es $\eta_f = 10$ (generalmente denominado coeficiente de rendimiento, COP; es la razón entre la potencia de enfriamiento y la potencia eléctrica consumida); si se utiliza como bomba de calor (para calefacción), la eficiencia $\eta_c = 6$ (COP; la razón de tasa de potencia de calefacción y consumo de energía eléctrica). El gráfico adjunto $N - T$ representa cuántas horas al año (N) la temperatura del aire exterior fue superior a T . El costo de la energía eléctrica es $c = 0,1\text{ EUR/kWh}$.

Pr 47. [EstPhO-2001] Usando los supuestos y datos numéricos del problema 3 y la densidad de tungsteno a temperatura ambiente $\rho = 19\,250\text{ kg/m}^3$, responda las siguientes preguntas.

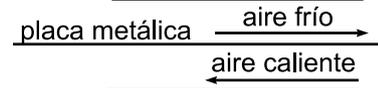
a) Un voltaje directo menor que el nominal $U_0 = 3\text{ V}$ se aplica a los cables de la bombilla halógena. ¿Cuánto tiempo tarda el filamento de tungsteno en alcanzar la temperatura $T_1 = 40^\circ\text{C}$ a partir de la temperatura ambiente $T_a = 20^\circ\text{C}$?

b) Accidentalmente, un voltaje de CD demasiado grande $U_1 = 120\text{ V}$ se aplica a los cables de la lámpara. ¿Cuánto tiempo lleva alcanzar la temperatura de fusión $T_2 = 3410^\circ\text{C}$ del tungsteno? Se pueden despreciar las pérdidas de calor, así como la dependencia de la temperatura de la densidad de tungsteno y el calor específico; use el gráfico que representa la resistividad del tungsteno en función de la temperatura.

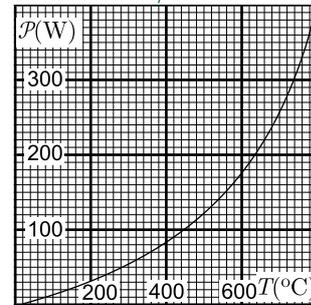


Pr 48. [EstFin-2005] a) Considere un modelo simplificado del sistema de ventilación de una casa utilizando un intercambiador de calor pasivo. El intercambiador consta de una placa metálica de longitud x , ancho y y espesor d dividiendo el canal de aire en dos mitades, una para el aire frío entrante y otra para el aire caliente saliente. Ambos canales tienen un grosor constante h , la velocidad del flujo de aire es v ver figura. La conductancia térmica del metal es σ (calor a través de un área

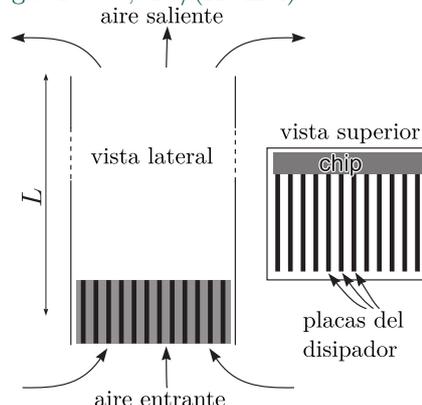
unitaria de la placa por unidad de tiempo, suponiendo que la temperatura descienda un grado por unidad de espesor de la placa). La capacidad calorífica específica del aire por presión constante es c_p , la densidad del aire es ρ (desprecie su dependencia de la temperatura). Puede suponer que el aire se mezcla turbulently en el canal, de modo que las temperaturas del aire entrante y saliente T_{dentro} y T_{fuera} dependen solo de la coordenada x (el eje x se considera paralelo a la velocidad del flujo), es decir, $T_{\text{dentro}} \equiv T_{\text{dentro}}(x)$ y $T_{\text{fuera}} \equiv T_{\text{fuera}}(x)$. Suponiendo que las temperaturas interior y exterior sean T_0 y T_1 , respectivamente, ¿cuál es la temperatura T_2 del aire entrante a la entrada de la sala?



b) Se adjunta una gráfica de la tasa de intercambio de calor \mathcal{P} del cable de un calentador eléctrico en función de la temperatura (suponiendo que la temperatura ambiente es $T_0 = 20^\circ\text{C}$). La temperatura de funcionamiento del cable es $T_1 = 800^\circ\text{C}$. El calentador está apagado; encuentre el tiempo después del cual la temperatura del cable bajará a $T_2 = 100^\circ\text{C}$. La capacidad calorífica del cable es $C = 10\text{ J/K}$.



Pr 49. [EstFin-2004] Considere un sistema de enfriamiento pasivo representado en la figura. Aire frío (en condiciones normales: $P_0 = 10^5\text{ Pa}$, $T_0 = 293\text{ K}$) fluye sobre el dissipador de calor de un chip con disipación de energía $\mathcal{P} = 100\text{ W}$, en un tubo vertical de longitud $L = 1\text{ m}$ y área transversal $S = 25\text{ cm}^2$. Después de pasar la tubería, el aire ingresa al ambiente. Suponga que el aire dentro de la tubería se mezcla bien; desprecie la fricción viscosa y turbulenta del aire dentro de la tubería y el dissipador de calor. El aire puede considerarse como un gas ideal con exponente adiabático $\gamma = 1,4$ y masa molar $\mu = 29\text{ g/mol}$; constante de gas $R = 8,31\text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$.



a) Expresar la capacidad calorífica a presión constante c_p a través de cantidades γ y R .

b) Encuentre una relación entre la densidad del aire que sale ρ y temperatura T (la relación puede contener también los

parámetros definidos anteriormente).

c) Encuentre una relación entre la velocidad del flujo de aire en la tubería v y densidad de aire de salida ρ (la relación puede contener también los parámetros definidos anteriormente).

d) Exprese la disipación de energía \mathcal{P} en términos de la velocidad del flujo de aire v , la temperatura del aire de salida T y densidad ρ (la relación puede contener también los parámetros definidos anteriormente).

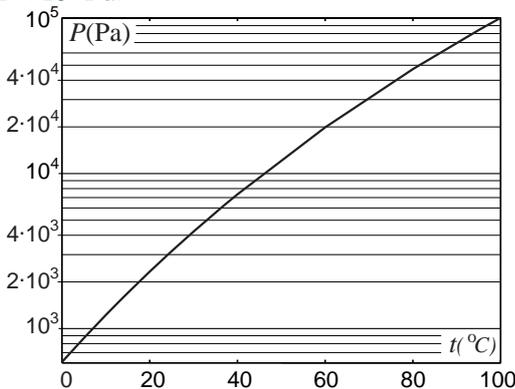
e) ¿Cuál es la temperatura T del aire que sale? En sus cálculos, puede usar la aproximación $T - T_0 \ll T_0$.

Pr 50. [EstPhO-2000] El glicerol se almacena en un recipiente de volumen bien cerrado $V = 1\text{ l}$; dentro del glicerol, hay una burbuja de volumen de aire $w = 1\text{ ml}$. A temperatura $T_0 = 20^\circ\text{C}$, la presión dentro del recipiente es $P_0 = 1\text{ atm}$. El coeficiente de expansión lineal del material del recipiente es muy pequeño y las paredes del recipiente son gruesas. El coeficiente de expansión volumétrica del glicerol $\alpha = 5,1 \times 10^{-4}\text{ K}^{-1}$. El aire puede ser tratado como un gas ideal.

a) Encuentre la dependencia de la presión dentro de la botella en función de la temperatura.

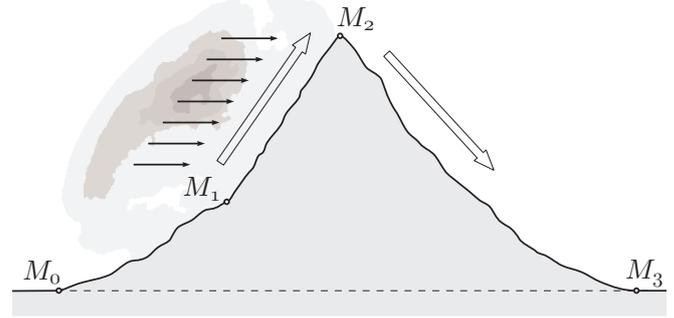
b) ¿A qué temperatura y por qué razón física la igualdad obtenida ya no será válida?

Pr 51. [EstPhO-2003] Una botella de jugo se está pasteurizando a temperatura $t_1 = 80^\circ\text{C}$ para que una tapa ligera descansa libremente sobre el borde de la botella (el exceso de gas puede salir libremente de la botella, pero no puede entrar aire del exterior). Luego, la tapa se fija firmemente para que el aire ya no pueda entrar y salir de la botella; la tapa es tan rígida que puede despreciarse su deformación debido al exceso de presión. La botella se enfría a temperatura ambiente $t_2 = 20^\circ\text{C}$. ¿Cuál es la presión debajo de la tapa de la botella? Suponga que las propiedades físicas del jugo son idénticas a las del agua; la presión de los vapores de agua saturada se representa en función de la temperatura en un gráfico. La presión atmosférica es $P_0 = 1,01 \times 10^5\text{ Pa}$.



Pr 52. [IPhO-1987] El aire húmedo fluye adiabáticamente a través de una cadena montañosa como se indica en la figura. Presiones atmosféricas iguales $P_0 = 100\text{ kPa}$ se miden en estaciones meteorológicas M_0 y M_3 y una presión de $P_2 = 70\text{ kPa}$ en la estación M_2 . La temperatura del aire en M_0 es $t_0 = +20^\circ\text{C}$. A medida que el aire asciende, la formación de nubes se establece en $P_1 = 84,5\text{ kPa}$. Considere una cantidad de aire húmedo que asciende a la montaña con una masa de 2000 kg sobre ca-

da metro cuadrado. Este aire húmedo llega a la cresta de la montaña (estación M_2) después de 1500 s . Durante ese aumento una cantidad de $m = 2,45\text{ g}$ de agua por kilogramo de aire se precipita como lluvia.



a) Determine la temperatura T_1 a M_1 donde se forma el techo de nubes.

b) ¿Cuál es la altura h_1 (en M_1) arriba de la estación M_0 del techo de la nube suponiendo una disminución lineal de la densidad atmosférica?

c) ¿Que temperatura T_2 se mide en la cresta de la cordillera?

d) Determine la altura de la columna de agua (nivel de precipitación) precipitada por la corriente de aire en 3 horas, suponiendo una lluvia homogénea entre puntos M_1 y M_2 .

e) ¿Que temperatura T_3 se mide en la parte posterior de la cordillera en la estación M_3 ? Discuta el estado de la atmósfera en la estación M_3 en comparación con la estación M_0 .

Consejos y datos. La atmósfera debe tratarse como un gas ideal. Se deben despreciar las influencias del vapor de agua sobre la capacidad calorífica específica y la densidad atmosférica; lo mismo se aplica a la dependencia de la temperatura del calor latente específico de vaporización. Las temperaturas se determinarán con una precisión de 1 K , la altura del techo de la nube con una precisión de 10 m y el nivel de precipitación con una precisión de 1 mm . Capacidad calorífica específica de la atmósfera en el rango de temperatura correspondiente: $c_P = 1005\text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. Densidad del aire para en la estación M_0 (es decir, para P_0 y T_0) es $\rho_0 = 1,189\text{ kg}/\text{m}^3$. Calor latente específico de vaporización del agua dentro del volumen de la nube: $q_V = 2500\text{ kJ}/\text{kg}$; aceleración de caída libre $g = 9,81\text{ m}/\text{s}^2$. Índice adiabático para aire húmedo y seco $\gamma = c_P/c_V = 1,4$.

Pr 53. En una novela de ciencia ficción, se describe la siguiente situación. Hay una emergencia en una nave espacial y un astronauta llega por accidente a la distancia $L = 100\text{ m}$ de la nave espacial. Tiene una taza con agua solidificada (hielo) y usa la sublimación (evaporación) del hielo para regresar a la nave espacial. Estime, qué tan realista es este método. Puede suponer que la sublimación tiene lugar a una temperatura constante $T = 272\text{ K}$, para la cual la presión de los vapores saturados es $P = 550\text{ Pa}$. Estime las dimensiones de la taza y la masa del agua usted mismo.

Pr 54. [EstFin-2009] Lord Rayleigh tuvo en 1891 una conferencia sobre tomar fotos de procesos físicos. Entre otros, mostró una foto de una película de jabón, que se está rompiendo (ver figura). En lugar de un flash, usó una chispa eléctrica (bueno, hoy en día los flashes también se basan en chispas eléctricas). Estime, cuán preciso debe haber sido la sincroniza-

f) Probar que la eficiencia termodinámica real ε para la circulación de Hadley invernal es siempre menor que ε_i .

g) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones explica mejor por qué ε es menor que el valor ideal? Marque las respuestas correctas. Puede haber más de una respuesta correcta.

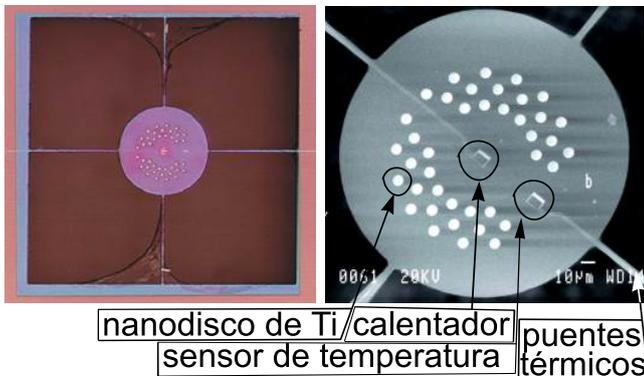
(I) Hemos ignorado el trabajo realizado contra la fricción superficial.

(II) La condensación se produce a una temperatura inferior a la temperatura de la fuente de calor.

(III) Hay evaporación irreversible de agua en la superficie.

(IV) La eficiencia ideal es aplicable solo cuando no hay cambio de fases del agua.

Pr 60. [EstFin-2008] Un microcalorímetro es una membrana delgada circular de nitruro de silicio, aislada térmicamente del entorno, excepto que está conectada térmicamente a la oblea por cuatro puentes térmicos delgados y estrechos (ver figura). El microcalorímetro está equipado con un pequeño calentador en el medio de la membrana y una estructura similar en el borde de la membrana que funciona como un termómetro. Este microcalorímetro se usa para estudiar las propiedades térmicas de los discos de titanio (Ti) a nanoescala (los puntos pequeños y ligeros en la figura). La potencia térmica del calentador depende sinusoidalmente del tiempo, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cos(\omega t)$ (potencia negativa implica una retirada de calor). La frecuencia angular ω es lo suficientemente baja, de modo que para cualquier momento t , la temperatura del microcalorímetro $T(t)$ puede considerarse constante en toda su superficie y la dependencia de la temperatura a lo largo de los puentes térmicos puede considerarse lineal. La oblea, a la que están conectados los puentes, es lo suficientemente grande y gruesa, de modo que su temperatura T_0 puede considerarse constante todo el tiempo. Cada uno de los cuatro puentes tiene longitud L y área de la sección transversal S ; la conductancia térmica de ellos es κ . La conductancia térmica se define como la potencia calorífica (medida en vatios) por área transversal, suponiendo que la caída de temperatura es de 1°C por 1 m. La capacidad calorífica del microcalorímetro (con discos de Ti) es C .



a) Encuentre la resistencia térmica R entre el microcalorímetro y la oblea (es decir, la razón entre la diferencia de temperatura y la potencia calorífica).

Para las preguntas (ii) y (iii), use la cantidad R , sin sustituirlo por la respuesta de la pregunta (a).

b) Escriba la ecuación de equilibrio de calor para el microcalorímetro y encuentre la temperatura del microcalorímetro en función del tiempo $T(t)$ [puede buscarlo en la forma

$$T = T_0 + \Delta T \sin(\omega t + \phi)].$$

c) Para estudiar las propiedades térmicas de los nanodiscos de Ti, la amplitud de las oscilaciones sinusoidales de $T(t)$ debería cambiar por el mayor valor posible, como respuesta a un pequeño cambio de C (que es causado por los discos Ti). Encuentre la frecuencia circular óptima ω_0 .

d) Asumimos que la dependencia de la temperatura a lo largo de los puentes es lineal, es decir, se puede despreciar su capacidad calorífica. Para altas frecuencias $\omega \gtrsim \omega_c$, este no es el caso. Estime la frecuencia crítica ω_c en términos de κ , l , calor específico c y densidad ρ del material del puente.

Pr 61. [EstFin-2010] Para estudiar las propiedades térmicas de una botella termo, modelémosla como dos vasos esféricos concéntricos, con radios $R_1 = 7\text{ cm}$ y $R_2 = 10\text{ cm}$. El espacio entre las paredes de los recipientes contiene vacío (por lo tanto, la conductividad térmica puede despreciarse).

a) Encuentre la potencia de radiación (es decir, el calor transmitido por unidad de tiempo) entre las paredes de la botella, suponiendo que la temperatura ambiente es $T_2 = 293\text{ K}$ y la esfera interna se llena con nitrógeno líquido a la temperatura de ebullición $T_1 = 77\text{ K}$. Las emisividades de todas las superficies son iguales a las del acero inoxidable: $\varepsilon = 0,1$. *Observación:* El flujo de calor emitido se da según la ley de Stefan-Boltzmann $I = \varepsilon\sigma T^4$, donde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\text{ W/m}^2\text{K}^4$ (asumiendo que ε es independiente de la longitud de onda).

b) Estime, cuánto tiempo lleva una evaporización completa del nitrógeno líquido (el vapor escapa a través de una válvula de sobrepresión). Para el nitrógeno líquido, densidad $\rho = 810\text{ g/l}$ y el calor latente de vaporización $\lambda = 199\text{ kJ/kg}$. ¡Nótese bien! Si no pudo encontrar \mathcal{P} (para la pregunta a), exprese el tiempo de evaporización simbólicamente (es decir, usando el símbolo \mathcal{P}).

Pr 62. [EstFin-2011] Estudiemos cómo se puede crear un vacío dentro de una bombilla bombeando. Considere que el volumen de la bombilla es V y la bomba consiste en un pistón que se mueve dentro de un cilindro de volumen αV , donde $\alpha \ll 1$. Los ciclos de bombeo comienzan con el levantamiento del pistón; cuando la presión dentro del cilindro se hace más pequeña que dentro de la bombilla, una válvula V_A (conectando el cilindro y la bombilla) se abre y permanece abierta mientras el pistón se mueve hacia arriba. Cuando se libera el pistón, comienza a moverse hacia abajo, en ese momento, la válvula V_A se cierra. Mientras la válvula V_A está abierta, las presiones de la bombilla y el cilindro pueden considerarse iguales entre sí. Cuando el pistón se mueve hacia abajo, la presión en el cilindro aumenta adiabáticamente hasta llegar a ser igual a la presión exterior $P_0 = 10 \times 10^5\text{ Pa}$; en ese momento, otra válvula V_B se abre dejando salir el gas del cilindro. Cuando el pistón alcanza la posición más baja, no queda aire residual dentro del cilindro. Ahora, el pistón está listo para ser levantado: la válvula V_B cierra y V_A se abre, marcando el comienzo del próximo ciclo de bombeo. El aire dentro de la bombilla puede considerarse isotérmico, con una temperatura igual a la temperatura ambiente T_0 . El exponente adiabático del aire $\gamma = c_P/c_V = 1,4$.

a) ¿Cuántos ciclos de bombeo N debe hacerse para reducir la presión dentro de la bombilla de $P = P_0$ baja hasta $P = \beta P_0$,

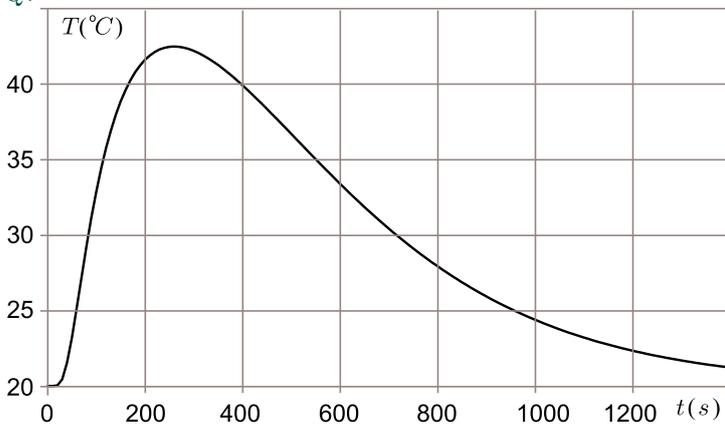
donde $\beta \ll 1$?

- b) ¿Cuál es el trabajo mecánico neto realizado durante dicho bombeo (cubriendo todos los N ciclos)?
- c) ¿Cuál es la temperatura del aire liberado del cilindro a los alrededores al final del proceso de bombeo (cuando la presión dentro de la bombilla se ha vuelto igual a βP_0)?
- d) Según el esquema de bombeo descrito anteriormente, hay una pérdida considerable de trabajo mecánico durante el período en que el pistón se libera y se mueve hacia abajo. Dicha pérdida se puede evitar si hay otra bomba, que se mueve en una fase opuesta: la fuerza debida a la presión del aire exterior que empuja el pistón hacia abajo puede transmitirse a la otra bomba para levantar el pistón. ¿Cuál es el trabajo mecánico neto que se realiza cuando se utiliza un esquema de bombeo de este tipo?

Pr 63. [EstFin-2011] Considere un disipador de calor en forma de una placa de cobre de espesor constante (mucho más pequeño que el diámetro d del plato). Se fija un componente electrónico a la placa y se fija un sensor de temperatura a la placa a cierta distancia de ese componente. Puede suponer que el flujo de calor (es decir, la potencia por unidad de área) desde la placa hasta el aire circundante es proporcional a la diferencia de temperatura de la placa en el punto dado (el coeficiente de proporcionalidad es constante en toda la placa, incluido el sitio del componente electrónico).

a) El componente electrónico ha estado disipando energía con una potencia constante de $\mathcal{P} = 35 \text{ W}$ durante mucho tiempo y la temperatura promedio de la placa se ha estabilizado en el valor $T_0 = 49^\circ\text{C}$. Ahora, el componente se apaga y la temperatura promedio de la placa comienza a descender; se necesita $\tau = 10 \text{ s}$ para alcanzar el valor $T_1 = 48^\circ\text{C}$. Determine la capacidad calorífica C (unidades $\text{J}/^\circ\text{C}$) del plato. Las capacidades del componente electrónico y el sensor de temperatura son insignificantes.

b) Ahora, el componente electrónico ha estado apagado durante mucho tiempo; en el momento $t = 0$, cierta cantidad de calor Q se disipa durante un tiempo muy corto. En la Figura y la Tabla, la temperatura se da en función del tiempo, según lo registrado por el sensor. Determine la cantidad de calor disipado Q .

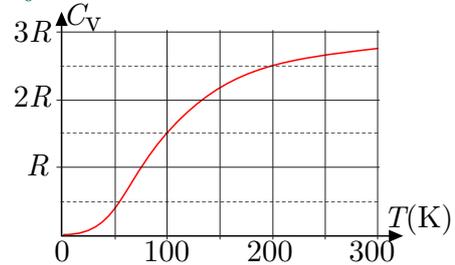


t (s)	0	20	30	100	200	300
T ($^\circ\text{C}$)	20,0	20,0	20,4	32,9	41,6	42,4
t (s)	400	600	800	1000	1200	1400
T ($^\circ\text{C}$)	39,9	33,4	27,9	24,4	22,3	21,2

Pr 64. [Seagull-2016] ¿Cuál sería la temperatura en el medio de un cuerpo celeste del tamaño de nuestra Luna en Kelvins si se pueden hacer las siguientes suposiciones? El cuerpo celeste consiste en un material sólido homogéneo de densidad media $\rho = 3 \text{ g/cm}^3$ y conductividad térmica $k = 3 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ y tiene la forma de una esfera de radio $R = 2000 \text{ km}$. Irradia calor como un cuerpo perfectamente negro, es decir, el flujo de calor en su superficie $I = \sigma T^4$, donde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ J/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^4$ y T es su temperatura superficial. No hay flujo de calor externo que caiga sobre la superficie de este cuerpo celeste. Debido a la descomposición nuclear de varios isótopos (principalmente uranio 238 y sus productos de descomposición), la densidad de potencia liberada en el material de la corteza es $\mathcal{P}/m = 7 \times 10^{-12} \text{ W/kg}$.

Pr 65. [EstFin-2011] Calcule la eficiencia térmica de un ciclo de gas ideal que consta de dos isotermas a las temperaturas T_1 y T_2 y dos isócoras que las unen. (Una isócora es un proceso de volumen constante). El motor está construido de manera que el calor liberado durante la isócora de enfriamiento se utiliza para alimentar la isócora de calentamiento.

Pr 66. [EstFin-2014] Considere un cubo de longitud lateral $a = 1 \text{ cm}$, hecho de aluminio (densidad $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$, masa molar $M_A = 23 \text{ g/mol}$). La capacidad calorífica de un mol de aluminio se da en función de la temperatura en el gráfico a continuación. La velocidad de la luz $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, constante universal de gas $R = 8,31 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$. La temperatura inicial del cubo es $T_0 = 300 \text{ K}$.



- a) ¿Cuál es la energía térmica total de dicho cubo a la temperatura inicial T_0 ?
- b) Ahora, el cubo tiene 5 caras pintadas en blanco (refleja todas las longitudes de onda relevantes) y una cara pintada en negro (absorbe todas estas ondas). El cubo está rodeado de vacío a una temperatura muy baja (casi cero absoluto); no hay campo de gravedad. Inicialmente, el cubo está en reposo; a medida que se enfría debido a la radiación de calor, comienza a moverse lentamente. Estime su velocidad terminal v_1 .
- c) A temperaturas muy bajas, la capacidad calorífica del aluminio es proporcional a T^3 , donde T es su temperatura. ¿Qué dependencia funcional $f(t)$ describe la temperatura en función del tiempo [$T = Af(Bt)$, donde A y B son constantes] para temperaturas tan bajas bajo los supuestos de la pregunta anterior?
- d) Ahora, el cubo tiene 5 caras cubiertas con una capa de aislamiento térmico (puede despreciar la transferencia de calor a través de estas caras). Una cara queda sin cubrir. El cubo está rodeado por una atmósfera de hidrógeno a una temperatura muy baja (masa molar de moléculas de hidrógeno $M_{\text{H}_2} = 2 \text{ g/mol}$). El cubo comienza a enfriarse debido a la

transferencia de calor al gas circundante; puede despreciar la radiación de calor. Inicialmente, el cubo está en reposo; a medida que se enfría, comienza a moverse lentamente. Estime el orden de magnitud de su velocidad terminal v_2 . Suponga que el gas circundante es escaso, de modo que el camino libre medio de las moléculas es mucho mayor que a . Asuma que $v_2 \ll c_s$ donde c_s es la velocidad del sonido en la atmósfera que rodea el cubo.

Pr 67. [PhysCup] En comparación con las bombillas ordinarias, los diodos emisores de luz (LED) proporcionan una eficiencia de iluminación muy alta. La razón es que la distribución de energía espectral de las lámparas ordinarias está cerca de la radiación del cuerpo negro, en cuyo caso se puede decir que los fotones están en equilibrio térmico con el cuerpo negro. Luego, la ley de Planck da la energía total irradiada por un cuerpo negro por unidad de área, unidad de tiempo y unidad de frecuencia

$$L_\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

donde ν es la frecuencia, $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ la constante de Planck, $c = 2,997 \times 10^8 \text{ m/s}$ la velocidad de la luz, $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \times \text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann y T la temperatura; tenga en cuenta que

$$\int_0^\infty L_\nu d\nu = \sigma T^4,$$

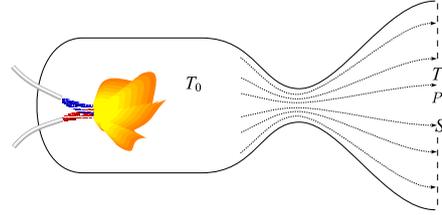
donde $\sigma = 5,678 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann. Con una radiación de cuerpo negro, se desperdicia mucha energía al irradiar luz no visible. Mientras tanto, los LED-s pueden construirse de manera que irradian casi solo luz visible. En experimentos recientes⁸, se ha informado que tales LED se han construido con una eficiencia superior al 100%. Aquí la eficiencia se define como la razón entre la energía de luz radiada y la energía eléctrica consumida.

Con base en aproximaciones razonables, encuentre cuál es la mayor eficiencia teóricamente posible de un LED suponiendo que:

- el LED tiene un disipador de calor que se mantiene a temperatura ambiente $T_0 = 293 \text{ K}$ (a través de un intercambio de calor lo suficientemente rápido con el medio circundante);
- el LED emite luz a longitudes de onda más pequeñas que $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$
- la superficie de la parte emisora de luz del LED es $S = 1 \text{ mm}^2$;
- la potencia de emisión de luz del LED es $\mathcal{P} = 1 \mu\text{W}$.

Pr 68. [EstOpen-2010] Un motor de cohete de combustible líquido se muestra esquemáticamente en la figura a continuación. Los productos quemados se forman dentro de la cámara de combustión a alta presión y temperatura y se expanden adiabáticamente mientras salen de la cámara a través de la boquilla. Si la boquilla está construida correctamente (el diámetro del cuello debe corresponder a la velocidad de combustión), los gases de escape continúan la expansión adiabática después de pasar por la garganta, hasta la salida de la boquilla. Como resultado, una parte importante de la energía térmica se convierte en energía cinética de los gases de escape a la salida de

la boquilla. La temperatura de los gases de escape dentro de la cámara de combustión es T_0 ; a la salida, el área de la sección transversal de la boquilla es S , la temperatura de los gases de escape es T_1 y la presión es P_1 . Encuentre la fuerza de empuje F asumiendo que $T_0 \gg T_1$, el efecto de la presión atmosférica sobre el empuje puede ser despreciado y la energía cinética de los gases dentro de la cámara de combustión es insignificante (en comparación con la energía térmica). La capacidad calorífica de un mol de los gases de escape en volumen constante es $c_V = \frac{5}{2}R$, donde R es la constante del gas universal.



Pr 69. Durante un día, las masas de aire en la atmósfera generalmente están en un movimiento turbulento (aleatorio), hacia arriba y hacia abajo, lo que conduce a lo que se conoce como *atmósfera adiabática*: cuando se eleva un paquete de aire (un volumen ficticio), es expandiéndose y enfriándose adiabáticamente; en una atmósfera adiabática, el aire circundante se encuentra en equilibrio mecánico y termodinámico con el paquete de aire ascendente (tiene exactamente la misma presión y temperatura). Encuentre, como depende la temperatura del aire T con la altura h en ambiente adiabático. A nivel del suelo ($h = 0$), $T = T_0$; exprese su respuesta en términos del índice adiabático del aire γ , masa molar μ , constante universal de gas R y aceleración de caída libre g .

Pr 70. [IPhO-2006] En la parte inferior de un rascacielos de 1000 m de altura, la temperatura exterior es $T_{\text{fondo}} = 30^\circ\text{C}$. El objetivo es estimar la temperatura exterior T_{cima} en la cima. Considere una delgada losa de aire (gas nitrógeno ideal con coeficiente adiabático $\gamma = 7/5$) subiendo lentamente a la altura z donde la presión es más baja y suponga que esta losa se expande adiabáticamente para que su temperatura baje a la temperatura del aire circundante.

- ¿Cómo es el cambio fraccional de temperatura dT/T relacionado con dP/P , el cambio fraccional en la presión?
- Expresa la diferencia de presión dP en términos de dz , el cambio de altura.
- ¿Cuál es la temperatura resultante en la parte superior del edificio?

Datos: constante de Boltzmann: $k_B = 1,38 \times 10^{23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, masa de una molécula de nitrógeno: $m = 4,65 \times 10^{-26} \text{ kg}$, aceleración gravitacional: $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Pr 71. [IPhO-2006] Un huevo, tomado directamente del refrigerador a temperatura $T_0 = 4^\circ\text{C}$, se deja caer en una olla con agua que se mantiene hirviendo a temperatura T_1 .

- ¿Qué tan grande es la cantidad de energía U que se necesita para coagular el huevo?
- ¿Qué tan grande es el flujo de calor I que fluye hacia el huevo?

⁸P. Santhanam et al, *Thermoelectrically Pumped Light-Emitting Diodes Operating above Unity Efficiency*, Phys. Rev. Lett. **108**, 097403 (2012).

c) ¿Qué tan grande es la potencia calorífica \mathcal{P} transferido al huevo?

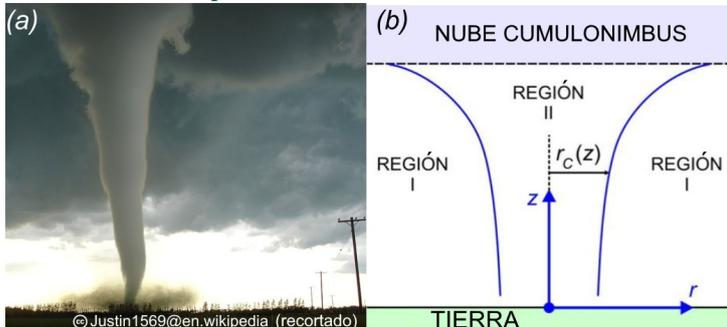
d) ¿Durante cuánto tiempo se necesita cocinar el huevo para que esté duro?

Sugerencia: puede usar la forma simplificada de la Ley de Fourier $I = \kappa \Delta T / \Delta r$, donde ΔT es la diferencia de temperatura asociada con Δr , la escala de longitud típica del problema. El flujo de calor I está en unidades de $W \cdot m^{-2}$.

Datos: densidad del huevo: $\mu = 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, capacidad calorífica específica del huevo: $C = 4,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$, radio del huevo: $R = 2,5 \text{ cm}$, temperatura de coagulación de la albúmina (proteína del huevo): $T_c = 65^\circ \text{C}$, coeficiente de transporte de calor: $\kappa = 0,64 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ (se supone que es lo mismo para la albúmina líquida y sólida).

Pr 72. [EstPhO-2000] Un recipiente herméticamente cerrado con paredes gruesas y sólidas se llena con glicerina. Dentro de la glicerina, hay una burbuja de aire de volumen $w = 1 \text{ ml}$. A temperatura $T_0 = 20^\circ \text{C}$, la presión en el recipiente es $P_0 = 1 \text{ atm}$. El volumen total del recipiente $V = 11$ el coeficiente de expansión térmica lineal del recipiente es insignificanmente pequeño. El coeficiente de expansión térmica volumétrica de glicerina $\alpha = 5,1 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Expresé la presión dentro del recipiente en función de la temperatura; ¿a qué temperaturas y por qué su expresión se vuelve inválida?

Pr 73. [WoPhO-2012] Un tornado es un violento vórtice (columna giratoria) de aire que conecta la base de la nube cumulonimbus⁹ y el suelo. Una característica distintiva del tornado es su núcleo en forma de embudo o embudo de condensación (Región II) que está hecho de pequeñas gotas de agua que se condensan a medida que son absorbidas por el núcleo como se muestra en la Fig. 1 (b). Esta región está definida por el radio central $r_C(z)$ que generalmente aumenta con la altitud formando la forma de embudo del tornado. La Región I es la región fuera del núcleo del tornado. En nuestro modelo simplificado, las regiones I y II tienen unas distribuciones de velocidad diferente como exploraremos más adelante.



En lo que sigue, puede usar los siguientes datos:

aceleración gravitacional $g = 9,8 \text{ m/s}^2$,

la densidad del aire $\rho_{\text{aire}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$,

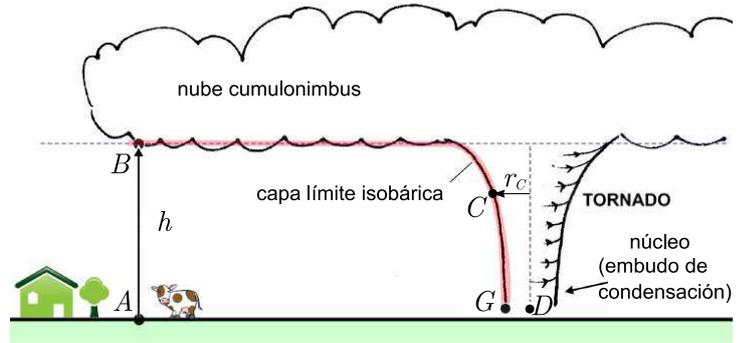
masa molar de aire seco $M_{\text{aire}} = 0,029 \text{ kg/mol}$,

constante universal de gas $R = 8,314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$,

presión en el punto A (ver figura) $P_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$,

la temperatura en el punto A (ver figura) $T_0 = 5^\circ \text{C}$,

razón de capacidades caloríficas del aire $C_P/C_V = 1,4$.



A) El clima tranquilo. Investigaremos la presión atmosférica de la troposfera (la parte más baja de la atmósfera) donde ocurre la mayoría de los fenómenos climáticos, incluido el tornado. Comencemos desde un lugar de clima tranquilo en el punto A lejos del tornado.

i) Suponiendo una ley de gases ideal, aceleración de gravedad constante y una temperatura constante T_0 . Demuestre que la presión atmosférica en función de la altitud z es $P(z) = P_0 e^{-\alpha z}$; exprese α en términos de las constantes enumeradas anteriormente.

ii) Por simplicidad, despreciemos la dependencia de la densidad del aire, ρ_{aire} en z . Derive la presión en función de la altitud, $P(z)$.

iii) Usando su resultado en (ii) calcule la presión en el punto B ¡en la base del cumulonimbus! (use $h = 1 \text{ km}$).

B) La forma. Dentro del núcleo del tornado, el vapor de agua se condensa en gotitas de líquido a medida que el aire gira en espiral hacia el núcleo formando un embudo de condensación. El vapor de agua se condensa cuando la temperatura cae por debajo del punto de rocío. La caída de temperatura es causada por una caída de presión, por lo que los puntos donde el vapor de agua comienza a condensarse se encuentran en una superficie de igual presión, llamada *capa límite isobárica* que se muestra como límite rojo en la figura. Este es el límite entre la región I y II. Por ahora solo consideramos la región I. Considere un punto G (ver figura) muy cerca del suelo ($z \approx 0$) ubicado a distancia radial $r = r_G$ del eje (punto C). En ese punto, la velocidad del viento v_G puede tratarse como la velocidad de rotación en tierra del tornado. Además, hacemos los siguientes supuestos: el tornado es estacionario (solo tiene rotación y no tiene traslación); la velocidad radial del viento es mucho menor que la velocidad tangencial $v = v(r)$ que se supondrá que es independiente de la altitud z (depende solo de r); se pueden ignorar las turbulencias muy cercanas al suelo; la densidad de masa de aire (ρ_{aire}) se puede suponer que es constante.

i) Demuestre que en ambas regiones I y II,

$$\frac{dP}{dr} = \rho_{\text{aire}} \frac{v^2}{r}.$$

ii) En la región I, calcule la velocidad del viento v como una función de r , en términos de v_G y r_G .

iii) Estime la velocidad del aire v_G .

iv) Derive la forma del embudo de condensación, es decir, encuentre la función $r_C(z)$, donde r_C denota la distancia radial de un punto C en la capa límite (ver figura). Dibuje esta forma de tornado en cantidades adimensionales z/h vs. r/r_G , donde h es la altura definida en la figura.

v) La mayoría de los tornados parecen embudos (el radio es ma-

⁹La cumulonimbus es una nube vertical imponente muy alta, densa e involucrada en tormentas eléctricas y otros climas lluviosos.

por a mayor altitud), mientras que algunos tienen un diámetro más uniforme, como una tubería. ¿Qué tipo tiene la mayor velocidad de rotación en tierra v_G ?

C) El núcleo. Ahora consideraremos las regiones I y II.

i) En la región II ($r < r_C$) el núcleo del tornado se comporta como un cuerpo rígido, derive la expresión de la velocidad (tangencial) $v(r)$ en esta región.

ii) Calcule la presión en el centro del tornado (punto D , a la misma altitud que el punto G).

iii) Estime la temperatura T_D en el centro del tornado.

iv) Según su hallazgo en (iii) sugiera, lo que podría ser una posible fuente de la tremenda energía del tornado.

D) Ventanas. Se cree que la presión diferencial cerca de un tornado hace que las casas mal ventiladas “exploten” a pesar de que el tornado solo está pasando a cierta distancia. Por lo tanto, algunas personas sugieren que las ventanas deben abrirse para que la presión en la casa se equilibre con el exterior. Entonces, sin embargo, el viento y los escombros pueden entrar libremente en la casa. Considere una casa con todas las ventanas y aberturas cerradas con un techo de dimensión (ancho \times largo \times espesor) $15\text{ m} \times 15\text{ m} \times 0,1\text{ m}$ y densidad de masa $\rho_{\text{techo}} = 800\text{ kg/m}^3$. El tornado viene rápido y pasa a distancia $d = 2r_G$ lejos de la casa

i) ¿Cuál es la razón de elevación-fuerza-peso para el techo?

ii) ¿Se debe abrir o cerrar las ventanas?

Pr 74. [IPhO-2004] Un globo de goma lleno de gas helio sube al cielo donde la presión y la temperatura disminuyen con la altura. En las siguientes preguntas, suponga que la forma del globo sigue siendo esférica independientemente de la carga útil y desprecie el volumen de la carga útil. También suponga que la temperatura del gas helio dentro del globo es siempre la misma que la del aire del ambiente y trate todos los gases como gases ideales. La constante de gas universal es $R = 8,31\text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ y las masas molares de helio y aire son $M_{\text{He}} = 4,00 \times 10^{-3}\text{ kg/mol}$ y $M_{\text{aire}} = 28,9 \times 10^{-3}\text{ kg/mol}$, respectivamente. La aceleración gravitacional es $g = 9,8\text{ m/s}^2$.

A-i) Considere que la presión del aire ambiente es P y la temperatura es T . La presión dentro del globo es más alta que la del exterior debido a la tensión superficial del globo. El globo contiene n moles de gas helio y la presión interior es $P + \Delta P$. Encuentre la fuerza de flotación F_B actuando sobre el globo en función de P y ΔP .

ii) En un día particular de verano en Corea, la temperatura del aire T a la altura z desde el nivel del mar se encontró que era $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ en el rango de $0 < z < 15\text{ km}$ con $z_0 = 49\text{ km}$ y $T_0 = 303\text{ K}$. La presión y la densidad a nivel del mar fueron $P_0 = 1\text{ atm} = 1,01 \times 10^5\text{ Pa}$ y $\rho_0 = 1,16\text{ kg/m}^3$, respectivamente. En este rango de altura, la presión toma la forma $P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta$. Expresé η en términos de z_0 , ρ_0 , P_0 y g y encuentre su valor numérico para dos cifras significativas. Trate la aceleración gravitacional como una constante, independiente de la altura.

B) Cuando un globo de goma de forma esférica con radio no estirado r_0 se infla a una esfera de radio $r(\geq r_0)$, la superficie del globo contiene energía extra elástica debido al estiramiento. En una teoría simplista, la energía elástica a temperatura

constante T puede ser expresada por

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right),$$

donde $\lambda \equiv r/r_0 (\geq 1)$ es la razón tamaño-inflación y κ es una constante en unidades de mol/m^2 .

i) Expresé ΔP en términos de parámetros dados en la ecuación arriba y dibuje ΔP como una función de $\lambda = r/r_0$.

ii) La constante κ se puede determinar a partir de la cantidad de gas necesaria para inflar el globo. A $T_0 = 303\text{ K}$ y $P_0 = 1\text{ atm}$, un globo sin estirar ($\lambda = 1$) contiene $n_0 = 12,5\text{ mol}$. Se necesita $n = 3,6n_0 = 45\text{ mol}$ en total para inflar el globo a $\lambda = 1,5$ al mismo T_0 y P_0 . Expresé el parámetro globo a , definido como $a = \kappa/\kappa_0$, en término de n , n_0 y λ , donde $\kappa_0 = r_0 P_0 / 4RT_0$. Evalúe a con dos cifras significativas.

C) Se prepara un globo como en (A-ii) a nivel del mar (inflado a $\lambda = 1,5$ con $n = 3,6 = 45\text{ mol}$ de gas helio a $T_0 = 303\text{ K}$ y $P_0 = 1\text{ atm}$). La masa total, incluido el gas, el globo y otras cargas útiles es $M_T = 1,12\text{ kg}$. Ahora considere que el globo se eleva desde el nivel del mar.

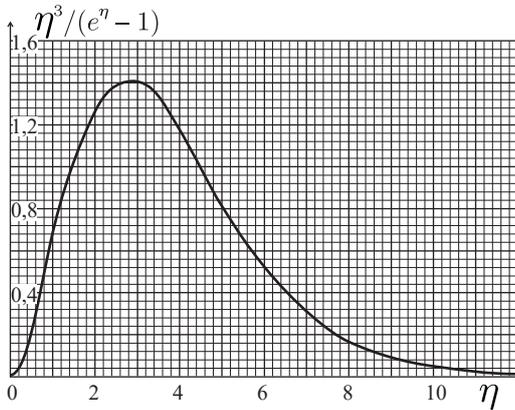
i) Supongamos que el globo finalmente se detiene a la altura z_f donde la fuerza de flotación equilibra el peso total. Encuentre z_f y la razón de inflación λ_f a esa altura. Dé las respuestas en dos dígitos significativos. Suponga que no hay efecto de deriva ni fuga de gas durante el vuelo ascendente.

Pr 75. [IPhO-1992] Esta es una continuación del problema 6; aquí repetimos los datos numéricos: el satélite es una esfera de radio 1 m , cuyos puntos tienen la misma temperatura. El satélite está cerca de la Tierra, pero no está sombreado por ella; la temperatura superficial del Sol $T_\odot = 6000\text{ K}$ y su radio $R_\odot = 6,96 \times 10^8\text{ m}$, la distancia entre la Tierra y el Sol $L = 1,5 \times 10^{11}\text{ m}$ la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

El espectro de radiación del cuerpo negro $u(T, f)$ de un cuerpo a temperatura T obedece la ley de radiación de Planck

$$u(T, f) df = AT^4 \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1}$$

donde $u df$ es la densidad de energía de la radiación electromagnética en un intervalo de frecuencia ($f, f + df$) y $\eta = hf/kT$; la constante A puede expresarse en términos de constantes fundamentales c (la velocidad de la luz), k (la constante de Boltzmann) y h (la constante de Planck): $A = \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3}$. El espectro del cuerpo negro, integrado en todas las frecuencias f y direcciones de emisión, da la potencia radiada total por unidad de área $I = \frac{c}{4} \int u(T, f) df = \sigma T^4$ como se expresa en la ley Stefan-Boltzmann dada anteriormente. La figura muestra el espectro normalizado $u(T, f)k/hAT^3$ como una función de η .



En muchas aplicaciones es necesario mantener el satélite lo más frío posible. Para enfriar el satélite, los ingenieros usan un revestimiento reflectante que refleja la luz por encima de una frecuencia límite pero no evita que se escape la radiación de calor a una frecuencia más baja.

Suponga que esta frecuencia de corte (aguda) corresponde a $hf/k = 1200$ K.

Estime ahora, cuál es la temperatura del satélite.

Sugerencia: no se requiere cálculo exacto; por eso, en lugar de integraciones precisas y complicadas, use cálculos aproximados cuando sea posible. Se conoce el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

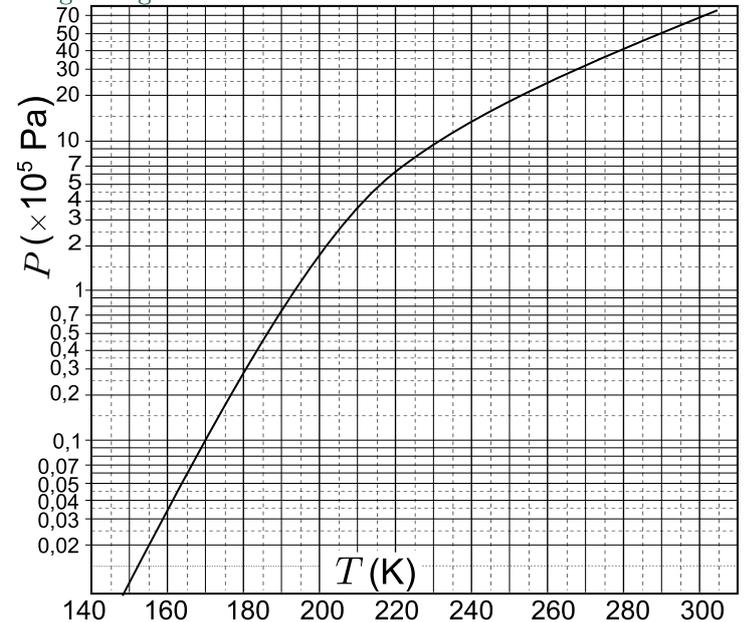
En la función $\eta^3/(e^\eta - 1)$ el máximo está cerca de $\eta \approx 2,82$. Para pequeños valores de η , aproximación $e^\eta \approx 1 + \eta$ puede ser usado.

Pr 76. [IPhO-2000]¹⁰ Un motor térmico ideal recibe calor del cuerpo A y lo da al cuerpo B ; ambos cuerpos tienen igual capacidad calorífica C . La temperatura inicial del cuerpo A era T_1 y la del cuerpo B era T_2 . ¿Cuál es la cantidad máxima de trabajo que puede realizar un motor térmico de este tipo?

Pr 77. Ambas juntas de soldadura de un termopar intercambian calor con el aire circundante a la tasa $\mathcal{P}_e = \kappa \Delta T$, donde ΔT es la diferencia entre la temperatura de una junta de soldadura y la del aire; la constante $\kappa = 30 \mu\text{W/K}$. La sensibilidad del termopar α se define como el coeficiente de proporcionalidad entre el voltaje del termopar y la diferencia de temperatura entre las juntas de soldadura; en este caso, $\alpha = 50 \mu\text{V/K}$. El termopar se alimenta con corriente eléctrica $I = 10$ mA; encuentre la temperatura de la unión de soldadura más fría si la temperatura del aire $t_a = 20^\circ\text{C}$. Suponga que los procesos de transferencia de energía en el termopar son reversibles.

Pr 78. [EstPhO-2010] Un disco de radio $r = 1$ cm está hecho de hielo seco (dióxido de carbono en fase sólida) y se presiona contra una placa que está hecha de un material de alta conductividad térmica. El disco se presiona contra la placa con fuerza. $F = 100$ N, que se aplica al centro del disco y es casi (pero no exactamente) perpendicular a la placa. Cuando la temperatura de la placa es baja, la fuerza de fricción entre el disco y la placa mantiene el disco en reposo. Sin embargo, cuando la temperatura de la placa sube por encima de un valor crítico

T_0 , la fuerza de fricción desaparece casi por completo y el disco comienza a deslizarse a lo largo de la placa. Encuentre T_0 . La presión del aire es 101 kPa, la presión de triple punto del dióxido de carbono es $P_t = 5,1 \times 10^5$ kPa, la presión de saturación de dióxido de carbono se representa frente a la temperatura en la figura siguiente.



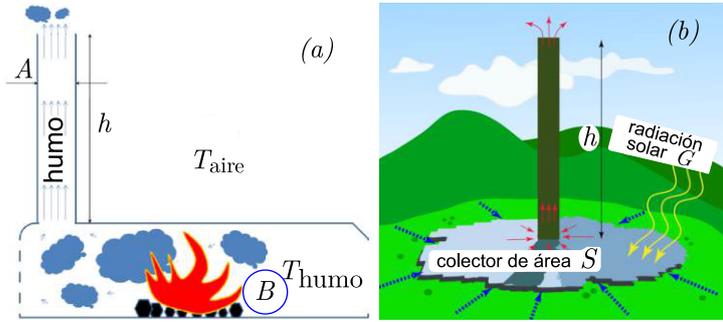
Pr 79. [EstPhO-2009] Una habitación está siendo calentada por un radiador eléctrico de potencia $\mathcal{P} = 1$ kW. La temperatura exterior es $t_0 = 0^\circ\text{C}$, la temperatura ambiente se ha estabilizado a $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Se abre una ventana de ventilación que suministra aire fresco a la tasa de volumen $v = 201$ l/s. ¿Cuál será la nueva temperatura ambiente? El aire puede considerarse un gas diatómico ideal.

Pr 80. [IPhO-1997] En un día determinado, el aire está seco y tiene una densidad $\rho = 1,250$ kg/m³. Al día siguiente, la humedad ha aumentado y el aire está 2% en masa de vapor de agua. La presión y la temperatura son las mismas que el día anterior. ¿Cuál es la densidad del aire ρ' ahora? Masa molar media de aire seco: $M_{\text{aire}} = 28,8$ g/mol; masa molar de agua: $M_{\text{agua}} = 18$ g/mol. Asuma el comportamiento del gas ideal.

Pr 81. [IPhO-2010] **Chimenea.** Los productos gaseosos de la combustión se liberan a la atmósfera de temperatura T_{aire} a través de una chimenea alta de sección transversal A y altura h (ver figura a). La materia sólida se quema en el horno a temperatura T_{humo} . El volumen de gases producidos por unidad de tiempo en el horno es B . Asuma que:

- la velocidad de los gases en el horno es despreciablemente pequeña;
- la masa molar promedio de los gases producidos en el horno (humo) es igual a la del aire y estos gases pueden tratarse como ideales;
- la chimenea no es muy alta (no más de cien metros);
- se puede suponer que la temperatura del humo es constante en toda la longitud de la chimenea.

¹⁰Eliminado por la Junta Internacional del texto final.



a) ¿Cuál es la altura mínima de la chimenea necesaria para una extracción eficiente de los gases? Respuesta expresa en términos de B , A , T_{aire} , $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T \equiv T_{\text{humo}} - T_{\text{aire}}$. En todas las partes posteriores, suponga que esta altura mínima es la altura de la chimenea.

b) Suponga que dos chimeneas están construidas para servir exactamente el mismo propósito. Sus secciones transversales son idénticas, pero están diseñadas para funcionar en diferentes partes del mundo: una en regiones frías, diseñada para trabajar a una temperatura atmosférica promedio de -30°C y la otra en regiones cálidas, diseñada para trabajar a una atmósfera atmosférica promedio temperatura de 30°C . La temperatura del horno es de 400°C . Se calculó que la altura de la chimenea diseñada para trabajar en regiones frías es de 100 m. ¿Qué altura tiene la otra chimenea?

c) ¿Cómo varía la velocidad de los gases a lo largo de la altura de la chimenea? Haga un bosquejo/gráfico asumiendo que la sección transversal de la chimenea no cambia a lo largo de la altura.

d) ¿Cómo varía la presión de los gases a lo largo de la altura de la chimenea?

Planta de energía solar. El principio de funcionamiento de la chimenea se puede utilizar para construir un tipo particular de planta de energía solar, la *chimenea solar*. La idea se ilustra en la figura b. El sol calienta el aire debajo del colector de área S con una periferia abierta para permitir la entrada de aire sin perturbaciones. A medida que el aire caliente se eleva a través de la chimenea (flechas rojas), el aire frío nuevo ingresa al colector desde sus alrededores (flechas azules) permitiendo un flujo continuo de aire a través de la planta de energía. El flujo de aire a través de la chimenea alimenta una turbina, lo que resulta en la producción de energía eléctrica. La energía de la radiación solar por unidad de tiempo por unidad de área horizontal del colector es G . Suponga que toda esa energía puede usarse para calentar el aire en el colector (la capacidad calorífica de masa del aire es c y uno puede despreciar su dependencia de la temperatura del aire). Definimos la eficiencia de la chimenea solar como la razón entre la energía cinética del flujo de gas y la energía solar absorbida en el calentamiento del aire antes de su entrada en la chimenea.

e) ¿Cuál es la eficiencia de la planta de energía de la chimenea solar?

f) Haga un gráfico que muestre cómo cambia la eficiencia de la chimenea con su altura.

El prototipo de chimenea construido en Manzanares, España, tenía una altura de 195 m y un radio de 5 m. El colector es circular con un diámetro de 244 m. El calor específico del aire en condiciones operativas típicas de la chimenea solar prototipo

es de $1012 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, la densidad del aire caliente es de aproximadamente $0,9 \text{ kg/m}^3$ y la temperatura típica de la atmósfera $T_{\text{aire}} = 295 \text{ K}$. En Manzanares, la energía solar por unidad de superficie horizontal es típicamente de 150 W/m^2 durante un día soleado.

g) ¿Cuál es la eficiencia del prototipo de planta de energía? Escriba la estimación numérica.

h) ¿Cuánta energía podría producirse en la planta de prototipo?

i) ¿Cuánta energía por unidad de tiempo podría producir la planta de energía durante un día soleado típico?

j) ¿Qué tan grande es el aumento de la temperatura del aire cuando ingresa a la chimenea (aire caliente) desde los alrededores (aire frío)? Escriba la fórmula general y evalúela para el prototipo de chimenea.

k) ¿Cuál es el caudal de aire a través del sistema?

Pr 82. El aire (una mezcla de oxígeno y nitrógeno) se almacena en un recipiente cerrado equipado con un pistón en un extremo a una temperatura de $T = 77,4 \text{ K}$. La cantidad total de la mezcla de gases ocupa el volumen $V_0 = 1,00 \text{ l}$ y su presión inicial es $P_0 = 0,500 \text{ atm}$. Con la ayuda del pistón, la mezcla de gases se comprime lentamente a temperatura constante. Utilizando supuestos plausibles, trace la presión del sistema en función de su volumen hasta una décima parte del volumen inicial, si la razón entre el número de moles de oxígeno y el número de moles de nitrógeno es $n_{\text{O}_2} : n_{\text{N}_2} = 21 : 79$. Encuentre la presión y el volumen en puntos distintivos de estas curvas isotérmicas.

Puede usar los siguientes datos: punto de ebullición de nitrógeno líquido en $P_1 = 1,00 \text{ atm}$: $T_{\text{N}_2} = 77,4 \text{ K}$; punto de ebullición de oxígeno líquido a $P_1 = 1,00 \text{ atm}$: $T_{\text{O}_2} = 90,2 \text{ K}$; calor de vaporización de oxígeno: $\lambda_{\text{O}_2} = 213 \text{ J/g}$ (se puede suponer que es constante para $T_{\text{N}_2} \leq T \leq T_{\text{O}_2}$). Desprecie la solubilidad del nitrógeno gaseoso en oxígeno líquido y viceversa.

Pr 83. [WoPhOSR-2013] El escape atmosférico térmico es un proceso en el que las pequeñas moléculas de gas alcanzan velocidades lo suficientemente altas como para escapar del campo gravitacional de la Tierra y llegar al espacio exterior. Se cree que este proceso, conocido como escape de Jeans, fue el responsable de la pérdida de agua de las atmósferas de Venus y Marte, debido a su menor velocidad de escape.

En lo que sigue asumimos que la distribución de las moléculas de la atmósfera está dada por la distribución Maxwelliana. Por lo tanto, a cualquier temperatura siempre puede haber algunas moléculas cuya velocidad es mayor que la velocidad de escape. Una molécula ubicada en la parte inferior de la atmósfera no podría escapar al espacio exterior a pesar de que su velocidad es mayor que la velocidad límite porque pronto colisionaría con otras moléculas, perdiendo una gran parte de su energía. Para escapar, estas moléculas deben estar a cierta altura: tal que la densidad sea tan baja que su probabilidad de colisión sea insignificante. La región en la atmósfera donde se cumple esta condición se llama exosfera y su límite inferior, que separa la zona densa de la exosfera, se llama exobase. Puede suponer que la temperatura cerca de la exobase es aproximadamente

$T = 1000 \text{ K}$; la constante universal de gas $R = 8,31 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$, la aceleración de caída libre $g \approx 9,5 \text{ m/s}^2$, el número de Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ 1/mol}$.

a) *Altura de la exobase.* La exobase se define como la altura por encima de la cual una partícula que se mueve radialmente hacia afuera sufrirá menos de una colisión de retrodispersión en promedio. Esto significa que la ruta libre media debe ser igual a la *altura de la escala* H , que se define como un incremento de altura que conduce a que la densidad de la atmósfera caiga e veces. ¿Cuál es la masa molar promedio de la atmósfera de la Tierra en la exobase si $H = 60 \text{ km}$?

b) El camino libre medio λ es la distancia promedio cubierta por una partícula en movimiento en un gas entre dos colisiones consecutivas y esto se puede expresar mediante la siguiente igualdad:

$$\lambda = (\sigma n)^{-1}.$$

donde σ es el área transversal efectiva; $\sigma = 0,2 \text{ nm}^2$ para las colisiones de un átomo de hidrógeno con las moléculas de aire (con una composición molecular correspondiente a la exobase) y n es el número de moléculas por unidad de volumen. Sabemos que a una altitud de $h_0 = 250 \text{ km}$, la presión es $P_0 = 21 \mu\text{Pa}$ y se puede suponer que la temperatura es constante entre la exobase y la altura de referencia h_0 . Determine el camino libre medio para los átomos de hidrógeno a la altitud h_0 .

c) Determine la altura de la exobase h_{EB} .

d) *Escape atmosférico.* Las partículas en la exobase con suficiente velocidad hacia afuera escapan de la atracción gravitacional. Suponiendo una distribución Maxwelliana, determine la probabilidad de que un átomo de hidrógeno tenga una velocidad mayor que la velocidad de escape en la exobase.

e) Determine el flujo de átomos de hidrógeno (número de partículas por unidad de área y por unidad de tiempo) que escapará de la atmósfera, sabiendo que la concentración de átomos de hidrógeno en la exobase es $n_H = 1 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$. Puede suponer que el hidrógeno está en un estado monoatómico: cuando las moléculas atmosféricas alcanzan cierta altura por debajo de h_{EB} , se dividen en átomos debido a la radiación solar.

Los siguientes cálculos demostrarán que el escape atmosférico térmico no puede ser el único proceso que explica por qué algunos gases están presentes en la atmósfera y otros no.

f) Sabiendo que la masa molar promedio actual de la atmósfera es $M_{\text{atm}} = 29 \text{ g/mol}$, la presión atmosférica es $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ y una fracción de $\chi_H = 5,5 \times 10^{-7}$ de las moléculas atmosféricas son moléculas de hidrógeno, estime el número N_H de átomos de hidrógeno en la atmósfera de la Tierra. Desprecie la presencia de otras moléculas que contienen hidrógeno.

g) Hagamos un modelo robusto y supongamos que la concentración de átomos de hidrógeno en la exobase permanece constante en el tiempo. Averigüe cuánto tiempo le tomaría a la mitad de los átomos de hidrógeno escapar de la atmósfera de la Tierra.

h) Ahora consideremos los átomos de helio; actualmente, su concentración en la exobase es $n_{\text{He}} = 2,5 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$ y hacen $\chi_{\text{He}} = 5 \times 10^{-6}$ de las moléculas atmosféricas. Usemos ahora un modelo más realista y supongamos que su concentración en exobase es proporcional a su concentración en la atmósfera inferior.

i) Sugiera una razón por la cual todavía hay algo de hidrógeno en la atmósfera de la Tierra.

Pr 84. [IPhO-2012] Modelemos la formación de una estrella de la siguiente manera. Una nube esférica de gas interestelar disperso, inicialmente en reposo, comienza a colapsar debido a su propia gravedad. El radio inicial de la pelota es r_0 y de masa m . La temperatura de los alrededores (mucho más escasa que el gas) y la temperatura inicial del gas es uniforme T_0 . Se puede suponer que el gas es ideal. La masa molar promedio del gas es μ y su índice adiabático es $\gamma > \frac{4}{3}$. Asuma que $G \frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$, donde R es el gas constante y G es la constante de gravedad.

a) Durante gran parte del colapso, el gas es tan transparente que el calor generado se irradia inmediatamente, es decir, la bola permanece en equilibrio termodinámico con su entorno. Cuántas veces (n) ¿aumenta la presión mientras el radio se reduce a la mitad ($r_1 = 0,5r_0$)? Suponga que la densidad del gas se mantiene uniforme.

b) En algún radio $r_3 \ll r_0$, el gas se vuelve lo suficientemente denso como para ser opaco a la radiación de calor. Calcule la cantidad de calor Q irradiado durante el colapso del radio r_0 abajo a r_3 . Suponga que la densidad del gas se mantiene uniforme¹¹.

c) Para radios menores que r_3 puede despreciar la radiación de calor. Determine cómo la temperatura T de la pelota depende de su radio $r < r_3$.

d) Finalmente, no podemos despreciar el efecto de la presión sobre la dinámica del gas y el colapso se detiene en $r = r_4$ (con $r_4 \ll r_3$). Sin embargo, la radiación aún puede despreciarse y la temperatura aún no es lo suficientemente alta como para comenzar la fusión nuclear. La presión de tal protoestrella ya no es uniforme, pero aún se pueden hacer estimaciones aproximadas con prefactores numéricos inexactos. *Estime* el radio final r_4 y la temperatura respectiva T_4 .

Pr 85. [APhO-2010]¹² La sonoluminiscencia es un fenómeno cuando las ondas de sonido fuertes colocan pequeñas burbujas dentro de un líquido (por ejemplo, agua) en movimiento oscilatorio; las burbujas que colapsan pueden calentar el gas atrapado tanto que emitirá radiación de cuerpo negro en un rango visible de longitudes de onda.

A lo largo del problema, puede usar el siguiente modelo. En todos los tiempos t , la burbuja de radio $R = R(t)$ es esférica y su centro permanece estacionario en el agua de densidad $\rho_0 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. La densidad del gas atrapado es ρ , la presión es P y la temperatura T son siempre uniformes dentro de la burbuja a medida que disminuye su tamaño. Se supone que el

¹¹Esto es válido mientras la energía gravitacional domine sobre la energía térmica; en el problema original de IPhO, los estudiantes debían concluir esto por sí mismos, basándose en la dinámica de la nube de gas. Se debe enfatizar que dicho modelo con una etapa de contracción balística se desvía del modelo estándar de colapso de la protoestrella, en cuyo caso una nube de gas se contrae debido al enfriamiento mediante radiación mientras mantiene un cuasi equilibrio entre las fuerzas gravitacionales y de presión.

¹²Algunas preguntas se eliminan en esta versión: tiene la libertad de eludir cálculos matemáticos innecesariamente largos, pero usted necesita demostrar más independencia.

líquido que contiene la burbuja es isotrópico, no viscoso, incompresible y mucho más grande que la burbuja. Esto significa que podemos considerar una esfera de agua ficticia de radio $r \gg R$ centrada alrededor de la burbuja y se contraerá isotrópicamente durante la contracción de la burbuja. El intercambio de calor entre el gas y el agua circundante puede despreciarse. Todos los efectos debidos a la gravedad y la tensión superficial se desprecian de modo que para cualquier t , la presión dentro del líquido es función de r solamente: $P = P(r)$ para $r > R$. Puede suponer que la presión ambiental $P_0 = P(r \rightarrow \infty) = 1,01 \times 10^5$ Pa y la temperatura del agua $T_0 = 300$ K permanecen constantes en el tiempo. Inicialmente, la burbuja tiene un radio $R_i = 7R_0$, la temperatura del gas atrapado es $T = T_0$ y el agua circundante está inmóvil (es decir, $\frac{dR}{dt} = 0$); aquí $R_0 = 5,00 \mu\text{m}$ denota el radio de equilibrio de la burbuja en la cual el gas atrapado tendría presión P_0 con $T = T_0$. La razón entre el calor específico a presión constante y a volumen constante para el gas es $\gamma = 5/3$.

Puede resultarle útil saber que la energía cinética del agua circundante puede expresarse en términos de la velocidad de contracción de la burbuja \dot{R} como

$$E_c = 2\pi\rho_0 R^3 \dot{R}^2.$$

- Encuentre el radio mínimo R_m y la temperatura máxima T_m de la burbuja durante el proceso de contracción.
- Encuentre el radio R_f de la burbuja en el momento t_f cuando la velocidad de contracción de la burbuja es máxima.
- La mayor parte de la radiación de calor se emite entre $t = t_f$ y el momento t_m cuando se alcanza el radio mínimo. Estime la duración total del período de radiación.
- Para que nuestro modelo siga siendo válido, la pérdida de calor Q debido a la radiación debe ser mucho menor que la energía interna del gas U ; requeriremos $Q \leq \frac{1}{5}U$. Esto significa que si consideramos el gas atrapado como una esfera de radio R que emite radiación térmica a la emisividad a , la emisividad no debería ser demasiado grande, $a \leq a_0$. Estime el valor de a_0 . Constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,678 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

Pr 86. [APhO-2007] a) Para un metal en equilibrio térmico, la energía promedio de los electrones de conducción hace una cierta contribución al calor específico. Según la física clásica, los electrones de conducción en los metales constituyen gas de electrones libres atrapado en el volumen del metal y este gas puede considerarse ideal. Encuentre la contribución promedio de cada electrón al calor específico a volumen constante (c_V) usando el modelo clásico.

b) Experimentalmente se ha demostrado que el calor específico de los electrones de conducción a volumen constante en metales depende de la temperatura y el valor experimental a temperatura ambiente es aproximadamente dos órdenes de magnitud menor que su contraparte clásica. Esto se debe a que los electrones obedecen las estadísticas cuánticas en lugar de las estadísticas clásicas. Según la teoría cuántica, para un material metálico, la densidad de estados de electrones de conducción (el número de estados electrónicos por unidad de volumen y

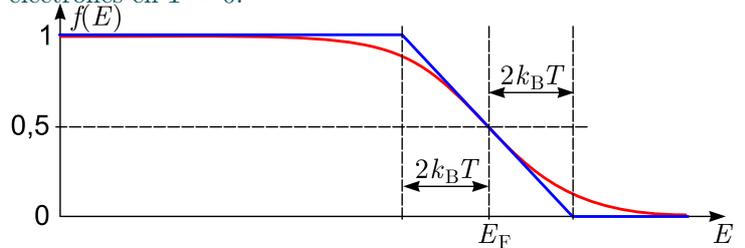
por unidad de energía) es proporcional a la raíz cuadrada de la energía electrónica E , entonces el número de estados dE dentro del rango de energía para un metal de volumen V se puede escribir como

$$dS = CV\sqrt{E} dE,$$

donde C es la constante de normalización, determinada por el número total de electrones del sistema. La probabilidad de que el estado de energía E esté ocupado por un electrón se llama *distribución de Fermi*,

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{k_B T}}},$$

donde $k_B = 1,381 \times 10^{-23}$ J/K es la Boltzmann constante y T es la temperatura absoluta, mientras que E_F se llama nivel de Fermi. Por lo general, a temperatura ambiente, E_F es de varios eV para materiales metálicos ($1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19}$ J) y, por lo tanto, $k_B T \ll E_F$, en cuyo caso la distribución de Fermi se comporta como se muestra en la figura por la curva roja; se le permite aproximarla mediante una función lineal por partes como se muestra en la línea azul. Además, puede despreciar la dependencia del nivel de Fermi de la temperatura para que su valor se pueda expresar en términos del número total de electrones en $T = 0$.



Expresar la contribución promedio de cada electrón al calor específico a un volumen constante en términos de k_B , E_F y T utilizando el modelo de cuántico. Dé una explicación cualitativa para la desviación del resultado clásico del de la teoría cuántica.

Pr 87. [EstFin-2014]¹³ Consideremos un sistema de dipolos magnéticos N independientes (espines) en un campo magnético B y a temperatura T . Cada espín tiene dos estados: hacia arriba y hacia abajo; la componente x de su momento dipolar toma valores $+\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m}$ y $-\mu_B$, respectivamente (x es un eje fijo).

- ¿Cuál es el valor promedio de la energía total E_e del sistema de espines en función de B y T ?
- En el límite de temperatura alta $T \gg \frac{\alpha B m}{k}$, ¿cuál es la capacidad calorífica C de dicho sistema de espines?

Pr 88. [EstOpen-2001] Para almacenar $\nu = 1$ mol de gas ideal a temperatura T_0 , se usa recipiente de acero (densidad ρ). Suponga que las paredes del recipiente son mucho más delgadas que las dimensiones lineales del recipiente. De acuerdo con la especificación, el esfuerzo mecánico en las paredes (fuerza por área de sección transversal) debe ser en todas partes (y en cualquier dirección) no mayor que σ_0 . ¿Cuál es la masa mínima del recipiente?

¹³El texto aquí se ha modificado.

Apéndice 1: Derivación de la ley de Boltzmann.

La razón por la cual una probabilidad de ocupación del nivel de energía desaparece exponencialmente con la energía radica en el hecho de que en el caso de un depósito de calor que se supone que consiste en una gran cantidad de subsistemas, el número de estados de cuánticos crece exponencialmente con la energía total E_{tot} . Consideremos simplificando un cuerpo que tiene varios niveles de energía equiespaciados, $E_0, E_1 = E_0 + \mathcal{E}, \dots, E_n = E_0 + n\mathcal{E}$. Además, considere que el depósito de calor esté hecho de un gran número $N \gg n$ de partículas idénticas, cada una de las cuales tiene dos niveles de energía, 0 (estado fundamental) y E (el estado excitado) y considere que el número total de partículas en el estado excitado sea M (con $M, N - M \gg n$). Ahora, el cuerpo se pone en contacto con el depósito; supongamos que su energía se vuelve igual a $n\mathcal{E}$. Debido a la ley de conservación de energía, esto disminuirá el número de partículas excitadas dentro del depósito de calor por n . Por lo tanto, el número de partículas excitadas es $M - n$; el número de estados diferentes del depósito de calor que satisfacen esta condición es igual al número de formas diferentes de seleccionar $M - n$ partículas del conjunto de N partículas, dada por

$$\binom{N}{M-n} = \frac{N!}{(M-n)!(N-M+n)!}.$$

Para el estado fundamental del cuerpo, el número de estados del reservorio de calor está dado de manera similar por

$$\binom{N}{M} = \frac{N!}{M!(N-M)!}.$$

Como todos estos estados son igualmente probables, la razón de probabilidades para el n -ésimo estado excitado y el estado fundamental del cuerpo están dados por la proporción del número de estados,

$$\frac{p_n}{p_0} = \frac{N!}{(M-n)!(N-M+n)!} \frac{M!(N-M)!}{N!} =$$

$$\frac{(M-n+1)(M-n+2)\dots M}{(N-M+1)(N-M+2)\dots(N-M+n)} \approx \left(\frac{M}{N-M}\right)^n.$$

Aquí, $\frac{M}{N-M}$ es un número que caracteriza el estado del depósito de calor; podemos introducir el parámetro $\beta = -\frac{1}{\mathcal{E}} \ln\left(\frac{M}{N-M} - 1\right)$, lo que nos lleva a la ley de Boltzmann

$$\frac{p_n}{p_0} = e^{-\beta E_n}.$$

Esta “prueba” probablemente no sea demasiado satisfactoria para un lector orientado matemáticamente, porque hicimos suposiciones muy limitantes para las partículas del depósito de calor. Para una prueba más genérica, se puede introducir la densidad del nivel de energía $g(E)$ de las “partículas” que forman el depósito de calor, expresan la densidad del nivel de energía de todo el depósito como la N -ésima convolución de $g(E)$ consigo mismo, calcúlelo en el *espacio de Fourier* (porque la transformación de Fourier de una convolución es solo el producto de las transformadas de Fourier), tome la transformación inversa de Fourier y calcule asintóticamente (para $N \rightarrow \infty$) al utilizar el *método de la máxima pendiente*, estas técnicas están más allá del alcance de este folleto.

Apéndice 2: La energía cinética media de la ley de Maxwell.

Usando la regla de sustitución,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x = v_T \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

La integración es esencialmente una suma y sabemos que una derivada de una suma es la suma de las derivadas. Por lo tanto, podemos derivar a ambos lados de esta igualdad con respecto a v_T ; el lado izquierdo resulta en

$$\frac{d}{dv_T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dv_T} e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x = 2v_T^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x,$$

y el lado derecho produce

$$\frac{d}{dv_T} v_T \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Esto significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x = \frac{1}{2} v_T^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Recordemos que $f(v_x) = e^{-v_x^2/v_T^2} / \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x$. Entonces podemos reescribir la expresión para la velocidad cuadrática media como

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x / \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x = \frac{1}{2} v_T^2.$$

Ahora, si sustituimos de nuevo $v_T = \sqrt{2k_B T/m}$ (que corresponde a la distribución de Maxwell), obtenemos finalmente

$$\overline{v_x^2} = k_B T/m.$$

7. SUGERENCIAS

1. Expresé la potencia de calentamiento constante como $\mathcal{P} = \frac{dQ}{dt}$ y sustituya $dQ = C_P dT$; esto le permite encontrar C_P como una función del tiempo t ; elimine t utilizando la dependencia provista $T = T(t)$.
2. Algunas pistas ya se dan después del problema; determinar la potencia neta de calentamiento a la temperatura promedio de calentamiento de hielo $T_2 \approx 72^\circ\text{C}$ comparando las tangentes de la curva $T(t)$ en $T = T_1$ (ver hecho 6) y $T = T_2$.
3. En promedio, la potencia de calentamiento eléctrico es igual a la potencia de enfriamiento debido a la pérdida de calor. Las oscilaciones de temperatura son pequeñas, por lo tanto (según la idea 2) la potencia de enfriamiento es casi constante; mientras tanto, la potencia de calentamiento oscila entre un valor máximo U_1^2/R y cero según una forma de onda rectangular. Aquí, la resistencia del filamento R se puede expresar en términos de la longitud del filamento l y del área de la sección transversal S (el valor de este último no se da, pero podemos esperar que se cancele en la respuesta final). Ahora podemos expresar la potencia térmica extraída (del) filamento para los dos medios períodos y encontrar la amplitud de las oscilaciones de temperatura de la 1LTD.
4. Basado en el hecho 6, determine cuántos porcentajes han aumentado el flujo térmico hacia el medio ambiente y, use esto para concluir, cuántos porcentajes han aumentado la tasa de producción de calor dentro de la casa.

5. Siga la idea 3; la resistencia térmica de la placa de cobre se calcula de la misma manera que una resistencia eléctrica, $R_T = \rho d/s$.
22. Recordemos la idea 7: para procesos dinámicos, al principio, se alcanza un equilibrio mecánico, lo que significa la igualdad de presiones; los otros equilibrios (por ejemplo, térmicos) se alcanzarán más tarde (dentro de un plazo razonable). Esto significa que si hay evaporación de una superficie de agua y, debido a eso, cerca de la superficie del agua, hay una mayor concentración de vapores de agua, entonces debe haber una menor concentración de moléculas de aire. De hecho, si bien debido al equilibrio mecánico, la presión total debe permanecer igual a la atmosférica, también es igual a la suma de la presión de vapor y la presión del aire 13. Se puede decir de manera equivalente que la presión del aire es igual a la presión atmosférica menos la presión de vapor.

Si la presión de saturación $P_s(T)$ se hace mayor que la presión atmosférica P_{atm} , entonces el equilibrio mecánico ya no es posible: como aprendimos anteriormente, muy cerca de la superficie del agua, hay cuasi-equilibrio térmico y $r = 100\%$ y, por lo tanto, en esa capa, la presión de vapor $P_v = P_s(T)$. La presión total P en esa capa es la suma de la presión de vapor y la presión del aire, por lo tanto, $P \geq P_v > P_{\text{atm}}$. Por lo tanto, los vapores en la superficie del líquido tendrán una presión mayor que la atmosférica y el aire circundante será expulsado. Además, si hubiera una pequeña burbuja dentro del líquido, también tendría una mayor presión de vapores dentro que la presión de los alrededores, por lo tanto, la burbuja comenzaría a crecer. Cabe señalar que siempre hay burbujas microscópicas u otras impurezas dentro del líquido que pueden servir como centros de evaporación.

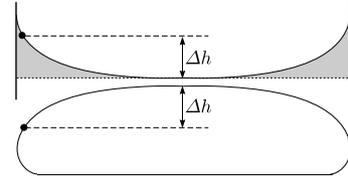
25. Aplique el mismo enfoque que se usó para derivar la expresión del ángulo de contacto en términos de tensiones superficiales, pero tenga en cuenta que el área de contacto sólido-líquido ahora es más pequeña.
26. Tenemos un menisco como se muestra en la figura y separamos una fracción de agua (representada en gris) por un plano horizontal ficticio que pasa por el fondo plano del menisco y consideramos el equilibrio de fuerza para el volumen gris. En el plano de separación dentro del líquido, la presión hidrostática es igual a la atmosférica. De hecho, en la parte inferior del menisco, a través de la interfaz plana agua-aire, no hay presión capilar, por lo tanto, la presión del manómetro hidrostático debe ser cero; dentro del líquido, la presión hidrostática es función de la altura solamente, por lo que la presión permanece igual a la atmosférica a través del plano horizontal. Entonces, el volumen representado por el gris en la figura está rodeado por la presión atmosférica, es decir, no hay fuerza neta adicional que actúe sobre él debido a la presión.



29. Observe que el volumen del agua es fijo: si el grosor de la capa fuera pequeño, la energía gravitacional sería peque-

ña, pero la energía de la superficie sería grande (lo opuesto también es válido). Expresar la energía total para una cantidad fija de líquido.

30. Use el hecho 17 y la idea 19 para concluir que la forma de la sección transversal del menisco es idéntica a la sección transversal del conjunto de líquido que se encuentra sobre una superficie plana (ver problema 29). De hecho, la curvatura de la superficie depende solo de la tensión superficial y la presión manométrica, que pueden coincidir en el caso del menisco y una "piscina" como se muestra en la figura.



32. Suponiendo lo contrario, considere dos motores de calor con diferentes eficiencias. El ciclo de Carnot es reversible, por lo que usaremos el motor de mayor eficiencia como bomba de calor (con ciclo de Carnot invertido): toma calor de un cuerpo de temperatura más baja y lo da a un cuerpo de temperatura más alta; se necesita hacer un trabajo mecánico neto para operar la bomba de calor. Demuestre que si el trabajo realizado por el motor térmico de menor eficiencia se utiliza para impulsar la bomba de calor de mayor eficiencia, el efecto neto de todo el sistema estaría en violación de 2LTD.
46. Para el período de enfriamiento, durante la cantidad de días ΔN para los cuales la temperatura se mantuvo en el rango (pequeño) entre T y $T + \Delta T$, la pérdida de calor es $\mathcal{P}_c = (T - T_0)C\Delta N \cdot 3600 \text{ s/h}$. $(T - T_0)\Delta N$ es una región rectangular estrecha horizontal entre el gráfico y la línea vertical $T = T_0$, por lo tanto, la pérdida de calor total está relacionada con el área entre el gráfico y la línea $T = T_0$.

8. RESPUESTAS

- $4PT^3/aT_0^4$.
- $m = Q/(L + c\Delta T) \approx 28 \text{ g}$ ($Q = 500 \text{ W} \cdot 37 \text{ s}$).
- $\Delta T = \frac{U_1^2 T}{8\rho_{\text{el}}\rho c l^2} \approx 34 \text{ K}$.
- $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \frac{t_2 - t_1}{t_1 - t_0} \approx 53 \text{ °C}$.
- $\Delta T = \mathcal{P} \rho d/s \approx 11,7 \text{ K}$; $Q = (T_1 - T_2)S/\int \rho dx \approx 18 \text{ mW}$.
- $T = T_{\odot} \sqrt{R_{\odot}/2L} \approx 290 \text{ K}$.
- $N + 1$.
- $T_{\text{mín}} = (I/\sigma)^{1/4}$, $T_{\text{máx}} = (\sqrt{3}I/\sigma)^{1/4}$.
- $v \approx \frac{m}{M} \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$.
- $N = 2 \frac{\ln[(1/n_{\text{antes}} - 1)/(1/n_{\text{después}} - 1)]}{\ln(M_{238\text{UF}_6}/M_{235\text{UF}_6})} \approx 162$.
- $I \approx \frac{3}{2} nRT_1 \sqrt{\frac{RT_2}{M}}$.
-
- $\Delta m = \left(\frac{1}{T_{\text{aire}}} - \frac{1}{T_1} \right) \frac{p_0 V_0}{R} (\mu_{\text{aire}} - \mu_{\text{H}})$.
- $T = 1,4T_0$.
- Se reduce 2 veces; $\gamma = \frac{4}{3}$.

16. $\Delta T = \frac{\rho_0 T_0 g \Delta h}{P_0} \frac{\gamma-1}{\gamma} = 2,1 \text{ }^\circ\text{C}$.

17.

18. a) $v_P \approx 23 \text{ m/s}$; b) donde la distancia entre líneas es mínima; c) $v_{\text{crít}} \approx 23 \text{ m/s}$.

19.

20. $\sqrt{2,5}$.

21. (a) $a = \frac{P_0 A}{M}$; (b) $a = \frac{P_0 A}{2M}$.

22. a) $\Delta T \approx 1,5 \text{ }^\circ\text{C}$; b) $\Delta T \approx 6,5 \text{ }^\circ\text{C}$; c) $\Delta T = 12,1(1-r)$; d) ≈ 4 .

23. $\kappa = \frac{T-T_{100 \text{ }^\circ\text{C}}}{\lambda} c = 0,154$.

24. a) $T_A = 350 \text{ K}$, $T_B = 100 \text{ K}$; b) $t_1 \approx 67 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C} \frac{m_A}{m_B} \approx 22$.

25. 175° .

26. $\Delta V = \frac{2\pi}{\rho} \sqrt{\frac{V\pi}{h}} = 0,58 \text{ ml}$.

27. $13,3 \text{ cm}$.

28.

29. $h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}(1 + \cos \alpha)}$.

30. $h = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$.

31.

32.

33.

34.

35. $\frac{dP_s}{dT} = P_s \frac{\lambda \mu}{RT^2}$; $\Delta P = \frac{T_0 - T_1}{T_0^2} \frac{P_0 \mu L}{R} \approx 350 \text{ Pa}$.

36. $U = L/\mu N_A$, trabajo de salida, energía potencial negativa de una molécula en fase líquida.

37. $m = \frac{I^2 R t T_2}{(T_1 - T_2) \lambda} \approx 1,5 \text{ g}$.

38. $T_3 \approx 1,4 T_2 \approx 3,5 T_1$.

39. $T = \frac{V_0}{I_0 R_0} T_0 = 2650 \text{ K}$; $d = \sqrt[3]{\frac{4V_0 I_0 \rho_0}{\pi^2 R_0 k \sigma T^4}} = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}$;
 $l = \frac{R_0 d^2 \pi}{4\rho_0} = 0,0566 \text{ m}$.

40.

41. $d_2 = \frac{1}{11} d_1$.

42. b) $T = \frac{V_1 + V_2}{\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2}} \approx 16,5 \text{ }^\circ\text{C}$; c) $r \approx 1,22$; d) $m \approx 7,5 \text{ g}$.

43. a) $T_2 = T_0 + \frac{\Delta s(P_0 \pi r^2 + mg)}{nR} = 322 \text{ K}$,

$P = P_0 + \frac{mg}{\pi r^2} = 102,32 \text{ kPa}$;

b) $W = (mg + P_0 \pi r^2) \Delta s = 24,1 \text{ J}$;

c) $Q = \Delta(P_0 \pi r^2 + mg) \left(\frac{c_V}{R} + 1\right) = 84 \text{ J}$;

d) $\mathcal{P} = \left(\frac{c_V}{R} + 1\right) \frac{\Delta s}{\Delta t} (P_0 \pi r^2 + mg) = 8,4 \text{ W}$,

$\dot{n} = \mathcal{P} \frac{\lambda}{hc} = 2,2 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}$;

e) $\eta = \frac{1}{\left(1 + \frac{P_0 \pi r^2}{mg}\right) \left(1 + \frac{c_V}{R}\right)} = 2,8 \times 10^{-3}$;

f) $T_3 = T_2 \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 321 \text{ K}$.

44. $T_1 = 3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0 \approx 400 \text{ K}$.

45. $\eta = 1 - k^{1-\gamma} = 0,602$.

46. $a = 290 \text{ EUR}$.

47. a) $\rho_{20} \rho_{\text{el}} c l^2 (T_1 - T_r) / U_0^2 = 25 \text{ ms}$, b) $\rho_{20} c l^2 U_0^{-2} \int \rho_{\text{el}} dT = 1,5 \text{ ms}$.

48. a) $T_2 = \frac{x\sigma T_0 + \rho h c_p v d T_1}{x\sigma + \rho h c_p v d}$; b) $t = -C \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{P(T)} \approx 120 \text{ s}$

49. a) $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$; b) $\rho = \frac{\rho_0 M}{RT}$; c) $\Delta \rho g L = \rho_0 v^2$ ($2\Delta \rho g L = \rho_0 v^2$ es bueno también, ver problema 29 de Mecánica);

d) $T = T_0 \left[1 + \frac{1}{gL} \left(\frac{\rho g L}{S P_0} \frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}}\right] \approx 322 \text{ K}$.

50. a) $P = P_0 \frac{w}{w - V \alpha (T - T_0)} \frac{T}{T_0}$; b) $T_{\text{máx}} = T_0 + \frac{w}{V \alpha} = 22,0 \text{ }^\circ\text{C}$.

51. $P \approx 45 \text{ kPa}$.

52. a) $T_1 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 279 \text{ K}$;

b) $h_1 = \frac{2}{g \rho_0} \frac{P_0 - P_1}{1 + \frac{P_1}{P_0} \frac{T_0}{T_1}} = 1410 \text{ m}$;

c) $T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} + \frac{q v m}{c_p} = 271 \text{ K}$; d) $h = 35 \text{ mm}$;

e) $T_3 = T_2 \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 300 \text{ K}$.

53. $L = \frac{1}{2} \frac{m^2}{M P S} \frac{RT}{\mu} + \left(t - \frac{1}{PS} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}\right) \frac{m}{M} \sqrt{\frac{RT}{2\mu}}$; $t \approx 160 \text{ s}$.

54. $t \sim \frac{1}{100} \text{ s}$.

55.

56. $T = \sqrt{\frac{d}{\alpha f} \sqrt{\frac{I}{\sigma}}}$; $D/F > 2$.

57. 1900 m .

58. a) $C = 4R$; b) $\omega = r^{-1} \sqrt{8\sigma/\rho h}$.

59. a) $P_E > P_A > P_D > P_B > P_C$; b) 195 K ; c) 220 hPa ; d) $W_{\text{neta}} = R(T_H - T_C) \ln(P_E/P_A)$, $Q_{\text{perdido}} = RT_C \ln(P_D/P_C)$;

e) $\varepsilon_i = 0,35$; g) II y III.

60. a) $R = L/4\kappa S$; b) $T = T_0 + \frac{P_0 \cos[\omega t + \arcsin(C\omega/\sqrt{C^2\omega^2 + R^{-2}})]}{\sqrt{C^2\omega^2 + R^{-2}}}$;

c) $\omega = 1/\sqrt{2} C R$; d) $\omega_c \approx \kappa/c\rho L^2$.

61. a) $\mathcal{P} = \frac{\varepsilon \sigma 4\pi R_1^2 (T_2^4 - T_1^4)}{1 + (1-\varepsilon) R_1^2/R_2^2} \approx 1,78 \text{ W}$;

b) $\tau = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \lambda \mu / \mathcal{P} \approx 36 \text{ h}$.

62. a) $N = -\frac{\ln \beta}{\alpha}$; b) $W \approx N P_0 V \alpha = P_0 V |\ln \beta|$;

c) $T = T_0 \beta^{\frac{1}{\gamma}-1}$; d) $W = 2p_0 V$.

63. a) $C \approx \frac{\mathcal{P} \tau}{T_0 - T_1} = 350 \text{ J/}^\circ\text{C}$; b) $Q = C T_c \approx 46 \text{ kJ}$.

64. 4689 K .

65. $1 - \frac{T_1}{T_2}$.

66. a) $Q = qv \approx 546 \text{ J}$;

b) $v_1 = \frac{Q}{3\rho a^3 c} \approx 0,22 \text{ mm/s}$ (una respuesta aproximada $v \approx 0,67 \text{ mm/s}$. está bien); c) $T = A \cdot e^{-Bt}$;

d) $v_2 \sim \frac{Q}{\rho a^3} \sqrt{\frac{M_H}{RT}} \approx 180 \text{ m/s}$.

67. 135% .

68. $F = 7SP_1 T_0 / T_1$.

69. $T = T_0 - (1 - \gamma^{-1}) \frac{\mu g}{R}$.

70. a) $\frac{dT}{T} = (1 - \gamma^{-1}) \frac{dP}{P}$; b) $dP = -\frac{mgP}{k_B T} dz$;

c) $T_{\text{cima}} = 20,6 \text{ }^\circ\text{C}$.

71. a) $U = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 C (T_c - T_0) = 16768 \text{ J}$; b) $I = \kappa (T_1 - T_0) / R = 2458 \text{ W m}^{-2}$;

c) $\mathcal{P} = 4\pi R^2 I = 19,3 \text{ W}$; d) $\tau = U/\mathcal{P} = 869 \text{ s}$ (estas son estimaciones, por lo que se aceptan diferentes factores numéricos).

72. $P = P_0 \frac{T}{T_0} \frac{w_0}{w_0 - V \alpha (T - T_0)}$; invalido si $T > 22 \text{ }^\circ\text{C}$.

73. Ai) $\alpha = g M_{\text{aire}} / RT_0$; Aii) $P = P_0 - \rho g z$; Aiii) 88 kPa

Bii) $v = v_G r_G / r$; Biii) 141 m/s ;

Biv) $r = r_G / \sqrt{1 - 2gz/v_G^2}$; Bv) con forma de tuberías;

Ci) $v = v_G r / r_G$; Cii) 76 kPa ;

Ciii) entre 5°C (en G) y -7°C (despreciando el calor latente de condensación); Civ) calor liberado de la condensación;

Di) 3,8; Dii) se debe cerrar.

74. Ai) $F_B = M_A n g \frac{P}{P + \Delta P}$; Aii) $\gamma = \rho_0 z_0 g / P_0 = 5,5$;

Bi) $\Delta P = \frac{4\kappa RT}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})$; Bii) $a = 0,110$;

Ci) $z_f = 11 \text{ km}$, $\lambda_f = 2,1$.

75. $T_\odot = \sqrt{R_\odot 2L} \approx 289 \text{ K}$.

76. $W_{\text{máx}} = C(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$.

77. $T_2 = \frac{T_0 \kappa}{\kappa + T_0 \alpha} \approx 288 \text{ K}$.

78. $T_0 \approx 212 \text{ K}$.

79. $13,2^\circ\text{C}$.

80. $1,2352 \text{ kg/m}^3$.

81. a) $h \geq \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{T_{\text{aire}}}{\Delta T}$; b) 45 m ; c) $v = \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_{\text{aire}}}}$ es constante;

d) $P = P_0 - (\rho_{\text{aire}} - \rho_{\text{humo}})gh - \rho_{\text{humo}}gz$; e) $\eta = \frac{gh}{cT_{\text{aire}}}$;

f) lineal; g) $0,64\%$; h) 45 kW ; i) 360 kWh con 8 h ;

j) $\Delta T = \left(\frac{G^2 S^2 T_{\text{aire}}}{A^2 c^2 \rho_{\text{caliente}}^2 2gh} \right)^{1/3} \approx 9,1 \text{ K}$; $w = 760 \text{ kg/s}$.

82. $V_1 = 0,4721$, $P_1 = 1,06 \text{ atm}$; $V_2 = 0,3951$, $P_2 = 1,22 \text{ atm}$,
 $V_f = 0,1001$, $P_f = 1,22 \text{ atm}$.

83. a) 14 g/mol ; b) $3,3 \text{ km}$; c) 420 km ; d) $2,6 \times 10^{-3}$;

e) $7,5 \times 10^{11} \text{ 1/m}^2\text{s}$; f) $1,2 \times 10^{38}$; g) 4500 años ;

h) $9,6 \times 10^{11} \text{ years}$; i) se suministra de H_2O de océanos.

84. a) 8 ; b) $\frac{3mRT_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{r_3}$; c) $T_0 \left(\frac{r_3}{r} \right)^{3\gamma-3}$;

d) $r_4 \approx r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G} \right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}$, $T_4 \approx T_0 \left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G} \right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}$.

85. a) $R_m = 2,31 \mu\text{m}$, $T_m = 6,86 \times 10^4 \text{ K}$; b) $R_f = 2,98 \mu\text{m}$; c)
 $\tau \sim 3 \times 10^{-9} \text{ s}$; d) $a_0 \sim 0,01$.

86. a) $\frac{3}{2} k_B T$; b) $\frac{3}{k_B} T / E_F$, a medida que la temperatura aumenta, la energía de la mayoría de los electrones permanecerá sin cambios.

87. a) $-N \mu_B B \tanh(\mu_B B / k_B T)$; b) $N(\mu_B B)^2 / k_B T$.

88. $m = 1,5RT\nu\rho/\sigma$ (se requiere prueba de mínimo).