POHJOISMAIDEN JA BALTIAN FYSIIKKAOLYMPIALAISET 2019

1. SATELLIITTI (8 pistettä) — *Taavet Kalda.* Aurinkovoimalla toimiva satelliitti laukaistaan alkunopeudella v_0 maapallon pinnalta elliptiselle, Aurinko-keskeisellä kiertoradalle tavoitteenaan kerätä mahdollisimman paljon aurinkoenergiaa. Satelliitin lähtökulmaa voidaan muuttaa vapaasti.

i) *(1 piste)* Mikä on pienin tarvittava lähtövauhti v_m, joka raketille on annettava, jotta se päätyisi mille tahansa Aurinko-keskeiselle radalle?

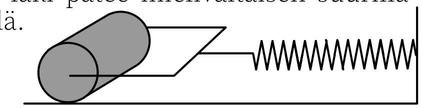
ii) *(2 pistettä)* Mikä on satelliitin vauhti heti sen jälkeen kun se on poistunut maapallon gravitaatiokentästä?

iii) *(2,5 pistettä)* Lausu keskimääräinen Auringon satelliittin kohdistama säteilytysvoimakkuus satelliitin radan isoakselin puolikkaan a, pyörimismäärän J, kiertoajan T ja massan m funktiona.

iv) *(2,5 pistettä)* Mikä on suurin keskimääräinen Auringon säteilytysvoimakkuus minkä satelliitti pystyy keräämään ja millä lähtökulmalla suhteessa maapallon liikkeeseen se saavutetaan?

Auringon massa on $M_\odot$, maapallon kiertoradan säde on $R_\oplus$, vapaan pudotuksen kiihtyvyys maapallolla g, maapallon säde $r_\oplus$ ja auringon säteilytysvoimakkuus $L_\odot$.

2. TELA (8 pistettä) — *Lasse Frantti (iv,v: Jaan Kalda).* Tela koostuu umpinaisesta, homogeenisestä sylinteristä, jonka massa on M ja säde r; se lepää horisontaalisella tasolla ja on kiinnitetty seinään jousella, jonka jousivakio on k (ks. 2). Jousi voidaan olettaa ideaaliseksi ja sen massa mitättömäksi — t.s. Hooken laki pätee mielivaltaisen suurilla venymillä.



i) *(1 piste)* Oletetaan aluksi, ettei telan ja tason välillä ole kitkaa. Telaa poikkeutetaan levosta ja se vapautetaan. Johda oskillaation jaksonaika T_0.

ii) *(1 piste)* Tästä eteenpäin telan ja tason välinen kitkakerroin μ otetaan huomioon. Telaa poikkeutetaan levosta ja se vapautetaan, jolloin se alkaa heilahdella edestakaisin. Pienillä heilahteluamplitudeilla tela ei lipsu pinnalla. Johda tässä tapauksessa heilahtelun jaksonaika T_r.

iii) *(2 pistettä)* Jos alussa annettu heilahtelun amplitudi, jota mitataan jousen venymällä x, on suurempi kuin tietty kriittinen arvo $A_\star$, niin heilahtelun amplitudi alkaa pienentyä ajan funktiona. Esitä $A_\star$ parametrien k, M, r, putoamiskiihtyvyyden g, sekä telan ja tason välisen kitkakertoimen μ avulla.

iv) *(2 pistettä)* Olettaen, että heilahtelun amplitudi alussa A_0 on paljon suurempi kuin $A_\star$, mikä on sylinterin suurin mahdollinen kulmanopeus aikavälillä $0 \le t \le T/2$, missä t on telan vapauttamisesta kulunut aika?

v) *(2 pistettä)* Olettaen, että $A_0 \gg A_\star$, hahmottele kuvaaja, jossa esität kiihtyvyyden suureiden εr ja a aikariippuvuudet. Tässä ε on telan kulmakiihtyvyys ja a sen lineaarinen kiihtyvyys.

3. LIIKE B:SSÄ (8 pistettä) — *Andréas Sundström, Joonas Kalda (ii,iii).*

Hiukkasia, joiden massat ovat m ja varaukset ovat q, laukaistaan origosta x-akselin suuntaisesti vauhdilla v. Etäisyydellä $x = l$ sijaitsee varjostin.

i) *(1 piste)* Laukaistaessa ensimmäinen hiukkanen avaruuden täyttää x-akselin suuntainen, homogeeninen sähkökenttä. Magneettikenttää ei ole. Mikä on oltava sähkökentän voimakkuus, jottei hiukkanen koskaan saavuttaisi varjostinta?

ii) *(2 pistettä)* Seuraavaksi sähkökenttä laitetaan pois päältä. Alueella $l > x > 0$ vallitsee z-akselin suuntainen, homogeeninen magneettikenttä. Tietäen hiukkasen vauhdin olevan juuri tarpeeksi suuri saavuttaakseen varjostimen, hahmottele hiukkasen liikerata ja etsi B.

iii) *(2 pistettä)* Seuraavaksi x,y-tasossa oleva sähkökenttä pistetään päälle. Kolmas hiukkanen laukaistaan origosta edelleen x-akselin suuntaisesti mutta mahdollisesti eri vauhdilla. Havaitset, että hiukkanen kulkee ilman poikkeamaa. Lisäksi, hiukkaselta kestää sama aika saavuttaa varjostin kuin ensimmäisellä hiukkasella. Etsi sähkökentän E voimakkuus.

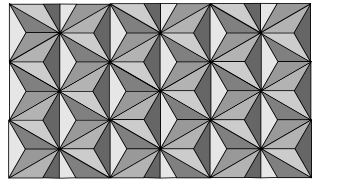
iv) *(3 pistettä)* Seuraavaksi käsitellään epähomogeenista magneettikenttää: magneettikentän kenttäviivojen kaarevuus on paljon vähemmän kuin hiukkasen liikeradan kaarevuussäde. Paloitellaan hiukkasen nopeus magneettikentän kanssa yhdensuuntaiseen komponenttiin $\vec{v}_\parallel$ ja magneettikentän kanssa kohtisuorassa olevaan komponenttiin $\vec{v}_\perp$. Valitaan koordinaatisto siten, että z-akseli on yhdensuuntainen magneettikentän kanssa siinä pisteessä missä hiukkanen on; magneettikentän z-komponentti muuttuu hitaasti z-koordinaatin funktiona, $B_z = B_z(z)$. Lisäksi, käytetään sellaista koordinaatistoa joka liikkuu nopeudella $\vec{v}_\parallel$ ja jossa B_z muuttuu hitaasti ajan funktiona. Osoita, että $\vec{v}_\perp^2$ on verrannollinen magneettikentän voimakkuuteen B_z siinä pisteessä missä hiukkanen on.

Tarkastellaan seuraavaksi yksinkertaistettua mallia siitä miten aurinkotuulen hiukkaset vuorovaikuttavat maapallon magneettikentän kanssa. Maapallon magneettikentän voimakkuus magneettisella akselilla voidaan ilmaista muodossa $B(z) = B_E(R_E/z)^3$, missä $B_E = 3{,}12 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$ on kentän voimakkuus magneettisella navalla maapallon pinnalla, $R_E = 6370\,\mathrm{km}$ on maapallon säde ja z mitataan maapallon *keskipisteestä*.

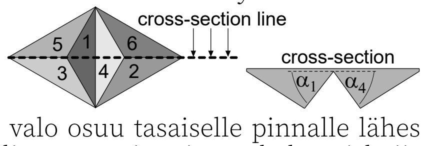
Elektroni jonka varaus on $-e = -1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ ja massa $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ lähestyy maapalloa vauhdilla $u_0 = 500\,\mathrm{km/s}$ ja osuu maapallon magneettikenttään tarkalleen sen magneettisella akselilla etäisyydellä $R_0 = 5R_E$ kulmassa α ja alkaa kulkea spiraalimaisesti kohti maapalloa.

Jos α on liian iso, hiukkanen heijastuu takaisin kasvavan magneettikentän voimakkuuden vuoksi. Etsi ehto α:lle jolla hiukkanen saavuttaa maapallon pinnan. Voit jättää gravitaation sekä relativistiset efektit huomioimatta.

4. TAKAISINHEIJASTAVA KALVO (12 pistettä) — *Eero Uustalu and Jaan Kalda.* Saat seuraavat työkalut: takaisinheijastavan kalvon, joka on kuvattu ylhäältäpäin suurennettuna alla olevassa kuvassa; statiivin, viivaimen, laserpointterin, varjostimen, millimetripaperia ja astemitan.



Kalvon yläpinta on tasainen, ja sen alapinnan muodostaa jaksollinen hila mikroskooppisen pieniä prismoja. Kuusi tällaista prismaa on esitetty erikseen allaolevassa kuvassa; tahkot 1,3 ja 5 ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, ja tahkot 2,4 ja 6 ovat toisiaan vasten kohtisuorassa. Alimmaisessa hahmotelmassa on esitetty prisman poikkileikkaus. Tahkojen ja kalvon tasaisen pinnan väliset kulmat ovat α_i, $i = 1,2\ldots6$. Huomaa, että osa kulmista voivat olla keskenään yhtäsuuret.



Kun valo osuu tasaiselle pinnalle lähes normaalin suuntaisesti, se kokonaisheijastuu kaltevilla tahkoilla, ja sen seurauksena muuttaa etenemissuuntaansa $180°$. Mutta, mikroprismat voivat myös toimia prismoina, jotka poikkeuttavat valonsädettä kulmalla β. Kulma β riippuu valonsäteen tulokulmasta, ja prisman kulmasta $\alpha = \alpha_i$. Olkoon β_i prismakulmaa α_i vastaava pienin poikkeutuskulma.

i) *(2 pistettä)* Järjestä prismakulmat α_i suuruusjärjestykseen. Voit käyttää päättelemiäsi yhtäsuuruuksia tehtävän ratkaisussa, mikä vähentää tuntemattomien kulmien lukumäärää. Huomaa, että indeksiä “1” vastaava tahko voidaan valita mielivaltaisesti.

ii) *(2 pistettä)* Määritä pienimmän poikkeaman kulmat β_i, $i = 1,2,\ldots6$.

iii) *(4 pistettä)* Määritä prismakulmat α_i, $i = 1,2,\ldots6$.

iv) *(1 piste)* Koska tahkot 1, 3 ja 5 ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, niin pätee seuraava yhtäsuuruus:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_5 = 1.$$

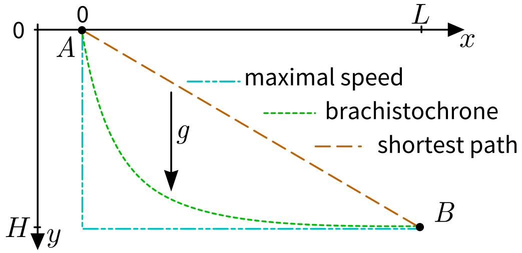
Vastaavasti

$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_4 + \cos^2\alpha_6 = 1.$$

Korjaa näiden yhtäsuuruuksien perusteella prismakulmille saamiasi tuloksia lisäämällä (tai vähentämällä) kulmiin sama pieni luku.

v) *(3 pistettä)* Määritä kalvon materiaalin taitekerroin.

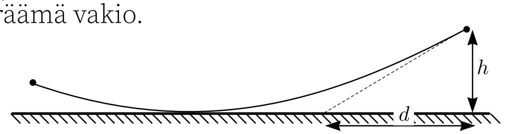
5. Brakistokroni (10 pistettä) — *Rūdolf Treilis*. Pisteet A ja B sijaitsevat vertikaalisesti etäisyydellä H ja horisontaalisesti etäisyydellä L toisistaan. Alueella vallitsee gravitaatiokenttä g, alla olevan kuvan mukaisesti. Pistemäinen massa voi liukua kitkatta jäykkää kourua myöten A:n ja B:n välillä — myös 90° käännökset ovat mahdollisia. Brakistokronikäyrä on se käyrä, joka minimoi matkaan kuluneen ajan.



i) *(2 pistettä)* Laske matkaan kulunut aika käyriä "maximal speed" ja "shortest path" myöten kulkevalle pistemassalle. Johda suhdeluku L/H, jolla nämä matka-ajat ovat yhtäsuuret.

ii) *(2 pistettä)* Fermat'n periaatteen mukaisesti, valonsäde kulkee pisteestä toiseen nopeinta mahdollista reittiä. Oletetaan, että eräässä väliaineessa valonsäde voi edetä A:sta B:hen yllä olevassa kuvassa esitettyä brakistokronikäyrää myöten. Johda taitekerroin $n = n(x,y)$ koordinaattien x ja y funktiona tässä väliaineessa, kun $n(L,H) = 1$.

iii) *(2 pistettä)* Osoita, että väliaineessa, jonka taitekerroin on $n(x,y) = n(y)$, valonsäteen polku tottelee differentiaaliyhtälöä $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{C \cdot n(y)^2 - 1}$, missä C on reunaehtojen määräämä vakio.



iv) *(2 pistettä)* Saadulla yhtälöllä voidaan selittää kangastus-ilmiö, joka syntyy, kun taitekerroin kasvaa korkeuden kasvaessa. Oleta, että valonsäde saapuu taivaalta hipaisten maanpintaa ($y = 0$), ja osuu havaitsijan silmään korkeudella h (valitse tätä tehtävää varten y-akseli kulkemaan alhaalta ylös). Kun taitekerroin on $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$, missä n_0 ja α ovat vakioita, johda lauseke valonsäteen näennäiselle lähtöetäisyydelle d.

v) *(2 pistettä)* Ratkaistessa kohdissa ii) ja iii) johdettuja yhtälöitä voidaan näyttää, että brakistokronikäyrä on itseasiassa sykloidin segmentti. Sykloidi on se polku, jonka pyörän kehän kiinteä piste piirtää pyörän pyöriessä lipsumatta suoraa myöten. Johda vähimmäismatka-aika $t_{\min}$ pisteiden A ja B välillä erityistapauksessa, jossa $\frac{L}{H} = \frac{\pi}{2}$.

6. Kaasun itsegravitaatio (10 pistettä) — *Eero Vaher (v: Jaan Kalda)*.

Kaasupallo, joka koostuu monoatomisesta ideaalikaasusta lämpötilassa T, pysyy mekaanisessa tasapainotilassa pallosymmetrisenä oman gravitaatiokenttänsä ansiosta. Olkoon kaasun kokonaismassa M_0, ja sen moolimassa μ. Mallinnamme säteittäistä massajakaumaa $M = M(r)$, r-säteisen pallon sisällä kokonaismassan ja säteen avulla. Painetta $p = p(r)$ mallinnamme etäisyyden r funktiona missä r on mitattu pallon keskipisteestä.

i) *(2 pistettä)* Kirjoita mekaaninen tasapainoehto pienelle osalle kaasua — massaltaan m ja tilavuudeltaan v etäisyydellä r pallon keskipisteestä — paikallisen painegradientin $p'(r) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$, paikallisen massan $M(r)$ ja luonnonvakioiden avulla. Yksinkertaista lauseketta huomaamalla, että $m/v = \rho$ on kaasun paikallinen tiheys.

ii) *(2 pistettä)* Osoita, että kaasun terminen kokonaisenergia voidaan esittää

$$U = -\alpha \int V \,\mathrm{d}p,$$

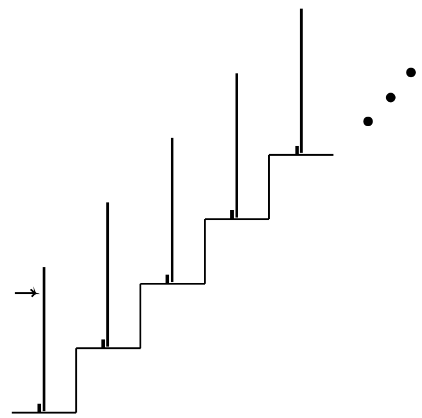
missä $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, α on luku, ja integraalin rajat ovat pallon keskeltä kauas pallon keskipisteestä, missä paine on mitätön. Laske α:n arvo.

iii) *(3 pistettä)* Näytä edellisten tulostesi perusteella, että $U = -\beta E_G$, E_G on kaasun gravitaatiopotentiaalienergia, ja $\beta < 1$ on positiivinen luku. Laske β:n arvo.

iv) *(1 piste)* Miten pallon lämpötila ja karakteristinen säde muuttuvat ajan funktiona lämpösäteilyn takia? Anna kvalitatiivinen vastaus. (Karakteristinen säde R_c voidaan määritellä sellaisena säteenä jonka sisällä on puolet pallomaisen kaasupilven massasta missä pallon koon määrittelee R_c.)

v) *(2 pistettä)* Käsitellään seuraavaksi samanlaista täysin ionisoitunutta plasmapalloa. Oleta, että plasma on makroskooppisesti neutraali seos elektroneja ja protoneja. Mikä on verrannollisuuskerroin plasmapallon kokonais gravitaatioenergian ja sen kokonais termisen energian välillä?

7. Dominot (6 pistettä) — *Kaarel Hänni*.



David seisoo äärettömän pitkän portaikon pohjalla. Portaiden askeleen leveys on d joka on myös portaan askeleen korkeus. Jokaisen askeleen reuna on hieman pyöristetty. Alussa jokaisen askeleen keskellä on pystyssä seisova domino jonka pituus on $\sqrt{5}d$. Voit jättää dominon paksuuden huomioimatta. Jokaisen dominon tyvessä on pieni koroke joka estää dominoita liukumasta taaksepäin. David antaa ensimmäiselle dominolle jonkin alustavan kulmanopeuden jonka jälkeen dominot alkavat kaatua toistensa päälle. Kaikki törmäykset ovat täysin epäelastisia ja dominoiden välillä oleva kitka on nolla. David havaitsee hetken kuluttua, että kaikilla dominoilla on heti törmäyksen jälkeen sama kulmanopeus ω. Etsi tämä ω.

8. Neljä vastusta (10 pistettä) — *Jaan Kalda and Eero Uustalu. Laitteisto:* neljä melkein identtistä vastusta (joiden resistanssi on hieman yli $4\,\mathrm{k}$:ia) on merkitty kirjaimin A–D sekä ne on numeroitu. Resistoreiden lisäksi sinulla on yleismittari, jännitelähde säädettävällä ulostulojännitteellä sekä johtoja. **Älä käytä yleismittarin virtamittari asetusta**; jos silti käytät ja poltat yleismittarin, sinulle ei anneta toista yleismittaria. Yleismittarissa on neljä numeroinen näyttö mutta ensimmäinen numero voi olla vain 0, 1, 2 tai 3. Kun yleismittaria käyttää vastusmittarina, epätarkkuus on 1% lukemasta plus 4 kertaa mittarin viimeinen luku. Kun yleismittaria käytetään jännitemittarina, epätarkkuus on 0.6% lukemasta plus 4 kertaa mittarin viimeinen luku.

i) *(2 pistettä)* Kirjoita ylös resistoreiden numero. Määritä resistanssin keskiarvo $\bar{r}$ vastuksille niin tarkasti kuin pystyt ja ilmoita mittauksesi epätarkkuus. Piirrä käyttämäsi virtapiiri.

ii) *(2 pistettä)* Määritä resistanssin harmoninen keskiarvo $\langle r \rangle$ näille neljälle vastukselle niin tarkasti kuin pystyt (harmoninen keskiarvo on käänteisluku käänteislukujen keskiarvosta) ja ilmoita mittauksesi epätarkkuus. Piirrä käyttämäsi virtapiiri.

iii) *(1 piste)* Järjestä resistorit A, B, C ja D suuruusjärjestykseen resistanssin mukaan. Piirrä käyttämäsi virtapiiri.

iv) *(5 pistettä)* Määritä $r_A - \bar{r}$, $r_B - \bar{r}$, $r_C - \bar{r}$, ja $r_D - \bar{r}$ niin tarkasti kuin voit ja ilmoita epätarkkuus (r_A, r_B, r_C, ja r_D merkitsevät vastaavien vastuksien resistanssia). Piirrä käyttämäsi virtapiiri.