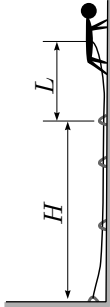
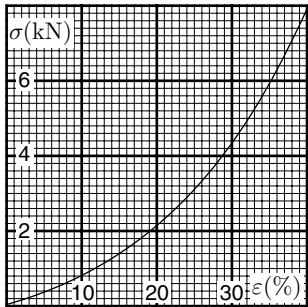


1. Kalliokiipeilijä (6 pistettä)

Kalliokiipeilijä, jonka massa on $m = 80$ kg, kiipeää pitkin pystysuoraa vuoren seinämää. Suojellakseen itseään hän käyttää seuraavaa menetelmää. Kimmoisan köyden toinen pää on kiinnitetty maahan. Köysi kulkee kallioon ankkuroitujen sileiden sulkurenkaiden (karabiinien) läpi. Viimeinen rengas on korkeudella $H = 20$ m. Köyden toinen pää kulkee erityisen köysijarrun läpi, joka on kiinni kiipeilijän valjaissa. Kiipeämisen aikana köysijarru pitää köyden tiukalla, mutta sen avulla kiipeilijä voi pidentää köyden suojaavaa osaa. (Tässä tehtävässä oletetaan, että köysijarrun ja sulkurenkaan välinen osa köyttä on koko ajan tiukkana.) *Putoamistilanteessa suurin kiihtyvyyks ei saa terveystarvikkeen takia ylittää arvoa $a_{\max} = 5g$.* Voit olettaa, että köysi on aina pystysuorassa, soljen ja kiipeilijän massakeskipisteen välinen etäisyys on hyvin pieni ja että köyden ja sulkurenkaiden (carabineers) välinen kitka on mitättömän pieni. Allaolevassa kuvassa on esitetty köyden suhteellisen venymän (strain) ja jännityksen (stress) suhteellisen venymän (strain) ja jännityksen (stress).

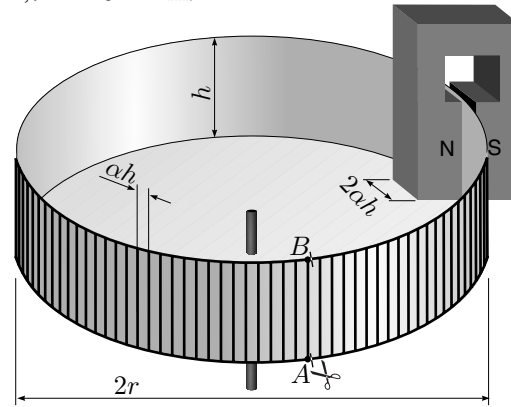
1) Oletetaan, että kiipeilijän ja viimeisen sulkurenkaan välinen etäisyys on L (katso kuva). Jos kiipeilijä putoaa, korkeimman sulkurenkaan ja kiipeilijän välimatka saa suurimman arvon l (kun kiipeilijä saavuttaa tämän aseman, köysi alkaa nostaa kiipeilijää). Määritä epäyhtälö, josta saadaan rajat suurelle l . (1,5 pistettä)

2) Määritä suurin sallittu etäisyys L ennen kuin kiipeilijän täytyy kiinnittää seuraava sulkurengas. (4,5 pistettä)



2. Magneettijarru (12 pistettä)

Pyörrevirtoja voidaan käyttää hidastamaan liikuvia metalliesineitä, esimerkiksi pyörivää levyä. Tarkastellaan seuraava yksinkertaista mallia. Yksinkertaisuuden vuoksi korvataan levy "ympyränmuotoisella rautatiellä", katso kuva. Homogeeninen levy (kannun pohja) ja paljon ohuempi sylinterinmuotoinen seinä muodostavat muovisen "kannun", jonka säde on $r = 15$ cm, massa $m = 100$ g, ja korkeus $h = 1$ cm. Sylinterin reunoilla on kaksi johdinlankatankoa ("raiteet") jotka on yhdistetty joukolla yhdensuuntaisia johdinlankatankoja ("ratapölkkyillä"). Sekä "ratapölkkyt" että "raiteet" ovat kuparilankaa, jonka halkaisija on $\delta = 0,2$ mm; "ratapölkkyjen" välinen etäisyys on $L = \alpha h$, missä $\alpha = 0,3$. Systeemin kitkatonta pyörimistä hidastetaan magneetilla, jonka napojen välisen homogeenisen magneettikentän magneettivuonitiheys on ($B = 1$ T). Oletetaan, että homogeeninen kenttä täyttää poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoisen alueen, jonka pinta-ala vastaa kolmen perättäisen "ratapölkyn" pinta-alaa (ts. alueen koko on $h \times 2\alpha h$). Tämän alueen ulkopuolella kenttää ei tarvitse ottaa huomioon. Kuparin resistiivisyys (ominaisresistanssi) on $\rho = 1,724 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$.



Oletetaan, että systeemi ei liiku.

- 1) Mikä on yhden "ratapölkyn" resistanssi R ? (1 piste)
- 2) Oletetaan, että "raiteet" katkaistaan erään "ratapölkyn" päitä A ja B . Osoita, että päiden A

ja B väliselle resistanssille saadaan likiarvo lausekkeesta $R_0 = R[\sqrt{\alpha(\alpha + 2)} - \alpha]$. (2 pistettä)

Oletetaan nyt, että systeemi pyörii kulmanopeudella $\omega = 1$ rad/s ja raiteita ei ole katkaistu.

3) Piirrä vastaava DC piiri, jossa vastusten läpi kulkevat virrat ovat yhtä suuria kuin vastavissa "rautatiosissa": "ratapölkky-" ja "raide"-segmenteissä (perättäisten "ratapölkkyjen" välissä). (2 pistettä)

4) Osoita edelläsaatujen tulosten avulla, että (Joulen) tehohäviö saadaan yhtälöstä $P = k B^2 \omega^2 / R$, ja anna lauseke vakiolle k . (3 pistettä)

5) Määritä hidastava momentti M . (2 pistettä)

6) Osoita, että kulmanopeus pienenee oheisen kaavan mukaisesti $\omega = \omega_0 e^{-t/\tau}$, ja määritä aikavakio τ . (2 pistettä)

3. Ballistinen raketti (8 pistettä)

Raketti laukaistaan maapallon navalta ensimmäisellä kosmisella nopeudella (likimain Maan ratanopeudella) siten, että se laskeutuu ekvaatorille. Maan säde on $R = 6400$ km.

1) Mikä on raketin radan pitempi puoliakseli? (1,5 pistettä)

2) Mikä on raketin radan suurin etäisyys h (Maan pinnasta)? (3,5 pistettä)

3) Mikä on raketin lentoaika τ ? (3 pistettä)

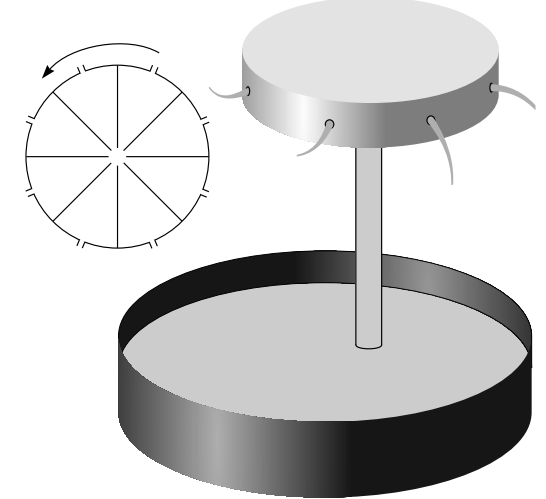
Huom: Tähten ympäri kiertävän planeetan mekaaninen energia on $E = -GMm/2a$, missä G on gravitaatiovakio, M — tähden massa, m — planeetan massa, ja a — radan pitempi puoliakseli (potentiaalienergian arvo on nolla äärettömyydessä). Ellipsin pinta-ala on $S = \pi ab$, missä b on lyhyempi puoliakseli.

Märkus: Elliptiselle orbiidille ümber tähe liikuva planeedi koguergeia avaldub valemiga $E = -GMm/2a$, kus G on gravitatsioonikonstant, M — tähe mass, m — planeedi mass ja a — orbiidi pikem pooltelg (potentsiaalne energia on loetud nulliks lõpmatu eemaldumuse korral). Ellipsi pindala $S = \pi ab$, kus b on lühem pooltelg.

4. Vesipumppu (10 pistettä)

Vesipumpun rakenne on seuraava. Pystyputki, jonka poikkipinta-ala on S_1 , johtaa avoimesta

vesisäiliöstä pyörivään sylinterisäiliöön, jonka säde on r . Kaikki astiat ovat täynnä vettä; sylinterisäiliön ulkokehällä on reikiä, joiden poikkipinta-ala S_2 ja jotka ovat avoimessa yhteydessä pumppujärjestelmään. Sylinterisäiliön korkeus vesisäiliön vapaasta vesipinnasta on h (itse sylinterisäiliön korkeus on pieni). Sähkömoottori pyörittää sylinteriä kulmanopeudella ω . Veden tiheys on ρ , ilmanpaine — p_0 , ja kyllästynyt höyrynpaine — p_k . Veden virtaus voidaan olettaa laminaariseksi (pyörteiden energia mitätön) ja kitka voidaan jättää ottamatta huomioon. Sylinterisäiliön sisällä on metallilevyjä, jotka saavat pyörimään yhdessä säiliön kanssa.



1) Määritä paine pyörivän sylinterin ulkokehällä p_2 , kun kaikki reiät ovat kiinni. (2 pistettä)

2) Jatkossa kaikki reiät ovat auki. Mikä on vesisuihkun nopeus maahan nähden v_2 ? (2 pistettä)

3) Jos sylinterisäiliö pyörii liian nopeasti, pumppu teho putoaa onkaloiden takia: joissakin kohdissa vesi alkaa "kiehua". Mikä on suurin kulmanopeus ω_{\max} , jolloin ei vielä synny onkaloita? (3 pistettä)

4) Jos sähkömoottorin teho on P , mikä on pumppu virtaustilavuuden teoreettinen yläraja μ_{\max} (pumputun veden tilavuus aikayksikössä)? (3 pistettä)

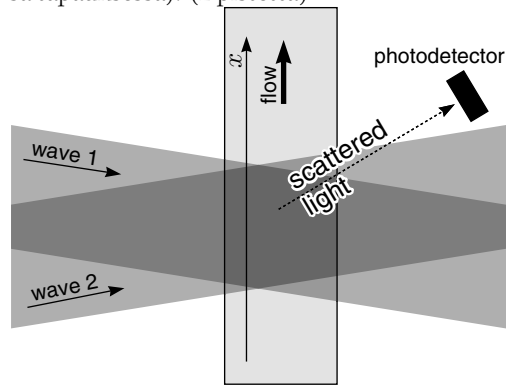
5. Anemometri (6 pistettä)

Anemometri on laite, joka mittaa kaasun tai nesteen virtausta. Tarkastellaan yksinkertaisen laser-anemometrin rakennetta. Lasiseinäisessä poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoisessa putkessa virtaa aine (taitekerroin $n = 1,3$), joka sisältää valoa hajottavia hiukkasia. Kaksi koherenttia tasoaaltoa, joiden aallonpituus on $\lambda = 515 \text{ nm}$ ja niiden aaltovektoreiden välinen kulma $\alpha = 4^\circ$ osuu levyille niin, että (a) aaltovektorien välisen kulman puolittaja on kohtisuorassa putken yhtä seinämää vasten ja (b) putki on yhdensuuntainen aaltovektoreiden määrittelemän tason kanssa. Putken takana on valoilmaisin, joka mittaa hajonneen valon intensiteetin muutosten taajuutta.

1) Kuinka pitkä on pitkin x -akselia muodostuneen interferenssikuvion jakso Δ (katso kuva)? (2 piste)

2) Olkoon valoilmaisin signaalin värähdystaajuus $\nu = 50 \text{ kHz}$. Mikä on aineen virtausnopeus v ? Mitä voidaan sanoa aineen virtaussuunnasta? (2 pistettä)

3) Tarkastellaan tapausta, jolloin tasoaaltojen aallonpituuksien ero on $\delta\lambda = 4,4 \text{ fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). Mikä on nyt signaalivärähtelyjen taajuus (aineen nopeus on sama kuin edellisessä tapauksessa)? (2 pistettä)

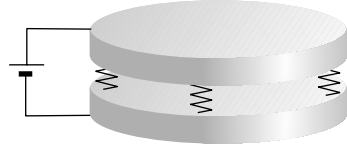


6. Sähkömekaaninen värähtelijä (7 pistettä)

Mekaaniset ja sähköiset prosessit kytkeytyvät joskus toisiinsa voimakkaasti. Tärkeitä esimerkkejä tällaisista ovat pietsosähköisiä materiaaleja

sisältävät systeemit kuten kvartsikideresonaattori. Tässä tarkastellaan jonkin verran yksinkertaistettua tilannetta.

Metallilevyn, jonka pinta-ala on S ja massa m , yläpuolella on toinen samanlainen metallilevy. Levyt on yhdistetty toisiinsa eristeestä tehdyillä jousilla, joiden kokonaisjousivakio on k . Alempi levy on kiinni tukevassa alustassa. Levyjen välinen etäisyys tasapainotilanteessa on X_0 .



1) Oletetaan, että levyä poikkeutetaan tasapainoasemastaan pieni pystysuuntainen matka x . Määritä x suuntainen kiihtyvyys \ddot{x} systeemin parametrien avulla. Mikä on ylemmän levyn pienten pystyvärtelyjen kulmataajuus ω_0 ? (1,5 pistettä)

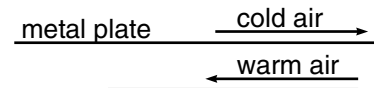
2) Levyt yhdistetään nyt vakiokorkeajännitelähteeseen niin, että ne muodostavat kondensaattorin. Levyjen välinen sähköstaattinen voima aiheuttaa ylemmän levyn lisäpoikkeaman, jolloin levyjen välinen tasapainoetäisyys on X_1 . Määritä lausekkeet sähköiselle vetovoimalle F_e ja levyjen väliselle jännitteelle U suureiden X_0 , X_1 , S , m ja k avulla. (2 pistettä)

3) Systeemi saatetaan jälleen värähtelemään pitäen jännite U vakiona. Olkoon x edelleen poikkeama tasapainosta. Määritä x suuntaisen kiihtyvyyden lauseke \ddot{x} of x suureiden X_0 , X_1 , S , m , k ja poikkeaman x avulla. Mikä on ylemmän levyn pienten pystyvärtelyjen kulmataajuus ω_1 ? (2 pistettä)

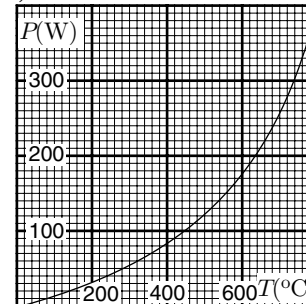
4) Muutetaan edellisen kysymyksen tilannetta kytkemällä käämi, jonka induktanssi on L , sarjaan kondensaattorin ja jännitelähteen kanssa. Kuvataan tilannetta levypoikkeaman x ja kondensaattorin varauksen q avulla. Määritä lausekkeet kiihtyvyyksille \ddot{x} ja \ddot{q} suureiden X_0 , X_1 , S , m , k , x ja q avulla. Mitkä harmonisen värähtelyn kulmataajuudet ovat mahdollisia tässä systeemissä? (2 pistettä)

7. Lämmönvaihto (8 pistettä)

1) Tarkastellaan yksinkertaistettua mallia talon ilmanvaihtosysteemistä, joka käyttää passiivista lämmönvaihdinta. Lämmönvaihdin koostuu metallilevystä, jonka pituus on x , leveys y ja paksuus d , ja joka jakaa ilmanakanavan kahteen osaan: toinen sisääntulevalle kylmälle ilmalle ja toinen poistuvalla lämpimälle ilmalle. Molempien kanavien korkeus on h ja ilman virtausnopeus niissä on v , katso Kuva. Metallin lämmönjohtavuus on σ (lämpövuoto levyn pinta-alayksikön läpi, kun oletetaan, että lämpötila laskee yhden asteen levyn jokaista paksuusyksikköä kohti. Ilman ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa on c_p ja ilman tiheys on ρ (ilman tiheyden lämpötilariippuvuutta ei tarvitse ottaa huomioon). Oletetaan, että kanavassa oleva ilma on sekoittunutta niin, että pitkin x -akselia (yhdensuuntainen virtausnopeuden kanssa) sisääntulevan ja poistuvan ilman lämpötilat T_{in} ja T_{out} riippuvat vain koordinaatista x , eli $T_{in} \equiv T_{in}(x)$ ja $T_{out} \equiv T_{out}(x)$. Mikä on huoneeseen sisääntulevan ilman lämpötila T_2 , kun sisälämpötila on T_0 ja ulkolämpötila on T_1 ? (4 pistettä)



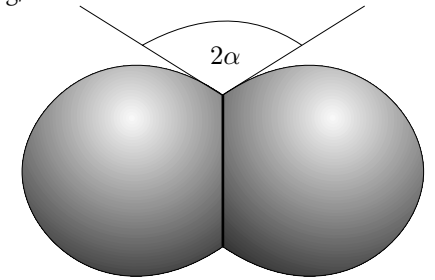
2) Ohessa on sähkölämmittimen johtimen lämmönvaihtonopeuden kuvaaja lämpötilan funktiona (huoneen lämpötila on $T_0 = 20^\circ\text{C}$). Johtimen toimintalämpötila on $T_1 = 800^\circ\text{C}$. Lämmittimen kytketään pois päältä. Minkä ajan kuluttua johtimen lämpötila laskee arvoon $T_2 = 100^\circ\text{C}$. Johtimen lämpökapasiteetti on $C = 10 \text{ J/K}$. (4 pistettä)



8. Ilmapallo (8 pistettä)

Määritä ilmapallon (kaasuineen) massa. Välineet: ilmapallo (leijuu ilmassa), digitaalinen vaakana, naru, kuminauhaa kiinnittimeen, mittanauha, jousivaaka, paperiarkkeja, joita voit taittaa ja käyttää kulmatulkkina, 100 gramman punnus, lankaa.

Huom: Kun ilmapallon ympäri on sidotun narun jännitys on T , pallon sisällä oleva yli-paine Δp , lähellä narua oleva ilmapallon pinnan tangenttien välinen kulma 2α (kehän ympäri otettu keskiarvo; katso kuva), ja narun muodostaman ympyräilmukan säde R , niin silloin $\Delta p = T \tan \alpha / R^2$. Yleinen kaasuvakio $R = 8.31 \text{ J/K}\cdot\text{mol}$, ilman moolimassa $\mu = 29 \text{ g/mol}$.



9. Mekaaninen mustalaatikko (7 pistettä)

Sylinterimäisen "mustan laatikon" sisällä on jotakin pientä. Määritä sen massa sekä sen ja laatikon sisäpinnan välinen kitkakerroin. Välineet: musta laatikko, viivotin, puulautaa, ajastin, punnukset.