NORDIC-BALTIC PHYSICS OLYMPIAD 2019

1. SATELLIT (8 poäng) — *Taavet Kalda*. En satellit med solpaneler skjuts upp med farten v_0 från jorden till en elliptisk bana kring solen, med syfte att samla in så mycket solenergi som möjligt. Uppskjutningsriktningen kan väljas fritt.

i) *(1 poäng)* Vad är den minsta uppskjutningsfarten v_m som krävs för att nå en heliocentrisk omloppsbana?

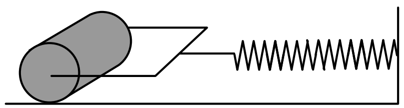
ii) *(2 poäng)* Vad är satellitens fart precis efter att den har lämnat jordens gravitationsfält?

iii) *(2.5 poäng)* Uttryck den genomsnittliga strålningsintensiteten från solen som träffar satelliten, i termer av omloppsbanans halvtransversalaxel (hälften av banans maximala diameter) a, satellitens rörelsemängdsmoment J, omloppsperiod T och massa m.

iv) *(2.5 poäng)* Vad är den maximala genomsnittliga strålningsintensiteten från solen som träffar satelliten? Med vilken vinkel relativt jordens bana behöver man skjuta upp satelliten för att den ska nå den optimala omloppsbanan?

Solens massa är $M_\odot$, jordens omloppsradie är $R_\oplus$, tyngdaccelerationen vid jordytan är g, jordens radie är $r_\oplus$ och solens totala utstrålade effekt (luminositet) är $L_\odot$.

2. CYLINER (8 poäng) — *Lasse Frantti (iv,v: Jaan Kalda)*. En solid homogen cylinder med massan M och radien r befinner sig i vila på ett horisontellt bord, och sitter ihop med en vägg via en fjäder med fjäderkonstanten k (se figur). Fjädern har en försumbar massa och antas vara ideal, det vill säga Hookes lag gäller för en godtyckligt stor förlängning.



i) *(1 poäng)* Antag först att det inte finns någon friktion mellan cylindern och bordet. Cylindern dras åt sidan och släpps. Bestäm svängningens periodtid T_0.

ii) *(1 poäng)* Från och med nu kan friktionskoefficienten mellan cylindern och bordet, μ, inte längre försummas. Cylindern dras åt sidan och börjar rulla fram och tillbaka. För små svängningsamplituder kan man anta att cylidern aldrig glider mot underlaget. Finn svängningens nya periodtid T_r.

iii) *(2 poäng)* Om den initiala amplituden (mätt som fjäderns förlängning x) är större än ett visst kritiskt värde $A_\star$, kommer svängningsamplituden att börja avta med tiden. Finn ett uttryck för $A_\star$ i termer av k, M, r, μ samt tyngdaccelerationen g.

iv) *(2 poäng)* Anta att den initiala amplituden A_0 är mycket större än $A_\star$. Vad är cylinderns maximala vinkelhastighet inom tidsintervallet $0 \le t \le T/2$, där t är tiden från ögonblicket då cylindern släpps?

v) *(2 poäng)* Fortsätt anta att $A_0 \gg A_\star$. Skissa en kvalitativ graf som visar εr och a som funktion av tiden, där ε betecknar vinkelaccelerationen och a den linjära accelerationen.

3. RÖRELSE I B-FÄLT (8 poäng) — *Andréas Sundström, Joonas Kalda (ii,iii)*.

I den här uppgiften ska vi studera partiklar med massa m och laddning q, som skickas iväg från origo med farten v parallellt med x-axeln. Vid $x = l$ finns det en skärm.

i) *(1 poäng)* När den första partikeln skickas iväg finns det ett homogent elektriskt fält parallellt med x-axeln, men inget magnetiskt fält. Vilken styrka måste det elektriska fältet ha för att partikeln inte ska nå fram till skärmen?

ii) *(2 poäng)* Nu stängs det elektriska fältet av och ersätts av ett homogent magnetfält i området $0 < x < l$ som pekar i z-riktningen. En annan partikel skickas iväg med samma fart. Magnetfältet är så starkt att partikeln nätt och jämnt kommer fram till skärmen. Skissa partikelbanan och bestäm B.

iii) *(2 poäng)* Nu slår vi även på ett elektriskt fält, som ligger i xy-planet, medan B lämnas oförändrat. Återigen skickas en partikel in längs med x-axeln, men möjligtvis med en annan fart. Vi observerar att partikeln färdas längs en rät linje. Vidare så tar det lika lång tid för den här partikeln att träffa skärmen som den i förra uppgiften. Bestäm den elektriska fältstyrkan E.

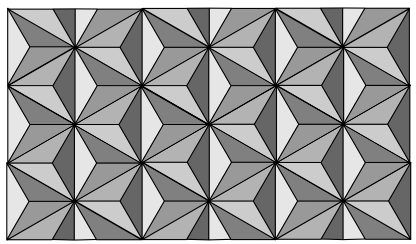
iv) *(3 poäng)* Den här uppgiften är orelaterad till de föregående. Nu ska vi istället betrakta ett svagt inhomogent magnetfält: magnetfältets krökningsradie är mycket större än partikelbanans krökningsradie. Det verkar som att i detta fall är den så kallade adiabatiska invarianten bevarad: det magnetiska flödet som omsluts av partikelns spiralformade bana är konstant med mycket god precision längs banan.

Vi ska nu studera en mycket förenklad modell av hur solvindspartiklar interagerar med jordens magnetfält. Längs med jordmagnetfältets axel kan den magnetiska flödestätheten skrivas som $B(z) = B_\mathrm{E}(R_\mathrm{E}/z)^3$, där $B_\mathrm{E} = 3.12 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$ är den magnetiska flödestätheten på jordytan vid en av jordens magnetiska poler, $R_E = 6370\,\mathrm{km}$ är jordens radie och z mäts från jordens *medelpunkt*.

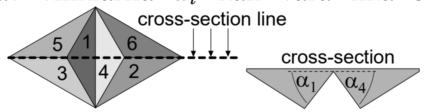
En elektron med laddningen $-e = -1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ och massan $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ närmar sig jorden med farten $u_0 = 500\,\mathrm{km/s}$. Den träffar jordmagnetfältets axel med vinkeln α på avståndet $R_0 = 5R_E$ från jordens medelpunkt, och börjar följa en spiral in mot jorden.

Om α är för stor kommer elektronen att reflekteras av det allt starkare magnetfältet. Bestäm ett villkor på α för att elektronen ska nå jordytan. Du kan bortse från gravitation eller relativistiska effekter.

4. REFLEXFILM (12 poäng) — *Eero Uustalu and Jaan Kalda*. Du har tillgång till följande utrustning: en reflekterande film vars undersida visas i figuren nedan; stativ, linjal, laserpekare, skärm, grafpapper och gradskiva.



Filmens ovansida är plan, till skillnad från dess undersida som består av ett periodiskt mönster av små lutande facettytor. I figuren nedan visas sex sådana facettytor, där ytorna 1, 3 och 5 är vinkelräta mot varandra så att de bildar ett hörn i en kub, och likaså är ytorna 2, 4 och 6 vinkelräta mot varandra. Till höger om den andra figuren visas filmens tvärsnitt. Filmens material mellan de lutande facettytorna och den plana sidan bildar små mikroprismor. Facettytornas vinklar mot den plana sidan av filmen betecknas med α_i, $i = 1,2,\ldots 6$ (där i numrerar facettytorna). Några av vinklarna α_i kan vara lika stora.



Ljus som infaller vinkelrätt mot den plana sidan kommer att totalreflekteras, så att dess riktning ändras med $180°$. I allmänhet kommer däremot prismorna att böja av ljusstrålar med en vinkel β, som beror på både infallsvinkeln och facettytans vinkel $\alpha = \alpha_i$. Låt β_i beteckna den minsta avböjningsvinkeln för respektive facettyta med vinkeln α_i.

i) *(2 poäng)* Utför experiment för att finna likheter och olikheter mellan facettytornas vinklar α_i (där ytornas index i löper som i figuren, $i = 1,2,\ldots 6$). Likheterna får användas genom hela denna uppgift för att minska antalet okända vinklar. Notera att ytan med index "1" kan väljas godtyckligt.

ii) *(2 poäng)* Bestäm de minsta avböjningsvinklarna β_i, $i = 1,2,\ldots 6$.

iii) *(4 poäng)* Bestäm facettytornas vinklar α_i, $i = 1,2,\ldots 6$.

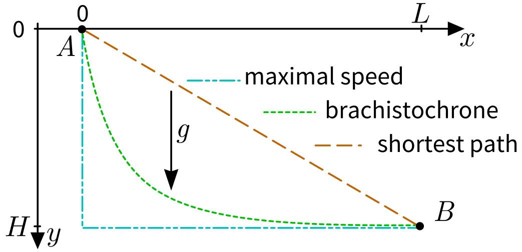
iv) *(1 poäng)* Eftersom ytorna 1, 3 och 5 är vinkelräta mot varandra gäller följande:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_5 = 1.$$

På samma sätt gäller att $\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_4 + \cos^2\alpha_6 = 1$. Använd dessa likheter för att korrigera facettytornas vinklar, genom att lägga till eller ta bort ett litet konstant belopp från dina tidigare uppmätta vinklar.

v) *(3 poäng)* Bestäm filmens brytningsindex.

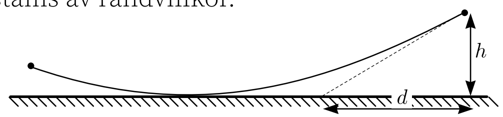
5. Brachistochron (10 poäng) — *Rūdolf Treilis.* Två punkter A och B åtskiljs av avstånden H i höjdled och L i horisontell led. De befinner sig i ett gravitationsfält g som visas i figuren nedan. En punktmassa glider längs en given bana från A till B utan friktion (även i 90°-hörnet). Brachistochronkurvan är definierad som den kurva som minimerar den totala färdtiden.



i) *(2 poäng)* Beräkna den totala färdtiden längs banorna ”maximal speed” respektive ”shortest path”. För vilken kvot $\frac{L}{H}$ är de båda färdtiderna lika?

ii) *(2 poäng)* Fermats princip säger att ljus följer den väg mellan två punkter som tar kortast tid. Anta att det finns ett medium i vilket en ljusstråle kan färdas från A till B längs brachistrochronkurvan som visas i figuren ovan. Bestäm dess brytningsindex $n = n(x,y)$ som funktion av koordinaterna x and y, givet att $n(L,H) = 1$.

iii) *(2 poäng)* En ljusstråle färdas genom ett medium med variabelt brytningsindex $n(x,y) \equiv n(y)$. Visa att ljusstrålens bana uppfyller differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{C \cdot n(y)^2 - 1}$, där C är en konstant som bestäms av randvillkor.



iv) *(2 poäng)* Ekvationen i föregående uppgift kan användas för att förklara hägringar, vilka uppstår när brytningsindexet ökar som funktion av höjden. En ljusstråle kommer in från himlen, snuddar precis vid jordytan ($y = 0$) och träffar en observatörs öga på höjden h (i den här uppgiften är y-axeln riktad i omvänd riktning mot tidigare – nerifrån och upp). Luftens brytningsindex varierar enligt $n(y) = n_0(1+\alpha y)$, där n_0 och α är konstanter. Finn ett uttryck för det skenbara avståndet d som det ser ut som att ljusstrålen kommer ifrån.

v) *(2 poäng)* Med hjälp av ekvationerna i deluppgift ii) och iii) kan man visa att brachistochronkurvan faktiskt utgör en del av en cykloid. En cykloid är den kurva som följs av en given punkt på randen av ett cirkelhjul när hjulet rullar längs en rät linje utan att glida. I specialfallet $\frac{L}{H} = \frac{\pi}{2}$, bestäm den minimala färdtiden $t_{\min}$ mellan A och B.

6. Självgraviterande gas (10 poäng) — *Eero Vaher (v: Jaan Kalda).*

Betrakta ett moln som består av av en enatomisk ideal gas med termeraturen T. Gasmolnets form hålls sfäriskt symmetrisk, mekaniskt stabil och stationär på grund av dess egna gravitationsfält. Gasens totala massa är M_0 och dess molmassa är μ. Vi kommer att beskriva den radiella massfördelningen med hjälp av den inneslutna massan $M = M(r)$ innanför ett sfäriskt skal med radien r samt trycket $p = p(r)$ som funktion av avståndet r från gasmolnets centrum.

i) *(2 poäng)* Vi ska nu studera ett litet gaspaket med massan m, volymen v och som befinner sig på avståndet r från gasmolnets centrum. Bestäm det mekaniska jämviktsvillkoret för detta gaspaket uttryckt i den lokala tryckgradienten $p'(r) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$, det lokala värdet på $M(r)$ samt lämpliga naturkonstanter. Förenkla ditt uttryck genom att uttnyttja att $m/v = \rho$ är den lokala gasdensiteten.

ii) *(2 poäng)* Visa att gasens totala termiska energi kan uttryckas som

$$U = -\alpha \int V \,\mathrm{d}p,$$

där $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, och α är en dimensionslös konstant. Integralen beräknas från gasmolnets centrum, ut till ett avstånd mycket långt ifrån dess centrum där trycket är försumbart litet. Bestäm värdet på α.

iii) *(3 poäng)* Använd dina resultat från de tidigare deluppgifterna för att visa att $U = -\beta E_G$, där E_G är gasmolnets gravitationella potentiella energi och $\beta < 1$ är en positiv dimensionslös konstant. Bestäm värdet på β.

iv) *(1 poäng)* Hur kommer gasmolnets temperatur och karaktäristiska radie att förändras med tiden på grund av värmestrålning? Motivera ditt svar kvalitativt. (Den karaktäristiska radien R_c kan definieras som radien av det sfäriska skal som innesluter hälften av gasmolnets massa.)

v) *(2 poäng)* Betrakta nu istället ett liknande moln bestående av fullständigt joniserat plasma. Antag att plasmat är en makroskopiskt neutral blandning av elektroner och protoner. Vad är proportionalitetskonstanten mellan den totala gravitationella energin och den totala termiska energin?

7. Dominobrickor (6 poäng) — *Kaarel Hänni.*

David står vid foten av en oändlig trappa. Trappstegens bredd och höjd är båda lika med d. Hörnet på varje trappsteg är lätt rundat. Mitt på varje trappsteg står en dominobricka med höjd $\sqrt{5}d$ och försumbar tjocklek. Bakom varje brickas bas finns det en liten kant som förhindrar brickorna att glida bakåt. David puttar iväg den första brickan med en viss initial vinkelhastighet så att dominobrickorna börjar falla på varandra. Alla stötar är fullständigt inelastiska och friktionen mellan brickorna är försumbar. Efter ett tag noterar David att alla dominobrickor faller med samma initiala vinkelhastighet ω. Bestäm ω.

8. Fyra resistorer (10 poäng) — *Jaan Kalda and Eero Uustalu. Utrustning:* fyra nästan identiska motstånd (vars resistanser är lite större än $4\,\mathrm{k}$) märkta med A–D och utrustningsnummer, multimeter, justerbar spänningskälla, sladdar. **Använd inte multimetern som en amperemeter**; om du gör det och bränner upp multimetern kommer du inte att få en ny.

Multimetern har en fyrsiffrig display, men den första siffran kan bara vara 0, 1, 2 or 3. När multimetern används som ohmmeter är dess mätosäkerhet 1,0 % av det avlästa värdet plus 4 gånger den sista värdesiffran. När multimetern används som voltmeter är dess mätosäkerhet 0,6 % av det avlästa värdet plus 4 gånger den sista värdesiffran.

i) *(2 poäng)* Anteckna utrustningens nummer. Bestäm medelvärdet $\bar{r}$ av de fyra motståndens resistanser så noga som möjligt och anteckna mätosäkerheten. Rita kopplingsschemat som du använde.

ii) *(2 poäng)* Bestäm det harmoniska medelvärdet $\langle r \rangle$ av de fyra motståndens resistanser så noga som möjligt (ett harmoniskt medelvärde är inversen av inversernas medelvärde) och anteckna mätosäkerheten. Rita kopplingsschemat som du använde.

iii) *(1 poäng)* Ordna motstånden A, B, C och D i ordningsföljd efter ökande resistans. Rita kopplingsschemat som du använde.

iv) *(5 poäng)* Bestäm $r_A - \bar{r}$, $r_B - \bar{r}$, $r_C - \bar{r}$ och $r_D - \bar{r}$ så noga som möjligt och anteckna mätosäkerheten (r_A, r_B, r_C och r_D betecknar resistansen hos respektive motstånd). Rita kopplingsschemat som du använde.