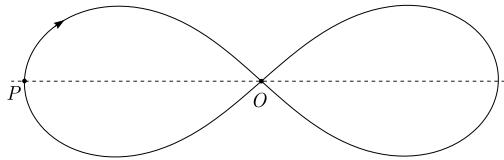


1. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ГОНКИ (11 б) — *Maté Vigh and Jaan Kalda*. В общем случае динамика трёх гравитационно взаимодействующих тел сложная и хаотичная. Однако существуют частные случаи, когда динамика регулярна. В некоторых частных случаях тела двигаются периодически. В простейшем случае такого периодического движения все три тела, находящиеся в вершинах равностороннего треугольника, вращаются как одно твёрдое тело. Здесь мы рассмотрим более сложное периодическое движение.

Относительно недавно ¹ было обнаружено, что три одинаковые точечные массы могут двигаться периодически по общей траектории в форме восьмёрки, изображённой на рисунке (стрелка указывает направление движения). Этот рисунок основан на компьютерной симуляции и обладает правильной формой. При необходимости Вы можете измерять расстояния на увеличенной версии рисунка (на отдельном листе) при помощи линейки.



Обозначим три тела цифрами 1, 2 и 3, в порядке их прохождения крайней левой точки P , указанной на картинке. Пусть O_2 и O_3 обозначают положения тел 2 и 3 соответственно в тот момент, когда тело 1 проходит серединную точку O . Также, пусть P_2 и P_3 обозначают позиции тел 2 и 3 соответственно в тот момент, когда тело 1 проходит крайнюю левую точку P . Пусть T обозначает полный период движения каждого из тел по этой траектории в форме восьмёр-

ки.

i) (2 б) Найдите время пути для одного из тел: (а) от O_2 до O ; (б) от O_3 до P_2 .

ii) (1 б) Пусть \vec{v}_1 , \vec{v}_2 и \vec{v}_3 обозначают скорости трёх тел в конкретный момент времени. Запишите уравнение, связывающее эти три вектора между собой.

iii) (2 б) Докажите, что суммарный момент импульса равен нулю.

iv) (2 б) Постройте позиции точек O_2 и O_3 (используйте рисунок на отдельном листе). Мотивируйте свои построения.

v) (2 б) Постройте позиции точек P_2 и P_3 (используйте рисунок на отдельном листе). Найдите два независимых способа построения и мотивируйте свои методы.

vi) (2 б) Найдите отношение скорости тел в точке O к скорости в точке P .

2. СКОРОСТНОЙ РАДАР (6 б) — *Mihkel Kree*.

В этой задаче мы проанализируем принцип работы скоростного радара. Передатчик радара излучает электромагнитную волну частотой $f_0 = 24 \text{ GHz}$ с формой волны $\cos(2\pi f_0 t)$. Волна отражается от приближающейся машины, двигающейся со скоростью v . Отражённая волна поступает на приёмник радара.

i) (2 б) Выразите частоту отражённой волны f_1 .

ii) (2 б) В скоростном радаре форма волны принятого сигнала умножается на форму волны изначального излучённого сигнала. Выразите все частотные компоненты, присутствующие в умноженном сигнале.

iii) (2 б) Используя самую низкую частотную компоненту $f_{\text{low}} = 4,8 \text{ kHz}$, присутствующую

в умноженном сигнале, рассчитайте скорость машины v .

Примечание: скорость света $c = 3,0 \times 10^8 \text{ м/с}$. Может пригодиться следующее тригонометрическое тождество:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].$$

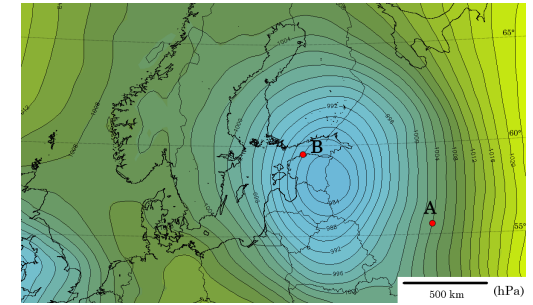
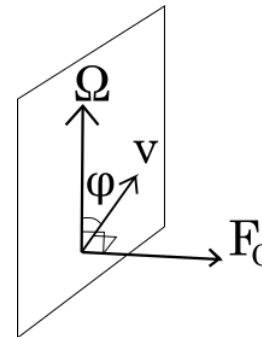
3. ПРОГНОЗ ПОГОДЫ (7 б) — *Johan Runeson*. Карта на отдельном листе показывает изобары на постоянной высоте около уровня моря. Можете предполагать, что форма и положение изобар постоянны во времени (меняются очень медленно).

i) (2 б) Набросайте направление скорости ветра в точках А и В.

ii) (2,5 б) Оцените значение скорости ветра в точке А. Используйте факт, что в точке А линии постоянного давления почти прямые. Плотность воздуха около земли $\rho = 1,23 \text{ кг/м}^3$.

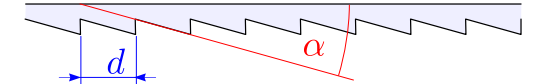
iii) (2,5 б) Оцените значение скорости ветра в точке В.

Подсказка. Когда объект массой m (например, слой воздуха) движется со скоростью v в системе отсчёта, вращающейся с угловой скоростью Ω , он чувствует воображаемую силу, называемую *Силой Кориолиса*, заданную формулой $F_C/m = 2v\Omega \sin \varphi$, где угол φ и направления показаны на рисунке.



4. ПРИЗМА ФРЕНЕЛЯ (12 б) — *Eero Uustalu and Jaan Kalda*. **Оборудование:** лист призмы Френеля, лист с голубыми и пурпурными полосами (см. отдельный лист), кусок картона (может быть использован в качестве экрана), линейка, измерительная лента, штатив, зелёный лазер ($\lambda_0 = 532 \text{ нм}$). Максимум интенсивности света, рассеянного с пурпурных полос $\lambda_m = 630 \text{ нм}$, а с голубых — $\lambda_c = 495 \text{ нм}$.

Призма Френеля — это прозрачный лист с периодическим расположением полос; сечение такого листа изображено на рисунке. Показатель преломления материала листа — $n = 1.47$.



i) (4 б) Определите параметр d призмы Френеля (определение параметра d см. на рисунке).

ii) (4 б) Определите угол α призмы.

iii) (4 б) Предполагая, что в оптическом диапазоне показатель преломления $n = n(\lambda)$ материала призмы Френеля — это линейная функция длины волны λ , определите хроматическую дисперсию $\frac{dn}{d\lambda}$.

¹Cristopher Moore, Phys. Rev. Lett. 70, 3675 (1993)

5. МАГНИТНЫЙ БИЛЛИАРД (9 б) — *Jaan Kalda*. Рассмотрим два абсолютно упругих диэлектрических шара с радиусом r и массой m , один из которых несёт изотропно распределённый заряд $-q$, а другой — $+q$. Они находятся в таком сильном однородном магнитном поле B , параллельном оси z , что электростатическим взаимодействием двух зарядов можно пренебречь; также пренебрегайте гравитацией и силами трения. Первый шар (заряженный отрицательно) движется со скоростью v и сталкивается со вторым шаром, покоящимся в начале координат. Столкновение центральное, и сразу после столкновения скорость первого шара оказывается параллельна оси x .

- i) (1 б) Какова скорость второго шара сразу после столкновения?
- ii) (2 б) Набросайте траектории центров обоих шаров во время их последующего движения.
- iii) (3 б) Какова средняя скорость (значение и направление) шаров во время их последующего движения?

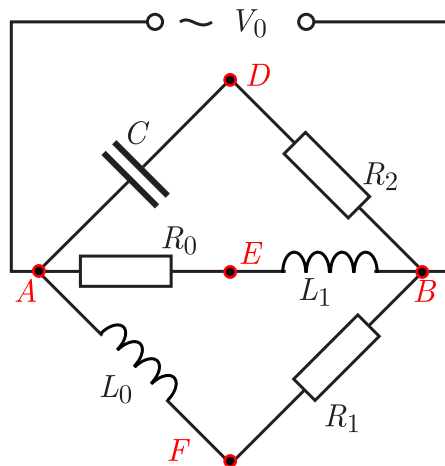
iv) (3 б) Рассмотрим такую же ситуацию, но со следующими изменениями: заряд обоих шаров равен $+q$; электростатическое отталкивание между шарами больше не пренебрежимо мало; столкновение не обязательно центральное (но скорости остаются лежать в плоскости $x - y$, т.е. столкновение не вызовет никакого движения вдоль оси z). Пусть P_i обозначает точку, в которой поверхности шаров соприкасаются во время i -го столкновения. Каково максимальное расстояние между P_i и P_j (максимизируйте его среди всех возможных значений $i, j = 1, \dots, \infty$ и всех возможных параметров,

влияющих на столкновения, для заданных значений B, m и q)?

6. КУБ (5 б) — *Taavet Kalda*. Лазерная указка мощностью P направлена на стеклянный куб. Показатель преломления куба — n . Поверхность куба имеет противоотражающее покрытие, так что *частичное* отражение при переходе света из одной среды в другую отсутствует. Скорость света равна c .

- i) (3 б) Какова максимальная сила, с которой лазер может толкать куб, если лазерный луч должен быть параллельным одной из граней куба (это значит, что лазерный луч может двигаться только в двухмерной плоскости)?
- ii) (2 б) Какова максимальная сила, с которой лазер может толкать куб, если ориентация луча может быть любой?

7. LCR-СХЕМА (5 б) — *Jaan Kalda*. Рассмотрим электрическую схему показанную на рисунке.



i) (2 б) Начертите фазовую диаграмму для этой схемы показывающую векторы напряжения между следующими узлами: $V_{AD}, V_{DB}, V_{AB}, V_{AE}, V_{EB}, V_{AF}$ и V_{FB} .

ii) (3 б) Напряжения между узлами D, E и F имеют следующие значения: $V_{DE} = 7V, V_{DF} = 15V$ и $V_{EF} = 20V$; каково значение напряжения на входящих клеммах V_0 ?

8. ВОЗДУХ В ПОДВОДНОЙ ЛОДКЕ (6 б) — *Johan Runeson, Jaan Kalda*. Подводная лодка неизвестной национальности движется около дна Балтийского моря, на глубине $h = 300$ м. Её интерьер представляет из себя одну большое помещение объёмом $V = 10 \text{ м}^3$, заполненную воздухом ($M = 29 \text{ г/мол}$) под давлением $p_0 = 100 \text{ кПа}$ и с температурой $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Внезапно она сталкивается с камнем и большая дыра площадью $A = 20 \text{ см}^2$ образовывается на дне подводной лодки. В результате подводная лодка тонет на дно и большая её часть заполняется водой, оставляя воздушный пузырь под увеличенным давлением (весь воздух остаётся внутри, наружу ничего не выходит). Плотность воды — $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения — $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме равна $c_V = \frac{5}{2}R$, где $R = 8,31 \text{ Дж/Кмол}$ — универсальная газовая постоянная.

i) (2 б) Какова скорость по объёму (в $\text{м}^3/\text{с}$), с которой вода входит в подводную лодку сразу после образования дыры?

ii) (2 б) Скорость потока такая большая и подводная лодка заполняется водой так быстро, что теплообменом между газом и водой можно пренебречь (также и в следующем вопросе). Каков объём воздушного пу-

зыря, когда поток воды остановится?

iii) (2 б) Поток воды, входящий в подводную лодку, делает воду внутри турбулентной; какова полная кинетическая энергия этих водных турбулентностей (которая позже выделяется в виде тепла), когда приток остановился ввиду уравнившихся давлений?

9. ЧЁРНЫЙ ЯЩИК (?? 16) — *Jaan Kalda, Mihkel Heidelberg*. Из чёрного ящика выходит три провода: “синий”, “чёрный” и “белый”. Он содержит в конфигурации “звезды”: батарейку, конденсатор, катушку индуктивности последовательно соединённую с диодом. Можете считать диод “идеальным” — идеальным проводником в одном направлении и изолятором в другом. Можете пренебречь внутренним сопротивлением батарейки и конденсатора, но у катушки внутреннее сопротивление значительно. Внутреннее сопротивление мультиметра при измерении напряжений — $R_m = 10 \text{ МОм}$. Он показывает каждое новое измерение через каждые $t = 0,4 \text{ с}$.

- i) (3 б) Определите эдс батарейки.
- ii) (1 б) Определите внутреннее сопротивление катушки.
- iii) (1 б) Нарисуйте электрическую схему, находящуюся в чёрном ящике. Мотивируйте своё решение измерениями.
- iv) (3 б) Оцените электроёмкость конденсатора C .
- v) (3 б) Оцените индуктивность катушки L .

Оборудование: Чёрный ящик, мультиметр, секундомер.

