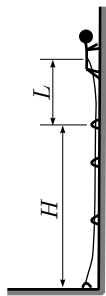
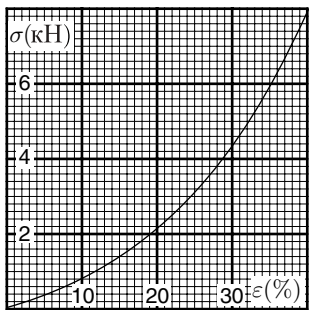


1 Скалолаз (6 баллов)

Скалолаз массой $m = 80$ кг взбирается по вертикальной скале. Для страховки он использует следующий метод. Один конец эластичной верёвки зафиксирован в крепёжной петле на земле. Верёвка проходит сквозь скользящие страховочные петли (которые прикреплены к скале; последняя петля расположена на высоте $H = 20$ м) и через зажим, прикрепленный к поясу скалолаза. Зажим крепко удерживает верёвку, но позволяет висящей части верёвки по ходу взбирания удлиняться (так, что часть верёвки между крепёжной петлей и зажимом всё время натянута). В случае падения ускорение скалолаза не должно превышать значение $a_{\max} = 5g$, иначе это может навредить здоровью. Можете предполагать, что верёвка идёт вертикально вниз, что расстояние между крепительным зажимом и центром масс скалолаза очень мало и что трением между верёвкой и страховочными петлями можно пренебречь. Зависимость силы натяжения верёвки от её относительного удлинения приведена на прилагающемся графике.

Предположим, что скалолаз взобрался на расстояние L от последней страховочной петли, см. рисунок.

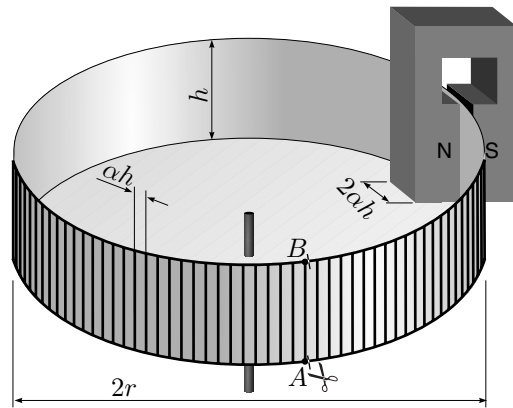
- 1) В случае падения скалолаз опустится на максимальное расстояние l от последней страховочной петли (после этого упругость верёвки снова начнёт его поднимать). Какому неравенству должна удовлетворять величина l ? (1,5 б)
- 2) Какова максимальная безопасная длина L свободной части верёвки (после достижения которой скалолаз должен прикрепить новую страховочную петлю)? (4,5 б)



2 Магнитный тормоз (12 баллов)

Токи Фуко можно использовать для торможения движущихся предметов из проводя-

щего материала (например, вращающийся диск). Для иллюстрации этого метода рассмотрим следующую модель. Для упрощения анализа пусть у нас вместо диска будет «кольцевая железная дорога» со следующим строением. Пластиковая «консервная банка» радиусом $r = 15$ см, массой $m = 100$ г и высотой $h = 1$ см состоит из дна в форме диска с однородной толщиной, а также из значительно более тонкой цилиндрической боковой поверхности; рёбрами цилиндра являются два проволочных кольца («рельсы железной дороги»), которые соединены параллельными кусочками проволоки («шпалы»). Как «рельсы», так и «шпалы» состоят из медной проволоки диаметром $\delta = 0,2$ мм; расстояние между «шпалами» $L = \alpha h$, где $\alpha = 0,3$. Если система вращается без трения вокруг своей оси симметрии, то для торможения используется однородное магнитное поле в щели между полюсами магнита с магнитной индукцией $B = 1$ Тл так, как показано на рисунке. Считать, что однородное магнитное поле заполняет область с прямоугольным поперечным сечением, которое по величине равно области между тремя последовательными «шпалами» (т.е. с длинами сторон h и $2\alpha h$), а снаружи этой области магнитное поле пренебрежимо мало. Удельное сопротивление меди $\rho = 1,724 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.



Рассмотрим ситуацию, когда система неподвижна.

- 1) Найдите сопротивление R одиночной «шпалы». (1 б)
- 2) Предположим, что «рельсы» перерезают в непосредственной близости от концов A

и B одной шпалы. Докажите, что в этом случае сопротивление между точками A и B приблизительно равно значению $R_0 = R[\sqrt{\alpha(\alpha+2)} - \alpha]$. (2 б)

Рассмотрим теперь ситуацию, когда система вращается с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с, а «рельсы» целые (без разрезов).

3) Нарисуйте такую эквивалентную схему постоянного тока, в которой силы тока в резисторах равны соответственно силам тока в «шпалах» и в «отрезках рельс» («отрезком рельсы» назовём такой участок рельсы, который остаётся между двумя соседними «шпалами»). (2 б)

4) Используя результаты вопросов 1–3, докажите, что выделяющаяся в системе тепловая мощность (Джоуля) выражается формулой $P = kB^2\omega^2/R$ и найдите значение коэффициента k . (3 б)

5) С каким моментом силы M магнит тормозит систему? (2 б)

6) Докажите, что угловая скорость системы зависит от времени как $\omega = \omega_0 e^{-t/\tau}$ и найдите значение характерного времени τ . (2 б)

3 Баллистическая ракета (8 баллов)

С полюса Земли запускают баллистическую ракету с первой космической скоростью так, что она приземляется на экваторе. Радиус Земли $R = 6400$ км.

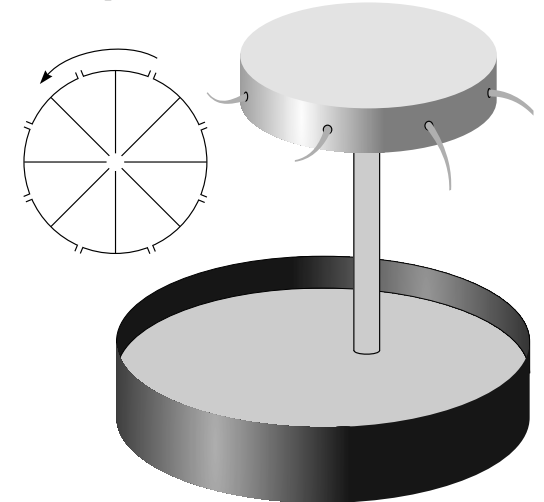
- 1) Найдите большую полуось a орбиты ракеты. (1,5 б)
- 2) Какова максимальная высота h полёта ракеты (относительно поверхности Земли)? (3,5 б)
- 3) Чему равно время полёта ракеты τ ? (3 б)

Замечание. Суммарная энергия вращающейся вокруг звезды планеты выражается формулой $E = -GMm/2a$, где G – это константа гравитации, M – масса звезды, m – масса планеты, a – большая полуось орбиты (потенциальная энергия считается нулём в случае бесконечного удаления). Площадь эллипса $S = \pi ab$, где b – малая полуось орбиты.

4 Водный насос (10 баллов)

Рассмотрим насос со следующей конструкцией. Заполненная полностью водой вертикальная труба с открытыми концами (площадью поперечного сечения S_1) ведёт из сосуда с водой без крышки (резервуара) во вращающийся цилиндрический сосуд, который тоже заполнен полностью водой и радиус которого равен r , а на внешней по-

верхности (периметре) которого находится ряд отверстий с суммарной площадью поперечного сечения S_2 (открываются в рабочем режиме насоса). Высота вращающегося сосуда от свободной водной поверхности нижнего резервуара равна h (высота самого сосуда небольшая). Электрический мотор вращает верхний цилиндр с угловой скоростью ω . Плотность воды ρ , давление воздуха p_0 и давление насыщенного пара p_k . Течение жидкости считать ламинарным (т.е. энергия водоворотов пренебрежительно мала), а трение малым. В верхнем сосуде находятся радиальные металлические пластины, которые заставляют воду вращаться вместе с цилиндром.



1) Вычислите давление p_2 у внешней поверхности вращающегося цилиндра, если все отверстия закрыты. (2 б)

2) Пусть в дальнейшем все отверстия открыты. Найдите скорость относительно поверхности земли v_2 струй воды, выходящих из отверстий. (2 б)

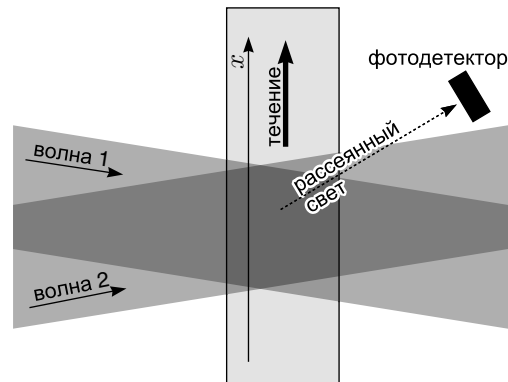
3) Если заставить верхний цилиндр вращаться слишком быстро, то эффективность насоса падает, так как происходит кавитация: жидкость начинает в определённой части насоса «кипеть». Чему равна максимальная скорость вращения v_{\max} , при которой кавитации ещё не происходит? (3 б)

4) Если мощность вращающегося цилиндра электрического насоса P , то чему равна теоретическая верхняя граница μ_{\max} продуктивности насоса (объём выкачанной воды в единицу времени)? (3 б)

5 Анемометр (6 баллов)

Анемометр – это прибор, измеряющий скорость течения жидкости или газа. Распространение строение простого лазерного анемометра. По трубе с тонкими стеклянными стенками и прямоугольным поперечным сечением течёт жидкость (показатель преломления $n = 1,3$), которая содержит частицы, рассеивающие свет. Две когерентные плоские волны с длиной волны $\lambda = 515 \text{ nm}$ и углом между векторами волн $\alpha = 4^\circ$ падают на пластину так, что (а) биссектриса угла между векторами волн является нормалью к поверхности одной из стенок трубы и (b) труба параллельна плоскости, заданной векторами волн. С другой стороны трубы находится фотодетектор, который измеряет частоту изменения во времени интенсивности рассеянного частицами света.

- 1) Какова длина (пространственного) периода Δ возникающей вдоль оси x картины интерференции (см. рисунок)? (2 б)
- 2) Пусть частота колебания сигнала фотометра $\nu = 50 \text{ КГц}$. Чему равна скорость жидкости v ? Что можно сказать о направлении течения жидкости? (2 б)
- 3) Рассмотрим случай, когда длины волн двух плоских волн различаются на $\delta\lambda = 4,4 \text{ фм}$ (где $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$). Какую частоту колебания сигнала можно теперь ожидать (скорость течения жидкости такая же, как и в предыдущем вопросе)? Можно ли при помощи подобного устройства определить направление течения жидкости? (2 б)

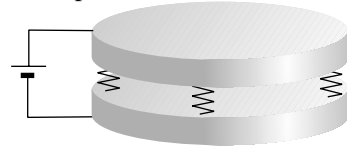


6 Механико-электрические колебания (7 баллов)

Механические и электрические процессы

иногда тесно взаимосвязаны. Очень важными примерами являются системы, содержащие пьезоэлектрические материалы, например, кварцевый резонатор. Исследует несколько более простую ситуацию.

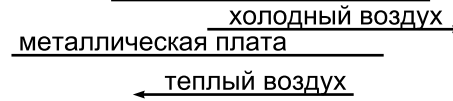
Имеются две металлических пластины с площадями S и массами m . Одна пластина расположена сверху над другой. Пластины соединены друг с другом пружинами, их суммарная жёсткость равна k , а сделаны пружины из изолятора. Нижняя пластина прикреплена к твёрдому неподвижному основанию. Равновесное расстояние между пластинами равно X_0 .



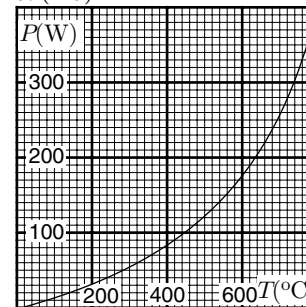
- 1) Предположим, что имеется небольшой вертикальный сдвиг на расстояние x верхней пластины от её положения равновесия. Выведите выражение для ускорения \ddot{x} величины x в зависимости от параметров системы. Чему равна круговая частота ω_0 малых вертикальных колебаний верхней пластины? (1 б)
- 2) Пластины теперь подсоединены к источнику высокого напряжения так, что они образуют конденсатор. Электростатические силы между пластинами вызывают дополнительный сдвиг между пластинами. Равновесное расстояние между пластинами теперь X_1 . Выведите выражения для электростатической силы притяжения F_e и напряжения \bar{U} , приложенного к пластинам, в зависимости от X_0, X_1, S, m и k . (2 б)
- 3) Систему снова заставляют колебаться, поддерживая напряжение U при этом постоянным. Пусть x будет обозначать попрежнему сдвиг от положения равновесия. Выведите выражение для ускорения \ddot{x} величины x в зависимости от X_0, X_1, S, m, k и сдвига x . Чему равна круговая частота ω_1 малых колебаний верхней пластины?
- 4) Модифицируем ситуацию предыдущего вопроса и соединим катушку с индуктивностью L последовательно с конденсатором и источником напряжения. Ситуацию будем описывать в зависимости от сдвига пластины x и заряда конденсатора q . Выведите выражения для ускорений \ddot{x} и \ddot{q} в зависимости от X_0, X_1, S, m, k, x и q . Какие круговые ча-

стоты гармонических колебание возможны в системе? (2 б)

7 Тепловой обмен (8 баллов)



- 1) Рассмотрим упрощённую модель вентиляционной системы в доме. Система состоит из металлической пластины длиной x , шириной y и толщиной d , разделяющей воздушный канал на две половины, одна для входящего холодного воздуха, а другая – для выходящего тёплого воздуха. Оба канала имеют постоянную толщину h , скорость движения потоков воздуха v (см. рисунок). Коэффициент теплопроводности металла равен σ (мощность теплового потока сквозь единицу площади пластины, при уменьшении температуры на один градус на единицу толщины пластины). Удельная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении равна c_p , плотность воздуха ρ (зависимостью от температуры пренебечь). Можно предполагать, что воздух в канале турбулентно перемешивается, т.е. температуры входящего и выходящего воздуха T_{in} и T_{out} зависят только от координаты x (ось x взята параллельно направлению движению воздуха), т.е. $T_{in} \equiv T_{in}(x)$ и $T_{out} \equiv T_{out}(x)$. Найдите температуру T_2 входящего воздуха в момент попадания в комнату, если температуры внутри и снаружи равны T_0 и T_1 соответственно. (4 б)



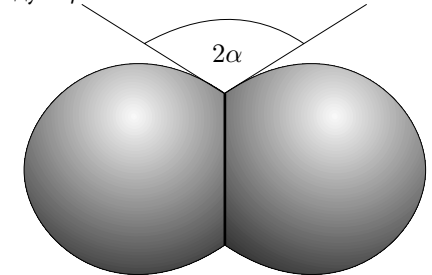
- 2) На графике изображена зависимость скорости теплообмена P спирали электрического обогревателя как функция от температуры (предполагая, что комнатная температура равна $T_0 = 20^\circ\text{C}$). Рабочая температура спирали равна $T_1 = 800^\circ\text{C}$. Обогреватель выключают. Найдите время, через которое температура спирали упадёт до $T_2 = 100^\circ\text{C}$.

Теплоёмкость спирали $C = 10 \text{ Дж/К}$. (4 б)

8 Воздушный шарик (8 баллов)

Найдите массу воздушного шарика (включая находящийся в нём газ). Оборудование: воздушный шарик (летает в воздухе), дигитальные весы, верёвка, зажим для верёвки, измерительная лента, динамометр, листы бумаги для заворачивания и грубых измерений углов, груз массой 100 г , нить.

Замечание: Полезным может оказаться знание того, что если верёвка завязана вокруг воздушного шарика так, что натяжение верёвки T , избыточное давление внутри шарика Δp , угол между касательными к поверхности шарика возле верёвки 2α (средний по всему периметру; см. рисунок), а радиус круглой петли, образованной верёвкой, R , то тогда $\Delta p = T \tan \alpha / R^2$. Универсальная газовая постоянная $R = 8.31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$, молярная масса воздуха $\mu = 29 \text{ г/моль}$.



9 Механический чёрный ящик (7 баллов)

Внутри цилиндрического «чёрного ящика» находится какой-то маленький предмет. Найдите его массу, а также коэффициент трения между ним и внутренней поверхностью ящика. Оборудование: чёрный ящик, линейка, деревянный брусок, часы, весы.