1. SATELLIIT (8 punkti) — *Taavet Kalda*. Päikeseenergial töötav satelliit stardib Maalt algkiirusega v_0 heliotsentrilisele elliptilisele orbiidile eesmärgiga koguda nii palju päikeseenergiat kui võimalik. Stardinurk on vabalt valitav.

i) *(1 punkt)* Milline on vähim stardikiirus v_m, et satelliit jõuaks mingilegi heliotsentrilisele orbiidile?

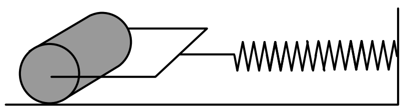
ii) *(2 punkti)* Mis on satelliidi kiirus Maa raskusjõuväljast lahkudes?

iii) *(2,5 punkti)* Avaldage satelliidile langev keskmine kiiritustihedus tema orbiidi pikema pooltelje a, impulsimomendi J, orbiidi perioodi T ja massi m kaudu.

iv) *(2,5 punkti)* Mis on maksimaalne keskmine kiiritustihedus, mille satelliit saab koguda, ja mis nurga all Maa liikumise suhtes peab ta startima?

Päikese mass on $M_\odot$, Maa orbiidi raadius $R_\oplus$, vaba langemise kiirendus Maal g, Maa raadius $r_\oplus$ ja Päikese heledus $L_\odot$.

2. RULL (8 punkti) — *Lasse Frantti (iv,v: Jaan Kalda)*. Rull koosneb tahkest homogeensest silindrist massiga M ja raadiusega r; see lebab horisontaalsel laual ja on kinnitatud seina külge keerdvedruga jäikusega k (vaata joonist). Vedru võib lugeda massituks ja ideaalseks — Hooke'i seadus kehtib kuitahes suure deformatsiooni korral.



i) *(1 punkt)* Esiteks eeldame, et silindri ja laua vahel puudub hõõre. Rull lükatakse kõrvale ja vabastatakse; leidke võnkumiste periood T_0.

ii) *(1 punkt)* Nüüdsest ei saa enam rulli ja laua vahelist hõõrdetegurit μ eirata. Rull lükatakse kõrvale ja see hakkab rullima edasi-tagasi. Väikese võnkeamplituudi korral rull laual ei libise. Leidke uus võnkeperiood T_r.

iii) *(2 punkti)* Kui algne võnkeamplituud (mõõdetuna vedru deformatsioonina x) on suurem kui kriitiline väärtus $A_\star$, hakkab võnkeamplituud ajaga vähenema. Avaldage $A_\star$ suuruste k, M, r, raskuskiirenduse g ja μ kaudu.

iv) *(2 punkti)* Eeldades, et algne amplituud A_0 on palju suurem kui $A_\star$, mis on silindri maksimaalne nurkkiirus aja $0 \le t \le T/2$ jooksul, kus t on rulli vabastamisest kulunud aeg?

v) *(2 punkti)* Eeldades, et $A_0 \gg A_\star$, visandage kvalitatiivne graafik, kuidas εr ja a sõltuvad ajast; siin ε ja a on vastavalt rulli nurkkiirendus ja joonkiirendus.

3. LIIKUMINE B-S (8 punkti) — *Andréas Sundström, Joonas Kalda (ii,iii)*. Osakesi massiga m ja laenguga q lennutatakse koordinaatide alguspunktist kiirusega v piki x-telge. Kohal $x = l$ paikneb ekraan.

i) *(1 punkt)* Esimese osakese lennutamise ajal on olemas x-teljega paralleelne homogeenne elektriväli, aga magnetvälja pole. Milline peab olema elektrivälja tugevus, et osake ei jõuaks ekraanini?

ii) *(2 punkti)* Järgnevalt lülitatakse elektriväli välja, piirkonnas $l > x > 0$ lülitatakse sisse z-suunaline magnetväli ja lendu lastakse teine osake. Teades, et osakese kiirus on täpselt piisav ekraanini jõudmiseks, visandage trajektoor ja leidke magnetinduktsioon B.

iii) *(2 punkti)* Viimaks lülitatakse sisse elektriväli, mis lebab x,y-tasandis, samas kui B jäetakse samaks. Koordinaatide alguspunktist lastakse lendu kolmas osake, ikka piki x-telge, ent võib-olla teistsuguse kiirusega. Avastatakse, et see osake liigub kõrvale kaldumata. Lisaks võtab tal ekraanini jõudmine sama kaua aega kui teisel osakesel. Leidke elektrivälja tugevuse moodul E.

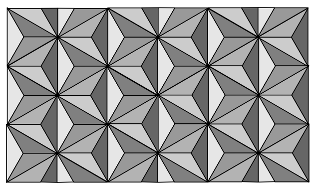
iv) *(3 punkti)* See alapunkt pole seotud eelnevatega. Uurime nüüd nõrgalt mittehomogeenset magnetvälja: magnetjõujooned kõverduvad palju vähem kui osakeste trajektoorid. Selgub, et sel juhul on jääv magnetväljas liikuva osakese n-ö adiabaatiline invariant: osakese kruvijoonekujulise trajektoori poolt haaratud magnetvoog on erakordselt täpselt konstantne piki trajektoori.

Vaadelgem päikesetuule osakeste ja Maa magnetvälja vastastikmõju väga lihtsustatud mudelit. Maa magnetinduktsioon tema magnetilisel teljel avaldub kujul $B(z) = B_E(R_E/z)^3$, kus $B_E = 3{,}12 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$ on mangetinduktsioon Maa pinnal magnetpoolusel, $R_E = 6370\,\mathrm{km}$ on Maa raadius ja z on mõõdetud Maa *keskpunktist*.

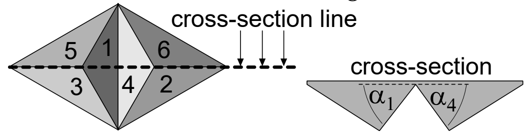
Elektron laenguga $-e = -1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ ja massiga $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ läheneb Maale kiirusega $u_0 = 500\,\mathrm{km/s}$, siseneb Maa magnetvälja otse selle teljel kaugusel $R_0 = 5R_E$ nurga α all ning hakkab spiraalitama Maa poole.

Kui α on liiga suur, peegeldab tugevnev magnetväli Maale läheneva osakese eemale. Leidke tingimus nurgale α, et osake jõuaks Maa pinnani. Võite eirata gravitatsioonilisi ja/või relativistlikke efekte.

4. RETROREFLEKSIIVNE KILE (12 punkti) — *Eero Uustalu and Jaan Kalda*. Antud on järgmised vahendid: retrorefleksiivne kile, mille suurendatud altvaade on esimesel joonisel; statiiv, joonlaud, laserviip, ekraan, millimeeterpaber, mall.



Kile pealispind on tasane, alumist pinda aga katab kaldus kolmnurktahkudest koosnev perioodilline muster. Kuus sellist tahku on kujutatud teisel joonisel; tahud 1, 3 ja 5 on üksteise suhtes täisnurga all ja moodustavad kuubi nurga, tahud 2, 4 ja 6 on samuti üksteisega risti. Teise joonise parempoolne osa kujutab kile ristlõiget. Kaldtahkude ja taasapinna vahele jääv kilematerjal moodustab mikroprismad. Tähistame nende mikroprismade murdvad nurgad α_i, $i = 1{,}2{,}\ldots 6$ (indeksid vastavad tahkude omadele). Nurkade α_i seas võib mõni mõne teisega võrduda.



Kui valgus langeb tasapinnale peaaegu risti, toimub kaldpindadel täielik sisepeegeldumine ja valguse levimissuund pöördub 180°. Mikroprismad võivad aga toimida ka prismadena, muutes valguskiire levimissuunda mingi nurga β võrra. Nurk β sõltub langemisnurgast ning prisma nurgast $\alpha = \alpha_i$. Tähistagu β_i minimaalset kõrvalekaldenurka fikseeritud prisma nurga α_i puhul.

i) *(2 punkti)* Määrake katseliselt seosed — võrdused ja võrratused — prismade nurkade α_i vahel (kus $i = 1{,}2{,}\ldots 6$ vastavad tahkude numbritele nagu joonisel). Võite kasutada leitud võrdusi järgnevais ülesande osades (vähendades nii tundmatute nurkade arvu). Pange tähele, et tahu number „1" võite valida vabalt.

ii) *(2 punkti)* Määrake minimaalsed kõrvalekaldenurgad β_i, $i = 1{,}2{,}\ldots 6$.

iii) *(4 punkti)* Määrake prismade nurgad α_i, $i = 1{,}2{,}\ldots 6$.

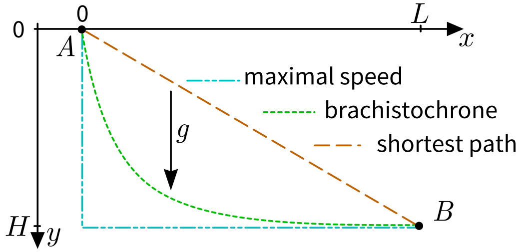
iv) *(1 punkt)* Kuna tahud 1, 3 ja 5 on üksteisega risti, kehtib võrdus

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_5 = 1.$$

Analoogiliselt $\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_4 + \cos^2\alpha_6 = 1$. Korrigeerige nende võrduste abil oma prismade nurki, liites neile või lahutades neist väikese parandi.

v) *(3 punkti)* Määrake kile materjali murdumisnäitaja.

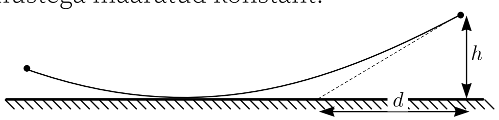
5. Brahhistokroon (10 punkti) — *Rūdolf Treilis*. Võtkem punktid A ja B nii, et nende vahekaugus on vertikaalsihis H ja horisontaalsihis L ja nad asetsevad gravitatsiooniväljas g, nagu kujutatud alloleval joonisel. Punktmass saab libiseda mööda fikseeritud kujuga rööbast hõõrdevabalt (sealhulgas tehes $90°$ pöördeid) punktist A punkti B. Brahhistokroon on rööpa kuju, mis minimeerib liikumise koguaja.



i) *(2 punkti)* Arvutage liikumise koguaeg „maksimaalse kiiruse“ (“maximal speed”) ja „lühima tee“ (“shortest path”) trajektooridel. Leidke suhe $\frac{L}{H}$, mille puhul need kaks on võrdsed.

ii) *(2 punkti)* Fermat’ printsiibi kohaselt levib valguskiir ühest punktist teise piki lühima levikuaja trajektoori. Oletagem, et mingis keskkonnas saab valguskiir levida punktist A punkti B piki joonisel kujutatud brahhistokrooni. Leidke selle keskkonna murdumisnäitaja $n = n(x,y)$ koordinaatide x ja y funktsioonina, kui $n(L,H) = 1$.

iii) *(2 punkti)* Näidake, et valguskiire trajektoor muutuva murdumisnäitajaga $n(x,y) \equiv n(y)$ keskkonnas rahuldab diferentsiaalvõrrandit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{C \cdot n(y)^2 - 1}$, kus C on ääretingimustega määratud konstant.



iv) *(2 punkti)* Saadud võrrandiga saab seletada miraaže, mis tekivad, kui murdumisnäitaja kõrgusega kasvab. Vaadelgem taevast tulevat valguskiirt, mis puutub maapinda ($y = 0$) ja jõuab vaatleja silma kõrgusel h (selles ülesande osas valige y-telg vastassuunas — alt üles). Kui murdumisnäitaja muutub kujul $n(y) = n_0(1+\alpha y)$, kus n_0 ja α on konstandid, siis avaldage näiv kaugus d, kust kiir paistab lähtuvat.

v) *(2 punkti)* Lahendades osade ii) ja iii) võrrandid, saab näidata, et brahhistokroon on tegelikult tsükloidi lõik. Tsükloid on kõverjoon, mida järgib ringikujulise ratta serva punkt, kui see veereb piki sirgjoont ilma libisemata. Leidke erijuhul $\frac{L}{H} = \frac{\pi}{2}$ minimaalne liikumise aeg $t_{\min}$ punktist A punkti B.

6. Isegraviteeruv gaas (10 punkti) — *Eero Vaher (v: Jaan Kalda)*. Vaadelgem monoatomaarse ideaalse gaasi kera temperatuuril T, mis hoiab oma sfääriliselt sümmeetrilist mehaaniliselt stabiilset statsionaarset kuju tänu omaenda gravitatsiooniväljale. Olgu gaasi kogumass M_0 ja molaarmass μ. Kirjeldame radiaalset massijaotust raadiusega r sfääri sisse jääva kogumassi $M = M(r)$ kaudu; rõhku $p = p(r)$ aga funktsioonina kaugusest r sfäärilise gaasipilve keskmest.

i) *(2 punkti)* Kirjutage mehaanilise tasakaalu tingimus väikesele gaasikogusele massiga m ja ruumalaga v kaugusel r pilve tsentrist, kasutades kohalikku rõhu gradienti $p'(r) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$, kohalikku $M(r)$ väärtust ja sobivaid looduslikke konstante. Lihtsustage avaldist märgates, et $m/v = \rho$ on kohalik gaasi tihedus.

ii) *(2 punkti)* Näidake, et gaasi soojuslik koguenergia avaldub kujul

$$U = -\alpha \int V \,\mathrm{d}p,$$

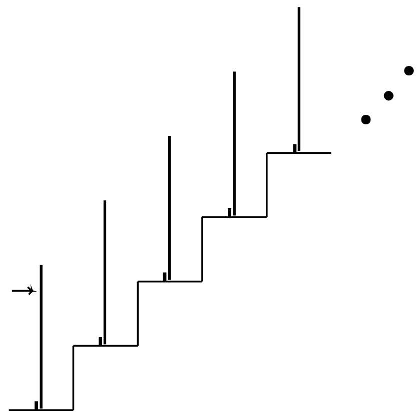
kus $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ja α on arvuline kordaja ning integraal võetakse pilve keskmest suurte kaugusteni, kus rõhk on tühiselt madal. Leidke α väärtus.

iii) *(3 punkti)* Näidake eelnevate tulemuste põhjal, et $U = -\beta E_G$, kus E_G on gaasi gravitatsiooniline potentsiaalne energia ja $\beta < 1$ on positiivne arvuline kordaja. Leidke β väärtus.

iv) *(1 punkt)* Kuidas muutuvad ajas pilve temperatuur ja karakteerne raadius soojuskiirguse tõttu? Andke kvalitatiivne põhjendatud vastus. (Karakteerse raadiuse R_c võib defineerida kui sellise raadiuse, et pool pilve massist on sfääris raadiusega R_c.)

v) *(2 punkti)* Nüüd vaatleme analoogilist täielikult ioniseeritud plasmapilve. Eeldagem, et plasma on suures plaanis neutraalne elektronide ja prootonite segu. Mis on sellise plasmapilve jaoks võrdetegur gravitatsioonilise koguenergia ja soojusliku koguenergia vahel?

7. Doomino (6 punkti) — *Kaarel Hänni.*



Taavet seisab lõpmatu trepi all, kus nii astme laius kui ka kõrgus on d. Kõigi astmete servad on kergelt ümarad. Iga astme keskel seisab alguses püsti üks doominokivi pikkusega $\sqrt{5}d$ ja tühise paksusega. Iga doominokivi allserva taga on väike kõrgendik, et kivi ei libiseks tagasi. Taavet annab esimesele doominokivile mingi algse nurkkiiruse, mispeale hakkavad kivid järjest üksteisele peale kukkuma. Kõik põrked on täielikult mitteelastsed ja kahe doominokivi vahel puudub hõõre. Taavet märkab, et mõne aja järel on kõigil doominokividel sama algne nurkkiirus ω. Leidke ω.

8. Neli takistit (10 punkti) — *Jaan Kalda and Eero Uustalu. Vahendid:* neli peaaegu ühesugust takistit (takistusega veidi üle $4\,\mathrm{k}$), mis on tähistatud tähtedega A–D ja komplekti numbriga; tester; muudetava väljundpingega pingeallikas; juhtmed. **Ärge kasutage testrit ampermeetrina**; kui te sellegipoolest kasutate ja põletate testri läbi, ei anta teile uut testrit. Testril on neljakohaline ekraan, aga esimene number saab olla ainult 0, 1, 2 või 3. Oommeetrina on testri määramatus $1{,}0\%$ lugemist pluss 4 viimase numbrikoha väärtust. Voltmeetrina on määramatus $0{,}6\%$ lugemist pluss 4 viimase numbrikoha väärtust.

i) *(2 punkti)* Pange kirja oma komplekti number. Määrake nelja takisti keskmine takistus $\bar{r}$ nii täpselt kui võimalik ja leidke määramatus. Joonistage kasutatud elektriskeem.

ii) *(2 punkti)* Määrake nelja takistuse harmooniline keskmine $\langle r\rangle$ nii täpselt kui võimalik (harmooniline keskmine on pöördväärtuste keskmise pöördväärtus) ja leidke määramatus. Joonistage kasutatud elektriskeem.

iii) *(1 punkt)* Järjestage takistid A, B, C ja D takistuse kasvavas järjekorras. Joonistage kasutatud elektriskeem.

iv) *(5 punkti)* Määrake $r_A - \bar{r}$, $r_B - \bar{r}$, $r_C - \bar{r}$ ja $r_D - \bar{r}$ nii täpselt kui võimalik ja leidke määramatus (r_A, r_B, r_C ja r_D on vastavate takistite takistused). Joonistage kasutatud elektriskeem.