

## 1. Kaljuronija

1) Kukkumise ajal ei tohi kiirendus ületada väärtust  $5g$ . Seega  $\frac{\sigma(\varepsilon)}{m} - g < 5g$ . Maksimaalse pinge leiame järgmisest võrrandist:  $\sigma(\varepsilon) = 6gm = 6 \times 9,8 \frac{m}{s^2} \times 80kg = 4,7kN$ . Graafikult leiame, et  $\varepsilon = 0,315$ . Seega  $l < 0,315(L + H) + L$

2) Kukkumise ajal on kaljuronija kaugus maksimaalne, kui kiirus võrdub nulliga. See tähendab, et kōie poolt omandatud energia võrdub potentsiaalse energia muuduga.

$$E = mg(2L + x),$$

kus  $x = l - L$ . Kōie poolt omandatud energia

$$E = \int \sigma(\varepsilon) dx = \int \sigma(\varepsilon)(L + H) d\varepsilon = (L + H) \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Me teame, et maksimaalselt on  $\varepsilon = 0,315$ . Seega saab antud integraali arvutada numbriliselt graafikualuse pindalana.

$$S(\varepsilon) = \int_0^{0.31} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \approx 564,8N$$

Seega

$$(L + H)S(\varepsilon) = mg(2L + x) = mg(2L + \varepsilon(L + H))$$

$$L = \frac{H(mg\varepsilon - S(\varepsilon))}{S(\varepsilon) - mg(\varepsilon + 2)} \approx 5,08m.$$

Vastus: uus karabiin tuleb ankurdata järgmise  $L = 5,08$  m sees.

## 2. Magneteline pidur

1) Liiper on tavaline silindriline juht:

$$R = \frac{\rho h}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \pi} \approx 5,59m\Omega.$$

2) Raudteelōigu pikkus on  $\alpha R$ , mistōttu on takistus  $R_2 = \alpha R$ . Pea-mised ideed: esiteks — kujutame ette, et raudtee on lõpmatult pikk; teiseks — lõpmatu ahela takistus  $R_R$  ei muutu, kui ahelast välja lõigata üks perioodiline element. Seega

$$R_R = \frac{R(2R_2 + R_R)}{2R_2 + R_R + R}.$$

Saame ruutvōrrandi

$$R_R = -R_2 \pm \sqrt{R_2^2 + 2R_2R} = \sqrt{R_2^2 + 2R_2R} - R_2.$$

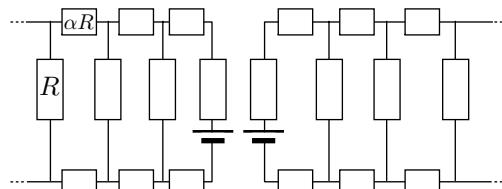
Negatiivne lahend tuleb kõrvale jätta, kuna sellel pole fūisikalist sisu. Vōrrandi lahendamise järele leiame, et

$$R_R = R(\sqrt{\alpha(\alpha + 2)} - \alpha).$$

3) Olulised ideed:

- Elektromotoorjōud tekib juhi liikumisel magnetväljas;
- Magnetite vahel (magnetväljas) liigub alati kaks liiprit;
- Liiprid on elektromotoorjōu allikad (nagu patarei);
- Liipreil on ühesugune takistus  $R$ .

Samuti paneme tähele, et saame kasutada sümmeetriat ja ühendada võrdse potentsiaaliga punktid. See võimaldab meil lihtsustada tsükilist raudteed ja kujutada seda varem lahendatud lõpmatu (tegelikult väga pika) raudteega. Ka leiame, et kahe magnetväljas oleva liipri vahel pole voolu kuna pole potentsiaalide erinevust. Järelikult võime need lahti ühendada. Saame kaks (peaaegu) lõpmatut raudteed, millel mõlemal on oma elektromotoorjōu allikas.



4) Elektromotoorjōud liipris  $\mathcal{E} = Bvh$ . Energia hajutatakse soojuseks võimsusega  $P = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{circuit}}$ , kus  $R_{circuit} = \frac{1}{2}(R_R + 2\alpha R + R)$ ,

$$R_{circuit} = \frac{1}{2}R(\sqrt{\alpha(2 + \alpha)} + \alpha + 1).$$

Avaldame võimsuse.

$$P = \frac{2B^2\omega^2 r^2 h^2}{R(\sqrt{\alpha(2 + \alpha)} + \alpha + 1)}$$

Lõpuks leiame, et

$$k = \frac{2r^2 h^2}{\sqrt{\alpha(2 + \alpha)} + \alpha + 1} \approx 2,12 \times 10^{-6} m^4.$$

5) Kuna võimsus võrdub  $M\omega = P$ , siis jõumoment avaldub kui

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{2B^2\omega r^2 h^2}{R(\sqrt{\alpha(2 + \alpha)} + \alpha + 1)} \approx 0,39 mNm.$$

6) Ketta inertsimoment  $I = \frac{1}{2}mr^2$  ja nurkkiirendus  $\epsilon = \frac{M}{I} = \frac{d\omega}{dt}$ . Kasutades järgevalt kiirendust  $M$ , saame

$$\frac{kB^2\omega}{IR} = -\frac{d\omega}{dt}.$$

Kui me grupeerime muutujad  $I$  ja  $t$  vōrrandi erinevatele pooltele, saame

$$\frac{kB^2}{IR} dt = \frac{d\omega}{\omega}.$$

Vōrrandi mõlema poole integreerimine annab

$$\int_0^t \frac{kB^2}{IR} dt = - \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega},$$

$$\frac{kB^2}{IR} t = -\ln \frac{\omega}{\omega_0},$$

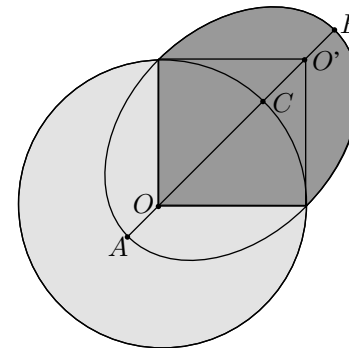
$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{kB^2}{IR} t}$$

ja lõpuks

$$\tau = \frac{IR}{kB^2} \approx 2,9s$$

## 3. Ballistiline rakett

1) Kasulik energia sõltub üksnes ellipsi pikemate pooltelgede pikkuste summast. Seega on pikem pooltelg sama mis maalähedase orbiidi korral:  $a = R$ .



2) Ellipsil on omadus, mille kohaselt punkti kauguste summa mõlemast fookusest on alati ühesugune (võrdub  $2a$ ). Seega on teine fookus (see fookus, mis pole Maal) kaugusel  $R$  nii maandumis- kui ka õhukõõmispunkti (vaata joonist). Seega on kõrgus  $h = |CB| = |OB| - R$ , kuna  $|OB| = R + \frac{1}{2}|OO'| = R(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Lõpuks leiame, et  $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$ .

3) Lennuaja ja elliptilise orbitaali tiirlemisperioodi suhe võrdub kahe pindala (joonisel tumehalliks värvitud osa ja ellipsi kogupindala) jagatise. Tiirlemisperiood võrdub maalähedase orbiidi tiirlemisperioodiga (Kepleri III seadus):  $T = 2\pi R/v = 2\pi\sqrt{R/g}$ . Tumehalli osa pindala on leitud pooliku ellipsi ja kolmnurga pindala summast. Seega  $\tau = T \cdot (\frac{\pi}{2}R \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} + R^2/2)/\pi R \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = (\pi + \sqrt{2})\sqrt{R/g}$ .

## 4. Veepump

1) Vaatleme protsesse pōõrleva mahutiga seotud taustsüsteemis. Siis eksisteerib tsentrifugaaljōu tekitatud potentsiaalne energia:  $U_c = \int_0^r \omega^2 r dr = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$ . Samas rõhk  $p_2 = p_0 - \rho gh + \frac{1}{2}\omega^2 r^2$ .

2) Bernoulli valemist leiame, et  $\frac{1}{2}\rho u^2 = p_2 - p_0 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \rho gh$ . Seega on kiiruse ruut pōõrlevas taustsüsteemis  $u^2 = \omega^2 r^2 - 2gh$ . Kiirus laboratoorses taustsüsteemis  $v_2 = u^2 + \omega^2 r^2 = 2(\omega^2 r^2 - gh)$  ehk  $v_2 = \sqrt{2(\omega^2 r^2 - gh)}$ .

3) Madalaima rõhuga  $p_m$  punkt pumbas on toru ülemine punkt. Bernoulli valemist leian, et  $p_0 = p_m + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v_1^2$ . Kiiruse torus saab leida pidevuse tingimusest:  $S_1 v_1 = S_2 u = S_2 \sqrt{\omega^2 r^2 - 2gh}$ . Seega  $p_m = p_0 - \rho gh - \frac{1}{2}\rho(\omega^2 r^2 - 2gh)(\frac{S_2}{S_1})^2$ . "Keemine" algab, kui  $p_m = p_k$ .  $\omega_m^2 r^2 = 2gh + (\frac{p_0 - p_k}{\rho} - gh)(\frac{S_1}{S_2})^2$ . Lõpuks leiame, et

$$\omega_m = r^{-1} \sqrt{2gh + \left(\frac{p_0 - p_k}{\rho} - gh\right) \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}.$$

4) Suurim tootlikkus saavutatakse ilmselt kõrgeima efektiivsuse korral. Efektiivsus on kõrgeim, kui jääkkiirus on väiksem:  $u \rightarrow 0$ , and  $\omega \rightarrow \omega_{\min}$ . Teise küsimuse vastuste kohaselt  $\omega_{\min} = r^{-1}\sqrt{2gh}$ . Seega on veejõa väiksem jääkkiirus  $v_{\min} = \omega_{\min} r = \sqrt{2gh}$ . Veejõaga seotud

võimsuskadu on  $\frac{1}{2}\mu v_{\min}^2 = \mu gh$ . Kasulik võimsus on seotud potentsiaalse energia kasvuga  $gh$  võrra, ehk koguvõimsus  $P = 2\mu gh$ . Seega  $\mu = P/2gh$ .

## 5. Anemomeeter

1) Esmalt peame leidma murdumisnurga  $\beta$ . Väikese langemisnurga korral kehtib ligikaudselt  $\beta = \alpha/n$ . Vedelikus väheneb lainepikkus  $n$  korda:  $\lambda' = \lambda/n$ . Soovitud lainepikkuse saab leida kui kahe ühesuguse faasiga kiire löikepunktide kauguse. Teisel ja lihtsamal viisil saab lainepikkuse leida kahe lainevektori erinevusena:  $k' = k\beta$ , kus  $k = 2\pi/\lambda' = 2\pi n/\lambda$  on langevate kiirte lainevektor. Seega  $\Delta = 2\pi/k' = \lambda/\alpha \approx 7,4 \mu\text{m}$ .

2) Hajunud valguse intensiivsus fluktuueerub, kuna hajutavad osakesed liiguvad. Fluktuatsioonide sagedus on  $\nu = v/\Delta = v\alpha/\lambda$ . Voolusuunda ei saa ühelgi meetodil kindlaks määrata, kuid see-eest avaldub kiiruse moodul lihtsalt:  $v = \nu\lambda/\alpha \approx 0,37 \text{ m/s}$ .

3) Interferentsmustrit ruumiline struktuur jääb muutumatuks, kuna lainepikkuste erinevus on nii väike, et selle võib arvestamata jätta. Samas omandab muster ajalise sageduse  $\delta\omega = \delta(c/\lambda) \approx c\delta\lambda/\lambda^2$ . Interferentsmustrit kiirus on  $u = \Delta\delta\omega = \frac{c}{\alpha} \frac{\delta\lambda}{\lambda}$ . Kui vedeliku kiirus  $v \approx 0,37 \text{ m/s}$ , siis on vedeliku suhteline kiirus mustrit suhtes  $\nu' = \frac{c}{\alpha} \frac{\delta\lambda}{\lambda} \pm v$ . Lisaks sõltub suhteline kiirus voolusuunast (mõlemal juhul  $\nu' \approx 740 \text{ kHz}$ ). Seega võimaldab väljundsagedus määrata voolusuunda, seni kuni interferentsmustrit kiirus on suurem voolukiirusest.

## 6. Elektromehaaniline ostillaator

1) Newtoni II seadusest saame  $m\ddot{x} = -kx$ . Sellest omakorda  $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ . Järelikult  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

2) Gaussi seaduse kohaselt on laeng plaatidel  $Q = S\varepsilon_0 E = S\varepsilon_0 U/X_1$ . Neile mõjuv jõud on  $F_e = k(X_0 - X_1) = Q \langle E \rangle$ , kus  $\langle E \rangle$  on keskmine elektrivälja tugevus (keskmistatud üle laengute). Vaatame plaadi pinnal olevat laetud kihti suure suuredusega: elektrivälja sõltub lineaarselt antud punktist plaadi sissepoole jäävate laengute summast. Seega võrdub keskmine väljatugevus kihi mõlemal poolel olevate väljade aritmeetilise keskmisega:  $\langle E \rangle = E/2$ . Viimaks  $F_e = k(X_0 - X_1) = QE/2$  (selle tulemuseni saab jõuda ka energiaalustest kaalutlustest, kasutades plaadi lõpmatult väikest virtuaalset nihet ja energia jäävuse seadust). Järelikult  $F_e = \frac{S}{2}\varepsilon_0(U/X_1)^2$ , hence  $U = X_1 \sqrt{2k(X_0 - X_1)/S\varepsilon_0}$ .

3) Kui plaadid liiguvad suuruse  $x$  võrra, siis muutub jõud elektrivälja muutuse tõttu järgmiselt  $\delta F_e = x \left| \frac{d}{dX_1} \frac{S}{2}\varepsilon_0(U/X_1)^2 \right| = \frac{x}{X_1} S\varepsilon_0(U/X_1)^2$ . Teades, et  $\frac{S}{2}\varepsilon_0(U/X_1)^2 = k(X_0 - X_1)$ , saame  $\delta F_e = 2\frac{x}{X_1} k(X_0 - X_1)$ . Eksisteerib ka deformatsioonist tingitud jõu muutus:  $\delta F_k = -kx$ . Kaks jõudu on vastasmärgilised (plaatide lähenemisel üritab  $\delta F_k$  plaate eemale lükata ja  $\delta F_e$  lähemale tõmmata).  $\delta F = -kx[1 - 2(\frac{X_0}{X_1} - 1)] = -kx(3 - 2\frac{X_0}{X_1})$ . Vastuseks saame  $\ddot{x} = \delta F/m = -x\frac{k}{m}(3 - 2\frac{X_0}{X_1})$ , and  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}(3 - 2\frac{X_0}{X_1})}$ .

4) Nüüd on meil kaks ostsilleeruvat muutujat:  $x$  ja  $q$ . Esmalt paneme kirja Kirchoffi seadustest tuleneva võrrandi:  $L\dot{q} = -\frac{q}{C} - xQ\frac{d}{dX_1}C^{-1}$ . Selles kirjeldab teine liige kondensaatori mahtuvuse muutusest tingitud pinge muutust kondensaatoril (lähendame reaalse muutuse dife-

rentsiaalsega, mis kehtib väikeste  $x$  väärtuste korral). Märkame, et  $C^{-1} = X_1/S\varepsilon_0$  ja  $Q = S\varepsilon_0 U/X_1$ . Seega  $\frac{d}{dX_1}C^{-1} = 1/S\varepsilon_0$  ja

$$L\dot{q} = -\frac{q}{C} - U\frac{x}{X_1}.$$

Leitud valemi teise liikme märk eeldab, et  $x$ -telg on suunatud ülespoole (poolis pole voolu ja  $L\dot{q} = 0$ , kui pinget kondensaatoril hoitakse konstantena; positiivne laengu muutus  $q > 0$  eeldab suurenevat mahtuvust ehk  $x < 0$ ; seega on ülaltoodud võrrandi märgid omavahel vastavuses).

Teine võrrand kirjeldab Newtoni I seadust. Esiteks märkame, et  $F_e$  saab avaldada kui  $F_e = Q^2/2S\varepsilon_0$ . Kui laeng plaatidel ei muutu ( $q = 0$ ), ei muutu ka  $F_e$ .  $\delta F_e = q\frac{d}{dQ}Q^2/2S\varepsilon_0 = qQ/S\varepsilon_0$ . Lõpmatult väikesed jõu muutused ( $\delta F_k$  and  $\delta F_e$ ) saab lihtsalt liita:

$$m\ddot{x} = -kx - qQ/S\varepsilon_0.$$

Vaatame sinusoidaalset lahendit ringsageduse  $\omega$  jaoks. Siis  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  ja  $\dot{q} = -\omega^2 q$ . Asendades need kahte eespool leitud võrrandisse, leiame et

$$\begin{cases} (L\omega^2 - C^{-1})q = xU/X_1 \\ (\omega^2 m - k)x = qQ/S\varepsilon_0 \end{cases}$$

Võrrandi lahendid  $x$  ja  $q$  jaoks ei võrdu nulliga ainult siis, kui

$$(L\omega^2 - C^{-1})(\omega^2 m - k) = UQ/X_1 S\varepsilon_0.$$

Teades, et  $UQ/X_1 = 2k(X_0 - X_1)$  ja  $C = \varepsilon_0 S/X_1$ , saame võrrandi järgmiselt ümber kirjutada

$$(\varepsilon_0 S L \omega^2 - X_1)(\omega^2 m - k) = 2k(X_0 - X_1).$$

Toome sisse muutujad  $\omega_0^2 = k/m$  ja  $\omega_1^2 = X_1/\varepsilon_0 S L$  ning asendame need võrrandisse:

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_0^2) + \omega_0^2\omega_1^2 \left(3 - 2\frac{X_0}{X_1}\right) = 0.$$

Seega

$$2\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_0^2 \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_0^4 + 2\omega_1^2\omega_0^2(X_0 X_1^{-1} - 5)},$$

ehk antud süsteemil on kaks omasagedust, kui  $\frac{X_0}{X_1} < \frac{3}{2}$  (teistel juhtudel muutub ebastabiilseks).

## 7. Soojusvahetus

1) On lihtne näha, et temperatuuriprofilil piki plaati on lineaarne ja temperatuurierinevus  $\Delta T$  kahe plaadi vahel on konstantne ( $\Delta T \equiv T_0 - T_2$ ). Seega on ka soojusvahetuse kiirus  $q$  (ühikulise pinna kohta) konstantne. See omakorda vastab lineaarsele temperatuuriprofiilile. Valime taustüsteemi, nii et see liigub koos sissetuleva õhuga. Siis on temperatuuri tõusu kiirus antud punktis  $\dot{T} = v(T_2 - T_1)/x$ . Seega saab õhule ruumalaga  $V = s \times h$  kirjutada soojusliku tasakaalu võrrandi  $\rho shc_p \dot{T} = \dot{q} = s\sigma \Delta T/d = s\sigma(T_0 - T_2)/d$ .  $\rho shc_p v(T_2 - T_1)/x = s\sigma(T_0 - T_2)/d$ . Seega

$$T_2 = \frac{x\sigma T_0 + \rho h c_p v d T_1}{x\sigma + \rho h c_p v d}.$$

2) Kirjutame ümber soojusliku tasakaalu võrrandi  $P = -C\frac{dT}{dt}$  kui  $dt = -CP^{-1}dT$  ja järeldame, et aja saab leida graafikualuse pindalana  $S$ , kui graafiku ühel teljel on  $P^{-1}$  ja teisel temperatuur  $t = SC$ . Graafikul on järgmised andmed:

$T(K)$	100	200	300	400	500	600	700	800
$P(W)$	13	30	55	83	122	177	258	395
$100P^{-1}$	7,7	3,3	1,8	1,2	0,82	0,57	0,39	0,25

Asendanud pidevate äärtega piirkonnad trapetside superpositsiooniga, saame  $S \approx 12 \text{ K/W}$ . Järelikult  $t = 120 \text{ s}$ .

## 8. Õhupall

Õhupalli kandevõime määramiseks kinnitame palli külge raskuse massiga  $m = 100 \text{ g}$  ja võtame kaalult lugemi  $F/g = m + M - \rho V = 73,4 \text{ g}$ , kus  $\rho = \mu p_0/RT \approx 1,2 \text{ g/l}$ . Seega  $\rho V - M = 27,6 \text{ g}$ . Nüüd peame leidma õhupalli ruumala. Selleks kinnitame palli ümber nõõri nii tugevasti, kui klambritega on võimalik kinnitada (märkus: väike pinge tekitab liiga väikese ruumala vähenemise ja seetõttu ka lõppvastuse suure määramatuse).

Kaalume õhupalli koos nõõriga (93,3 g), lahutame tulemusest nõõri massi (19,1 g) ja saame, et  $\rho V' - M = 28,4 \text{ g}$ , kus  $V'$  on palli ruumala, kui nõõri on pingutatud. Leiame ruumala vähenemise  $\Delta V = V - V' = (28,4 - 27,6)/1,2 \approx 0,67 \text{ l}$ . Seejärel määrame dünamomeetriga maksimaalse pinge nõõris (mida saab klambritega kinnitada)  $T \approx 30 \text{ N}$ . Samuti hindame keskmist  $\tan \alpha \approx 1,4$  (vahemik 0,8 - 2,0). Silmuse raadiuse arvutame ümbermõõdust  $R \approx 15 \text{ cm}$ . Antud valemi kohast vastab sellistele andmetele  $\Delta p \approx 1900 \text{ Pa}$ . Gaasi oleku seadusest leiame, et  $\frac{\Delta p}{p_0} \approx \frac{\Delta V}{V}$ , millest  $V \approx p_0 \frac{\Delta V}{\Delta p} \approx 33 \text{ l}$ . Lõpuks saame, et  $M = \rho V - 27,6 \text{ g} \approx 12 \text{ g}$ .

## 9. Mehaaniline must kast

Esmalt määrame hõõrdeteguri. Teeme kindlaks, et ese on kasti põhjas. Seejärel asetame kasti lauale, nii et silindri telg on paralleelne laua teljega. Hakkame lauda kallutama, nii et silindrilise kasti põhi tõuseb kõrgemale. Määrame kaldenurga  $\alpha$ , kui ese hakkab libisema: libisemisel puudutab ese karbi kaant. Katset on mugavam läbi viia, kui karbi kaas (ja selle serv) on veidi üle laua ääre. Sel juhul kukub kaas alla, kui ese läheb vastu kaant. Samal ajal mõõdame laua kaldenurga tangensi  $\mu = \tan \alpha = 0,17 \pm 0,2$ .

Nüüd pöörame silindri teljed risti laua teljega, kuid jätame kasti küllili lebama. Tõstame jällegi lauda kõrgemale ja määrame nurga  $\beta$ , mille juures kast hakkab alla veerema. Eeldades, et ese on kasti raadiusega võrreldes väike, saab tuletada järgmise võrrandi:  $M \sin \beta = m(\sin \alpha - \sin \beta)$ , kus  $m$  on eseme mass ja  $M$  - tühja kasti mass. Kasutades seoseid  $\sin \alpha = \frac{60 \pm 5}{350}$  ja  $\sin \beta = \frac{25 \pm 3}{350}$  saame  $M/m = 35/25 = 1,4 \pm 0,2$ . Massi mõõtmistest teame, et  $M + m = 10,4 \text{ g}$ . Leiame eseme massi  $m = 10,4 \text{ g}/2,4 = (4,3 \pm 0,4) \text{ g}$ . Pane tähele, et tegelik mass oli 4,5 g.

Masside suhte saab põhimõtteliselt määrata väikeste võnkumiste perioodist:  $T \approx 0,4 \text{ s}$ . Kui hindame süsteemi kast + ese inertsimomenti valemiga  $(M + m)r^2$ , kus  $r$  on silindri raadius, saame  $I\ddot{\phi} = -mrg\phi$  ehk  $\omega^2 = \frac{m}{M + m} \frac{g}{r}$ . Kasutades  $r = 16 \text{ mm}$  leiame, et  $\frac{M + m}{m} = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 3,9$ . See tulemus on siiski küllaltki ligikaudne, kuna nii väikest võnkeperioodi on raske mõõta (eriti suure sumbuvuse korral). Lisaks võetakse periood ruutu, mis seletab ebarealistlikku tulemust (seega pole mõtet tulemuse parandamiseks arvutada geomeetrilisi tegureid kasti jt kehade inertsimomentide arvutamisel).