Ziemeļvalstu-Baltijas fizikas olimpiāde 2019

1. Satelīts (8 punkti) — *Taavet Kalda*. Ar saules enerģiju darbināms satelīts tiek palaists no Zemes ar sākuma ātrumu v_0 eliptiskā heliocentriskā orbītā ar nolūku savākt pēc iespējas vairāk saules enerģijas. Izlidošanas leņķis var tikt izvēlēts patvaļīgi.

i) *(1 punkts)* Cik liels ir minimālais nepieciešamais ātrums v_m, lai satelītu nogādātu kādā heliocentriskā orbītā?

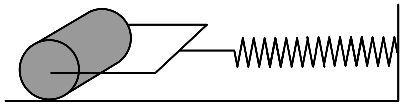
ii) *(2 punkti)* Cik liels ir satelīta ātrums momentā, kad tas atstāj Zemes gravitācijas lauku?

iii) *(2,5 punkti)* Izsaki satelīta saņemto vidējo saules intensitāti izmantojot satelīta lielo pusasi a, impulsa momentu J, apriņķošanas periodu T un masu m.

iv) *(2,5 punkti)* Cik liela ir maksimālā satelīta vidējā saņemtā saules intensitāte, ko satelīts var saņemt un cik liels ir leņķis ko veido izlidošanas ātrums ar Zemes kustības virzienu, lai sasniegtu šo maksimumu?

Saules masa ir $M_\odot$, Zemes orbītas rādius ir $R_\oplus$, brīvās krišanas paātrinājums uz Zemes ir g, Zemes rādius ir $r_\oplus$ un Saules starojuma jauda ir $L_\odot$.

2. Rullis (8 punkti) — *Lasse Frantti (iv,v: Jaan Kalda)*. Rullis sastāv no homogēna cilindra ar masu M un rādiusu r; tas atrodas uz horizontālas virsmas un ir piestiprināts pie sienas ar spirālveida atsperi, kuras stinguma koeficients ir k (skatīt attēlu). Atsperes ir ideāla ar niecīgu masu, t.i. Huka likums ir pielietojams bezgalīgi lielām deformācijām.



i) *(1 punkts)* Iesākumā apskatīsim situāciju, kurā nav berzes starp galdu un cilindru. Ja rulli pastumj uz sānu un atlaiž, tas sāk svārstīties. Aprēķini svārstību periodu T_0

ii) *(1 punkts)* Tālāk apskatīsim situāciju, kurā jāņem vērā berze starp cilindru un galda virsmu. Rullis tiek iestumts no viena sāna un sāk ripot turp un atpakaļ. Nelielām svārstībām rullis pret virsmu neslīd. Atrod šādu svārstību periodu T_r.

iii) *(2 punkti)* Ja sākotnējā svārstību amplitūda (kas tiek mērīta, kā atsperes novirze no līdzsvara x) ir lielāka par kritisko vērtību $A_\star$, tad svārstību amplitūda laikā samazinās. Izsaki lielumu $A_\star$ izmantojot lielumus k, M, r, brīvas krišanas paātrinājumu g, un berzes koeficientu starp rulli un virsmu μ.

iv) *(2 punkti)* Pieņemot, ka sākotnējā amplitūda A_0 ir daudz lielāka par $A_\star$, cik liels ir cilindra maksimālais leņķiskais ātrums laikā $0 \le t \le T/2$, kur t ir laiks no ruļļa palaišanas vaļā?

v) *(2 punkti)* Pieņemot, ka $A_0 \gg A_\star$, uzzīmē kvalitatīvu grafiku, kurā attēlo lielumu εr un a atkarību no laika; ar ε un a apzīmējam atbilstoši ruļļa leņķisko un lineāro paātrinājumu.

3. Kustība B laukā (8 punkti) — *Andréas Sundström, Joonas Kalda (ii,iii)*.

Daļiņas ar masu m un lādiņu q tiek izšautas no koordinātu sākumpunkta x-ass virzienā ar ātrumu v. Attālumā $x = l$ atrodas ekrāns.

i) *(1 punkts)* Pirmā daļiņa tiek izšauta brīdī, kad ir ieslēgts elektriskais lauks x-ass virzienā un magnētiskais lauks ir izslēgts. Cik lielam jābūt elektriskā lauka stiprumam, lai daļiņa nenonāktu līdz ekrānam?

ii) *(2 punkti)* Tālāk elektriskais lauks tiek izslēgts un tiek ieslēgts magnētiskais lauks z-ass virzienā apgabalā $l > x > 0$. Zinot, ka daļiņas ātrums ir minimālais nepieciešamais, lai sasniegtu ekrānu, uzskicē daļiņas trajektoriju un aprēķini magnētiskā lauka indukciju B.

iii) *(2 punkti)* Visbeidzot tiek ieslēgts elektriskais lauks xy-plaknē, kamēr B lauks paliek nemainīgs. Trešā daļiņa tiek izšauta no koordinātu sākumpunkta x-ass virzienā, iespējams ar citu ātrumu. Tiek novērots, ka daļiņa pārvietojas nenovirzoties no taisnes. Tiek izmērīts, ka laiks, kas nepieciešams, lai šī daļiņa nonāktu līdz ekrānam, ir tik pats liels kā pirmajai daļiņai. Aprēķini elektriskā lauka intensitāti E.

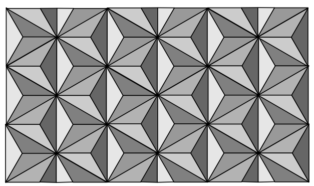
iv) *(3 punkti)* Nesaistīti ar iepriekšējo apskatīsim situāciju, ka magnētiskais lauks ir nedaudz nehomogēns: magnētiskā lauka līniju liekums ir daudz mazāks par daļiņas trajektorijas liekumu. Izrādās, ka tā sauktais daļiņas adiabātiskais invariants magnētiskajā laukā tiek saglabāts: magnētiskā lauka plūsma, ko ietver daļiņas spirālveida trajektorija paliek konstanta ar ļoti augstu precizitāti.

Apskatīsim vienkāršotu modeli, kā saules vēja daļiņas mijiedarbojas ar Zemes magnētisko lauku. Zemes magnētiskā lauka stiprums uz magnētiskās ass ir $B(z) = B_E(R_E/z)^3$, kur $B_E = 3{,}12 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$ ir magnētiskā lauka stiprums uz Zemes virsmas magnētiskajā polā, $R_E = 6370\,\mathrm{km}$ ir Zemes rādiuss un z ir attālums no Zemes *centra*.

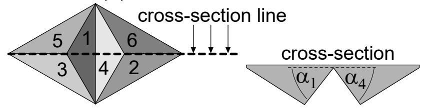
Elektrons ar lādiņu $-e = -1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ un masu $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ Tuvojas Zemei ar ātrumu $u_0 = 500\,\mathrm{km/s}$ un trāpa Zemes magnētiskajā laukā tieši uz magnētiskās ass attālumā $R_0 = 5R_E$ un leņķī α pret magnētisko asi un sāk spirālveidīgi tuvoties Zemei.

Ja α ir pārāk liels, daļiņa tiks atstarota pieaugošā magnētiskā lauka dēļ, daļiņai tuvojoties Zemei. Atrod nosacījumu, kuram jāizpildās priekš leņķa α, lai daļiņa sasniegtu Zemi. Gravitācijas un/vai relatīvistiskos efektus var neņemt vērā.

4. Atstarotāja lenta (12 punkti) — *Eero Uustalu and Jaan Kalda*. Tev ir doti sekojoši rīki: atstarojošā (retroreflektējošā) lenta, kuras palielināts attēls redzams pirmajā attēlā zemāk; statīvs; mērlente; lāzerītis; ekrāns; milimetru papīrs, transportieris.



Augšējā lentas virsma ir gluda, bet apakšējā lentas daļa sastāv no periodiski izvietotām slīpām trīsstūrveida skaldnēm. Sešas šādas skaldnes ir attēlotas palielinājumā atsevišķā attēlā zemāk; skaldnes 1, 3 un 5 ir perpendikulāri viena otrai un veido vienu kuba stūri, un skaldnes 2, 4 un 6 arī ir perpendikulāras viena otrai. Pa labi no otrā attēla norādīts lentas šķērsgriezums. Lentas materiāls starp šīm slīpajām virsmām un plakano virsmu veido mikroprizmas. Šo mikroprizmu laušanas leņķi ir apzīmēti ar α_i, $i = 1{,}2{,}\ldots 6$ (kur indekss i norāda skaldnes numuru). Ņem vērā, ka daži no leņķiem α_i var būt vienādi.



Kad gaisma krīt gandrīz perpendikulāri plakanajai virsmai, Tā pilnīgi iekšēji atstarojas no slīpajām prizmu skaldnēm, kā rezultātā, tās virziens ir izmainīts par $180°$. Tomēr mikroprizmas var izmantot arī kā prizmu, lai noliektu staru par leņķi β. Leņķis β ir atkarīgs no krītošā stara krišanas leņķa un prizmas leņķa $\alpha = \alpha_i$. Ar β_i apzīmēsim minimālo novirzes leņķi fiksētam prizmas leņķim α_i.

i) *(2 punkti)* Veic eksperimentu, lai salīdzinātu leņķus α_i (kur $i = 1{,}2{,}\ldots 6$ norāda skaldnes numuru, kas norādīts attēlā) izmantojot vienādības un nevienādības. Šajā uzdevumā vari izmanot pārveidotos vienādojumus (tādā veidā samazinot nezināmo skaitu). Ņem vērā, ka skaldne ar numuru “1” var tikt izvēlēta patvaļīgi

ii) *(2 punkti)* Nosaki mazākos iespējamos novirzes leņķus β_i, $i = 1{,}2{,}\ldots 6$.

iii) *(4 punkti)* Nosaki prizmu leņķus α_i, $i = 1{,}2{,}\ldots 6$.

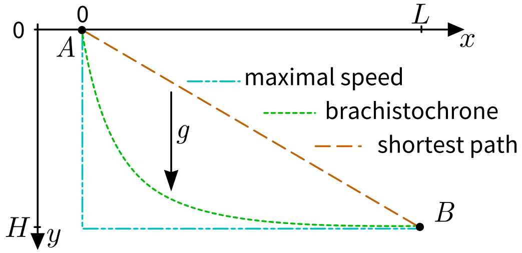
iv) *(1 punkts)* No nosacījuma, ka skaldnes 1, 3 un 5 ir perpendikulāras viena otrai, izpildās sekojoša vienādība:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_5 = 1.$$

Līdzīgi iegūst, $\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_4 + \cos^2\alpha_6 = 1$. Izmanto šīs vienādības, lai uzlabotu iepriekš iegūtās prizmu leņķu vērtības pieskaitot un/vai atņemot vienādas mazas vērtības iepriekš iegūtajām leņķu vērtībām.

v) *(3 punkti)* Nosaki gaismas laušanas koeficientu lentas materiālam.

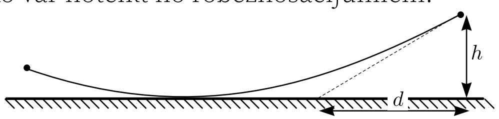
5. Brahistohrona (10 punkti) — *Rūdolf Treilis*. Doti divi punkti A un B konstantā gravitācijas laukā g, starp kuriem attālums vertikālā virzienā ir H un horizontālā virzienā ir L. Punktveida masa bez berzes (vajdzības gadījumā pagriežoties par $90°$) slīd no punkta A uz punktu B. Brahistohrona ir līkne, pa kuru noslīdēšana notiek visīsākajā laikā.



i) *(2 punkti)* Aprēķini noslīdēšanas laiku "maksimālā ātruma" un "īsākā ceļa" trajektorijām. Aprēķini attiecību $\frac{L}{H}$, pie kuras šie abi laiki ir vienādi.

ii) *(2 punkti)* Atbilstoši Fermā principam, gaismas stars no pukta uz punktu pārvietojas pa īsākā laika trajektoriju. Pieņemiet, ka dota vide, kurā gaismas stars pārvietojas no A uz B pa brahistohronas līkni kā tas ir parādīts iepriekšējā zīmējumā. Atrodiet gaismas laušanas koeficientu $n = n(x,y)$ šai videi kā funkciju no x un y, pieņemot, ka $n(L,H) = 1$.

iii) *(2 punkti)* Parādi, ka gaismas stara trajektorija vidē, kur vides gaismas laušanas koeficients mainās pēc likuma $n(x,y) \equiv n(y)$, apmierina diferenciālvienādojumu $\frac{dy}{dx} = \sqrt{C \cdot n(y)^2 - 1}$, kur C ir konstante, ko var noteikt no robežnosacījumiem.



iv) *(2 punkti)* Iegūtais vienādojums izskaidro mirāžas, kas rodas, ja vides gaismas laušanas koeficients pieaug palielinoties augstumam. Apskatīsim gaismas staru, kas nāk no debesīm un tiktiko pieskaras zemei ($y = 0$) un nonāk novērotāja acī augstumā h (šājā uzdevuma punktā y-ass izvēlēsimies otrādi nekā iepriekš - t.i. no lejas uz augšu). Ja gaismas laušanas indeks mainās pēc likuma $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$, kur n_0 un α ir konstantes, iegūsti izteiksmi, kas nosaka attālumu d līdz punktam, no kura it kā nāk gaismas stars.

v) *(2 punkti)* Atrisinot ii) un iii) daļās iegūtos vienādojumus ir iespējams pierādīt, ka brahistohrona ir cikloīdas segments. Cikloīda ir līkne, ko apraksta nekustīgs punkts uz ripojoša riteņa ārējās virsmas, ja ritenis ripo pa taisnu virsmu bez slīdēšanas. Aprēķini minimālo noslīdēšanas laiku $t_{\min}$ no punkta A uz punktu B gadījumam, kad $\frac{L}{H} = \frac{\pi}{2}$

6. Pašgravitējoša gāze (10 punkti) — *Eero Vaher (v: Jaan Kalda).*

Aplūkosim bumbu no ideālas vienatomu gāzes temperatūrā T, kas uztur sfēriski simetrisku mehāniski stabilu stacionāru formu sava gravitācijas lauka dēļ. Kopējā gāzes masa ir M_0, un tās molmasa ir μ. Mums ir jāapraksta radiālais masas sadalījums izmantojot pilno masu $M = M(r)$ sfēras ar rādiusu r iekšienē, un spiedienu $p = p(r)$ kā attāluma līdz sfēriskā gāzes mākoņa centram r funkciju.

i) *(2 punkti)* Nosakiet mehāniskā līdzsvara stāvokļa nosacījumu mazam gāzes tilpumam ar masu m un tilpumu v attālumā r no mākoņa centra, izmantojot tikai lokālo spiediena gradientu $p'(r) = \frac{dp}{dr}$, lokālo vērtību $M(r)$, un nepieciešamās dabas konstantes. Vienkāršo savu izteiksmi ievērojot to, ka $m/v = \rho$ ir lokālais blīvums gāzei.

ii) *(2 punkti)* Parādi, ka gāzes pilnā termiskā enerģija var tikt izteikta kā

$$U = -\alpha \int V \, dp,$$

kur $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, un α is skaitlisks koeficients, un integrēšana tiek veikta no mākoņa centra līdz kādai ļoti tālam no centra attālumam, kur spiediens ir neievērojami mazs. Atrodi vērtību α.

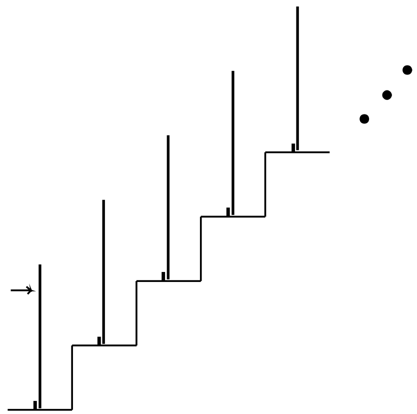
iii) *(3 punkti)* Balstoties uz saviem iepriekšējiem rezultātiem, parādi, ka $U = -\beta E_G$, kur E_G ir gāzes gravitācijas potenciālā enerģija, un $\beta < 1$ ir pozitīvs skaitlisks koeficients. Atrodi vērtību β.

iv) *(1 punkts)* Kā temperatūra un mākoņa raksturīgais rādiuss mainīsies laikā siltuma starojuma dēļ? Dod kvalitatīvu argumentētu atbildi. (Raksturīgais rādiuss R_c var tikt definēts kā tāds rādiuss, ka puse no mākoņa masas atrodas sfērā ar rādiusu R_c.

v) *(2 punkti)* Aplūkosim tagad līdzīgu pilnībā jonizētas plazmas mākoni. Pieņem, ka šī plazma ir makroskopiski neitrāls maisījums no elektroniem un protoniem. Kāds ir proporcionalitātes koeficients starp pilno gravitācijas enerģiju un pilno termālo enerģiju plazmas mākonim?

7. Domino kauliņi (6 punkti) — *Kaarel Hänni.*

Dāvids stāv bezgalīgu kāpņu apakšā, kam katra pakāpiena platums un augstums ir vienādi ar d. Katra pakāpiena stūris ir nedaudz noapaļots. Sākumā katra pakāpiena vidū ir vertikāli novietots domino kauliņš ar garumu $\sqrt{5}d$ un tā platumu var neievērot. Aiz katra domino kauliņa pamatnes ir mazs izcilnis, kas novērš tā slīdēšanu atpakaļ. Dāvids piešķir pirmajam domino kauliņam kādu sākotnējo leņķisko momentu un domino kauliņi sāk krist viens uz otru. Visas sadursmes ir neelastīgas, un starp diviem domino kauliņiem nav berzes. Dāvids ievēro, ka pēc kāda brīža, visiem domino kauliņiem ir vienāds sākotnējais leņķiskais ātrums ω. Atrodi ω.



8. Četri rezistori (10 punkti) — *Jaan Kalda and Eero Uustalu.*

Piederumi: četri gandrīz identiski rezistori (ar pretstību nedaudz lielāku par $4\,\mathrm{k}$) marķēti ar burtiem A–D un piederumu komplekta numuru, multimetrs, sprieguma avots ar regulējamu izejas spriegumu, vadi. **Nelietojiet multimetra strāvas mērīšanas funkciju**; ja jūs tomēr to lietosiet un mēriekārtu sadedzināsiet, citu multimetru jums nedos. Multimetram ir četru ciparu displejs, pie kam pirmais cipars var būt tikai 0, 1, 2 vai 3. Lietojot multimetru kā ommetru, tā precizitāte ir 1.0% no nomērītās vērtības plus 4 reizes lietotā mērdiapazona pēdējā cipara vienas vienības vērtība. Lietojot multimetru kā volmetru, tā precizitāte ir 0.6% plus 4 reizes lietotā mērdiapazona pēdējā cipara vienas vienības vērtība.

i) *(2 punkti)* Norādiet jūsu piederumu komplekta numuru. Pēc iespējas precīzāk nosakiet visu četru rezistoru vidējo pretestību $\bar{r}$ un nosakiet iegūtā lieluma precizitāti. Uzzīmējiet izmantotā slēguma shēmu.

ii) *(2 punkti)* Pēc iespējas precīzāk nosakiet visu četru rezistoru harmonisko vidējo pretestību (harmoniskā vidējā vērtība ir apgrieztā vērtība apgriezto vērtību vidējajai vērtībai) $\langle r \rangle$ un nosakiet iegūtā lieluma precizitāti. Uzzīmējiet izmantotā slēguma shēmu.

iii) *(1 punkts)* Sakārtojiet rezistorus A, B, C un D pēc pretestības pieaugošā kārtībā. Uzzīmējiet izmantotā slēguma shēmu.

iv) *(5 punkti)* Pēc iespējas precīzāk nosakiet $r_A - \bar{r}$, $r_B - \bar{r}$, $r_C - \bar{r}$, un $r_D - \bar{r}$ un nosakiet iegūto lielumu precizitāti (r_A, r_B, r_C, un r_D ir atbilstošo rezistoru pretestības). Uzzīmējiet izmantotā slēguma shēmu.